УДК 514.752.44+514.772
ББК (B)22.161.5

УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ, ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ НА ДУГЕ

Кондрашов Александр Николаевич

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики, Волгоградский государственный университет
ankondr@mail.ru, alexander.kondrashov@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Для уравнения Бельтрами

$$f_{\overline{z}}(z) = \mu(z) f_z(z),$$

вырождающегося на дуге, обсуждается геометрическая интерпретация некоторых условий существования и единственности решений ассоциированного уравнения, установленных в недавней работе автора [5]. Приводится теорема о локальном существовании решений ассоциированного уравнения в окрестности дуги вырождения, записанная в геометрических терминах.

Ключевые слова: вырождающееся уравнение Бельтрами, гомеоморфизм, комплексная дилатация, характеристики Лаврентьева, решение с особенностью, ассоциированное уравнение.

Введение

Пусть в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ задано уравнение Бельтрами (см., например, [2])

$$f_{\overline{z}}(z) = \mu(z) f_z(z). \tag{1}$$

При $|\mu(z)| < 1$ п.в. в D уравнения Бельтрами наиболее изучены. Этот случай называется в дальнейшем *классическим* (см., например, [11]).

Хорошо известно [2, гл. 2], что справедливость условия

$$\operatorname*{ess\,sup}_{D'} |\mu(z)| < 1, \tag{2}$$

для произвольной подобласти $D' \Subset D$, влечет существование гомеоморфного решения $w = f(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$ уравнения (1), при этом $z = f^{-1}(w) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D))$.

Уравнения Бельтрами в классическом случае являются одним из средств описания квазиконформных отображений и их обобщений [9]. В этой связи напомним, что коэффициент $\mu(z) = f_{\overline{z}}(z)/f_z(z)$ называется *комплексной дилатацией* отображения $f(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$. Его задание эквивалентно заданию п.в. в D поля распределения характеристик Лаврентьева $(p(z), \theta(z))$, при этом связь между ними следующая (см. [1, с. 7]):

$$\begin{aligned} \theta(z) &= \frac{1}{2}\arg\mu(z) + \frac{\pi}{2}, \quad p(z) = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}, \\ \mu(z) &= -\frac{p-1}{p+1}\,\mathrm{e}^{2i\theta}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Отображение $w = f(z)$, первая характеристика которого в D п.в. удовлетворяет условию

$$p(z) \le Q \equiv \mathrm{const}, \tag{4}$$

называется *Q-квазиконформным*. Если условие (4) выполняется в D локально, то отображение называется *локально квазиконформным*. Условие (2) эквивалентно условию локальной квазиконформности.

Непрерывную функцию $f(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) п.в. в D, будем называть *решением* данного уравнения.

Пусть существует замкнутое относительно D множество $E \subset D$ меры $\mathrm{mes}_2\, E = 0$. Если непрерывная в D функция $f(z)$ является решением уравнения (1) в $D \setminus E$, то функцию $f(z)$ будем называть *решением с особенностью E* данного уравнения.

Замечание 1. При этом неизвестна принадлежность $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$.

В случае $|\mu(z)| < 1$ п.в. в D гомеоморфные решения не меняют ориентацию, а в случае $|\mu(z)| > 1$ п.в. в D меняют. Эти случаи уравнения Бельтрами различаются лишь формально. Интерес представляет ситуация, когда одновременно существуют подобласти D, в которых п.в. выполнено $|\mu(z)| < 1$ и подобласти D, в которых п.в. $|\mu(z)| > 1$. В этом случае говорится, что уравнение Бельтрами имеет *переменный* тип. Его решения описывают отображения со складками, сборками и т. п.

Задача исследования уравнений Бельтрами переменного типа ставилась Л.И. Волковыским [3]. Некоторые продвижения в этом направлении имеются в работах [11–13].

В наших недавних работах [5; 6] была изучена связь между строением решений классических уравнений Бельтрами и уравнениями Бельтрами переменного типа. Именно изучение уравнения (1) в общем случае было связано с изучением классического уравнения Бельтрами

$$f_{\overline{z}}(z) = \mu^*(z) f_z(z), \tag{5}$$

с комплексной дилатацией

$$\mu^*(z) = \begin{cases} \mu(z) & \text{при} \ \ |\mu(z)| \le 1, \\ 1/\overline{\mu}(z) & \text{при} \ \ |\mu(z)| > 1. \end{cases} \tag{6}$$

Это уравнение называем в дальнейшем *уравнением, ассоциированным с уравнением* (1). Очевидно, $|\mu^*(z)| < 1$ п.в. в D, причем в классическом случае уравнения Бельтрами ассоциированное уравнение совпадает с самим уравнением, так как $\mu(z) = \mu^*(z)$.

Замечание 2. Связь между уравнениями Бельтрами переменного типа и ассоциированными уравнениями Бельтрами впервые отмечена в [8], а сам термин был введен нами в [5]. В этих работах показано, что складчатые решения уравнения Бельтрами переменного типа получаются из решений ассоциированного с ним уравнения с помощью дополнительной суперпозиции с функцией Бора $B(z) = x_1 + i|x_2|$. В связи с этим представляют интерес результаты об ассоциированном уравнении в терминах первоначального.

Далее будут использоваться терминология и обозначения работы [5], напомним их.

Пусть имеется некоторая функция $f(z) : D \to \mathbb{R}$. Если существует функция $K(z) \in \in W^{1,2}(D)$ такая, что $f(z) \le K(z)$, то функция $f(z)$ называется $W^{1,2}$-*мажорируемой* в D. Если $f(z)$ является $W^{1,2}$-*мажорируемой* во всякой подобласти $D' \Subset D$, то говорят, что $f(z)$ является *локально* $W^{1,2}$-*мажорируемой* в D. В дальнейшем для краткости вместо «локально $W^{1,2}$-мажорируема» будем писать «$W^{1,2}_{\rm loc}$-мажорируема».

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и $v = T(z) : D \to T(D) \subset \mathbb{C}$ — некоторый гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию. Определим функцию

$$Q_T(z) = \overline{\lim_{r\to 0}} \frac{\max_{|z'-z|=r} |T(z') - T(z)|}{\min_{|z'-z|=r} |T(z') - T(z)|}$$

и замкнутое относительно D множество

$$E = \{z : z \in D, \sup_{z' \in B_r(z) \cap D} Q_T(z') = +\infty \ \text{ для всякого круга } \ B_r(z)\}.$$

Известно [1, гл. 1, §4], что если $Q_T(z) < +\infty$ всюду (то есть при $E = \emptyset$) в D и $Q_T(z) \le Q \equiv \mathrm{const}$ п. в. в D, то отображение $T(z)$ Q-квазиконформно в области D. Это означает, что при $E \ne \emptyset$ отображение $T(z)$ локально квазиконформно в $D \setminus E$.

Множество E будем называть множеством вырождения отображения $T(z)$.

По $T(z)$ определим класс функций

$$T^* W^{1,2}_{\rm loc}(D) = \{f(z) = \varphi(T(z)), \ \text{где} \ \ \varphi \in W^{1,2}_{\rm loc}(T(D))\}.$$

Заметим, что в случае $E = \emptyset$ отображение $T(z)$ локально квазиконформно в D и, следовательно, $T(z) \in W^{1,2}_{\rm loc}(D)$. Поэтому, в силу инвариантности классов $W^{1,2}_{\rm loc}$ при квазиконформных отображениях (см., например, [4, гл. 5, §4, п. 4.1, теорема 4.2]), заключаем, что $T^* W^{1,2}_{\rm loc}(D) = W^{1,2}_{\rm loc}(D)$. Следовательно, при $E \ne \emptyset$, если $f(z) \in T^* W^{1,2}_{\rm loc}(D)$, то $f(z) \in W^{1,2}_{\rm loc}(D \setminus E)$.

Пусть $\delta(t)$ — положительная непрерывная при $t \ne 0$ функция, имеющая интегрируемую особенность в нуле. Определим комплекснозначную функцию

$$\mathcal{F}_\delta(z) = f_\delta(x_1) + i x_2, \quad \text{где} \quad f_\delta(t) = \int_0^t \delta(\tau) d\tau. \tag{7}$$

Градиент произвольной вещественной функции $f(z)$ в точке $z \in D$ в дальнейшем отождествляем с комплексным числом $\nabla f(z) = f_{x_1} + i f_{x_2}$. В соответствии с этим также пишем $\overline{\nabla f(z)} = f_{x_1} - i f_{x_2}$.

1. Уравнения с вырождением на линии

В работе [5] были получены результаты о существовании и единственности решений ассоциированного уравнения Бельтрами, вырождающегося на дуге. Дадим их формулировки.

Пусть существует жорданова дуга $E \subset D$, делящая область D на две односвязные подобласти D_1 и D_2, причем на E уравнение (1) вырождается, а характер вырождения описывается следующими условиями (B1), (B2).

(B1) Справедливо представление

$$|\mu(z)| = 1 + M(z)\delta(H(z)), \tag{8}$$

где $M(z)$ — измеримая, п.в. конечная в D функция; $\delta(t)$ — непрерывная функция, такая, что $\delta(t) > 0$ при $t \neq 0$ и $\delta(0) = 0$; $H(z) \in C(D) \cap W^{1,2}_{\rm loc}(D)$, причем $\nabla H(z) \neq 0$ п.в. в D и $H(z) < 0$ в D_1, $H(z) > 0$ в D_2.

(B2) Существует непрерывная функция $Z(z) \in W^{1,2}_{\rm loc}(D)$ такая, что отображение

$$J(z) = H(z) + iZ(z) \in C(D) \cap W^{1,2}_{\rm loc}(D)$$

является локально квазиконформным гомеоморфизмом D на $J(D)$, сохраняющим ориентацию.

Замечание 3. Сказанное не означает, что E совпадает с множеством *всех* точек, в которых уравнение вырождается.

Из условия (B1) следует, что $H(z) = 0$ — уравнение кривой E.

Пусть в дальнейшем $I_1(z) = \frac{\partial(H,Z)}{\partial(x_1,x_2)} = H_{x_1}Z_{x_2} - H_{x_2}Z_{x_1}$ — якобиан отображения $J(z)$.

Очевидно в условиях (B1), (B2) представление (8) не единственно. Следующие теоремы 1, 2, доказанные в [5], указывают на некоторые соотношения между функциями M, δ, H, Z, при которых существует гомеоморфное решение с особенностью E, уравнения ассоциированного с уравнением (1) и дают описание структуры этих решений.

Теорема 1. *Предположим, что выполняются условия* (B1), (B2) *и для всякой подобласти $D' \Subset D$ можно указать функцию $K(z) \in W^{1,2}(D')$ такую, что*

$$\iint\limits_{D'} \frac{|\nabla K(z)|^2}{\delta(H)} dx_1 dx_2 < +\infty,$$

причем для п.в. $z \in D'$

$$\frac{1}{|M(z)|\delta^2(H)} \left| \mu(z) - \frac{\nabla Z}{\overline{\overline{\nabla Z}}} \right|^2 + \frac{1}{|M(z)|} \leq K(z). \tag{9}$$

Положим $T(z) = \mathcal{F}_\delta(J(z))$. Тогда существует гомеоморфизм $w = f(z) : D \to \to f(D) \subset \mathbb{C}$, для которого справедливы утверждения:

(*i*) *$f(z)$ есть решение с особенностью E уравнения, ассоциированного с* (1)*;*

(*ii*) *$f(z) \in T^*W^{1,2}_{\rm loc}(D)$, $f^{-1}(w) \in W^{1,2}_{\rm loc}(f(D \setminus E))$ и в представлении*

$$f(z) = \varphi(T(z)) = \varphi(\mathcal{F}_\delta(J(z))) \tag{10}$$

отображение φ имеет $W^{1,2}_{\rm loc}$-мажорируемую первую характеристику.

Гомеоморфизм $w = f(z)$ единственен с точностью до конформного отображения в w-плоскости.

Теорема 2. *Предположим, что выполняются условия* (B1), (B2) *и функция* $1/\delta(t)$ *имеет интегрируемую особенность в нуле. Кроме того, предположим, что для всякой подобласти* $D' \Subset D$ *можно указать функцию* $K(z) \in W^{1,2}(D')$ *такую, что*

$$\iint\limits_{D'} \frac{|\nabla K(z)|^2}{\delta(H)} dx_1 dx_2 < +\infty,$$

причем для п.в. $z \in D'$

$$\frac{1}{|M(z)|\delta^2(H)} \left|\mu(z) - \frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}}\right|^2 + \frac{1}{|M(z)|} \leq K(z). \tag{11}$$

Положим $T(z) = \mathcal{F}_{\frac{1}{\delta}}(J(z))$. *Тогда существует гомеоморфизм* $w = f(z) : D \to$ $\to f(D) \subset \mathbb{C}$, *для которого справедливы утверждения:*

(i) $f(z)$ *есть решение с особенностью* E *уравнения, ассоциированного с* (1);

(ii) $f(z) \in T^* W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, $f^{-1}(w) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D \setminus E))$ *и в представлении*

$$f(z) = \varphi(T(z)) = \varphi(\mathcal{F}_{\frac{1}{\delta}}(J(z))) \tag{12}$$

отображение φ *имеет* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$*-мажорируемую первую характеристику.*

Гомеоморфизм $w = f(z)$ *единственен с точностью до конформного отображения в* w*-плоскости.*

Главной целью нашей работы является выяснение геометрических условий существования и единственности решений ассоциированного уравнения.

2. Геометрический смысл условий (9) и (11)

Пусть для $\mu(z)$, кривой E и области D выполняются условия (B1), (B2) предыдущего раздела и, кроме того, кривая E локально спрямляема, а функция $\mu(z)$ непрерывна в п.в. точках кривой E.

Замечание 4. Если речь идет о E, то «почти всюду» рассматривается относительно линейной меры.

Рассмотрим условия теоремы 1. Предположим градиент $\nabla Z(z)$ непрерывен в п.в. точках E, а якобиан $I_1(z) > 0$ п.в. на E.

Зафиксируем произвольную подобласть $D' \Subset D$ так, что $D' \bigcap E \neq \emptyset$. Тогда из неравенства (9) для п.в. $z \in D'$, получаем

$$\left|\mu(z) - \frac{\nabla Z(z)}{\overline{\nabla Z(z)}}\right|^2 \leq K(z)|M(z)|\delta(H(z)). \tag{13}$$

Известно (см.: [10, §6]), что множество $\{z : z \in D', \lim\limits_{z' \to z} K(z') = +\infty\}$ имеет линейную меру 0. Отсюда следует, что для п.в. $z_0 \in E$ найдется радиус $r = r(z_0) > 0$ такой, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_r(z_0) \cap D'} K(z) < +\infty. \tag{14}$$

Пусть $z_0 \in E$ — произвольная точка непрерывности $\mu(z)$ и $\nabla Z(z)$, в которой выполнено (14), $I_1(z_0) > 0$, а к E существует касательная.

Непрерывность $\mu(z)$ в точке z_0 в силу представления (8) влечет $|\mu(z_0)| = 1$ и

$$\lim_{z \to z_0} M(z)\delta(H(z)) = 0. \tag{15}$$

Выберем последовательность точек $z_n \in D'$, $z_n \to z_0$ так, чтобы на ней выполнялось неравенство (13) и последовательность $K(z_n)$ была ограничена. Тогда, учитывая (15), непрерывность $\mu(z)$ и $\nabla Z(z)$ в точке z_0, из (13) получаем

$$\mu(z_0) - \frac{\nabla Z(z_0)}{\overline{\nabla Z(z_0)}} = \lim_{n \to \infty} \left(\mu(z_n) - \frac{\nabla Z(z_n)}{\overline{\nabla Z(z_n)}} \right) = 0.$$

Тем самым п.в. на E

$$\mu(z) - \frac{\nabla Z(z)}{\overline{\nabla Z(z)}} = 0. \tag{16}$$

Имеем соотношение

$$\nabla H(z)\overline{\nabla Z(z)} - \overline{\nabla H(z)}\nabla Z(z) = -2iI_1(z).$$

Так как $I_1(z) \neq 0$ п.в. на E, то с учетом (16), из предыдущего равенства, п.в. на E вытекает соотношение

$$\nabla H(z)\overline{\nabla Z(z)} - \overline{\nabla H(z)}\mu(z)\overline{\nabla Z(z)} \neq 0.$$

Деля его на $-i\overline{\nabla Z(z)} \neq 0$, для п.в. $z \in E$ получаем

$$i\nabla H(z) + \overline{i\nabla H(z)}\mu(z) \neq 0.$$

Так как вектор $i\nabla H(z)$ направлен по касательной к E в п.в. точках E, то п.в. на E выполняется условие

$$dz + \mu(z)d\overline{z} \neq 0, \tag{17}$$

если dz направлено по касательной к E.

В случае теоремы 2, при аналогичных ограничениях на E, $\mu(z)$, ∇H и $I_1(z)$, мы придем к условию

$$dz + \mu(z)d\overline{z} = 0, \tag{18}$$

где dz направлено по касательной к E, выполненному п.в. на E.

Дадим геометрическую трактовку соотношениям (17) и (18).

Пусть $(p(z), \theta(z))$ — распределение характеристик Лаврентьева, отвечающее комплексной дилатации $\mu^*(z)$. Так как

$$p(z) = \frac{1 + |\mu^*(z)|}{1 - |\mu^*(z)|} = \frac{1 + |\mu(z)|}{|1 - |\mu(z)||},$$

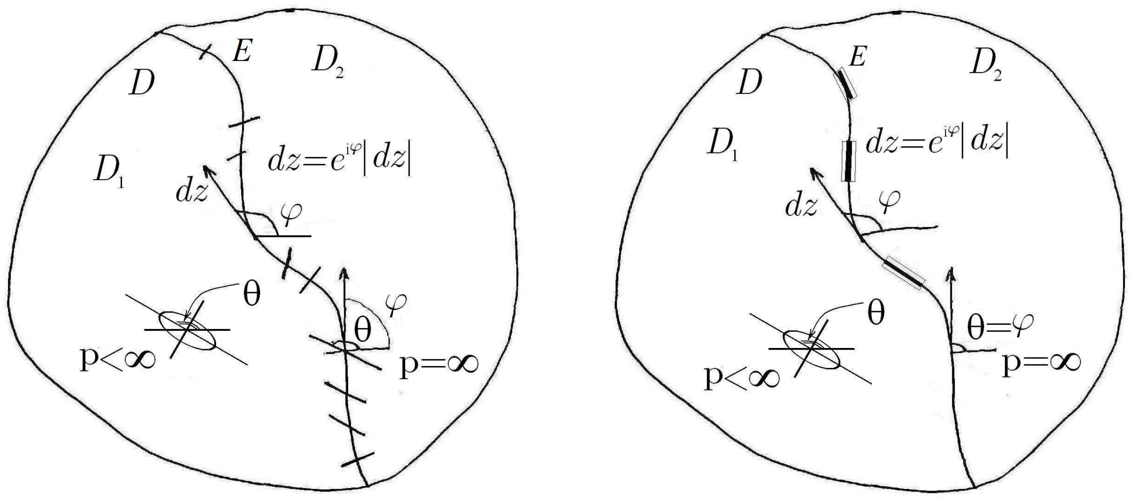
то представление (8) означает, что

$$p(z) = \infty \quad \text{при } z \in E, \tag{19}$$

или, в силу (3), $\mu = \mu^* = -\,\mathrm{e}^{2i\theta}$ при $z \in E$.

Равенство (19) можно интерпретировать как вырождение на E бесконечно малых эллипсов с характеристиками $(p(z), \theta(z))$ в бесконечно малые отрезки с углом наклона $\theta = \theta(z)$.

Для всякого $z \in E$ обозначим через $\varphi = \varphi(z)$ $(0 \le \varphi < \pi)$ — угол между касательной к E в точке $z \in E$ и положительным направлением оси Ox_1. Тогда $dz = |dz|\,\mathrm{e}^{i\varphi(z)}$ — касательный вектор к E в точке z. При этом из условия (17) следует, что $\varphi \ne \theta$, а из условия (18), что $\varphi = \theta$. Это означает, что в случае (17) упомянутые отрезки направлены трансверсально к E, а в случае (18) — по касательной (см. рисунок).



Вдоль E $|\mu|=1 \Leftrightarrow p=\infty$; $dz+\mu\overline{dz}\ne 0 \Leftrightarrow \theta\ne\varphi$ Вдоль E $|\mu|=1 \Leftrightarrow p=\infty$; $dz+\mu\overline{dz}=0 \Leftrightarrow \theta=\varphi$

Случаи условий (17) и (18)

Приведем примеры $\mu(z)$, иллюстрирующие теоремы 1 и 2.

Случай теоремы 1. Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$ и $H(z) \in \mathrm{C}^{(2)}(D)$ — произвольная функция, такая, что $\nabla H(z) \ne 0$ всюду в D. Пусть линия уровня $E = \{z : H(z) = 0\}$ разбивает D на односвязные подобласти $D_1 = \{z :\ H(z) < 0\}$ и $D_2 = \{z :\ H(z) > 0\}$.

Положим $\varphi(z) = \arg(\nabla H(z))$. Зададим произвольно измеримую функцию $M(z)$ такую, что $0 < m_1 \le |M(z)| \le m_2$ $(m_1, m_2 \equiv \mathrm{const})$ и непрерывную функцию $\delta(t)$ $(\delta(t) > 0$ при $t \ne 0$, $\delta(0) = 0)$.

Возьмем в качестве $\mu(z)$ функцию

$$\mu(z) = (1 + M(z)\delta(H))\,\mathrm{e}^{2(\varphi(z)+\frac{\pi}{4})i} = i(1 + M(z)\delta(H))\frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}}. \tag{20}$$

Векторное поле $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,\nabla H$ трансверсально ∇H. В некоторой окрестности $O(E)$ существуют функции $\lambda(z) > 0$ и $Z(z) \in \mathrm{C}^{(1)}(O(E))$ такие, что $\nabla Z = \lambda(z)\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,\nabla H$. (Эта функция $\lambda(z)$ есть интегрирующий множитель 1-формы

$$\omega = (\sqrt{2}/2)\,((H_{x_1} - H_{x_2})dx_1 + (H_{x_1} + H_{x_2})dx_2)\,.)$$

Тогда
$$\left|\mu - \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}}\right|^2 = \left|i\frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}} + iM(z)\delta(H)\frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}} - i\frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}}\right|^2 = |M(z)|^2\delta^2(H)$$
и левая часть (9) оценивается следующим образом:
$$\frac{1}{|M(z)|\delta^2(H)}\left|\mu - \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}}\right|^2 + \frac{1}{|M(z)|} \le |M(z)| + \frac{1}{|M(z)|} \le m_2 + \frac{1}{m_1}.$$

Очевидно, условия теоремы 1 выполняются с $K(z) = m_2 + \frac{1}{m_1} \equiv \mathrm{const}$.

Случай теоремы 2. Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$. Зададим в ней пару функций $H(z) \in \mathrm{C}^{(1)}(D)$ так, чтобы $\nabla H(z) \neq 0$ всюду в D и линия уровня $E = \{z : H(z) = 0\}$ разбивала D на односвязные подобласти $D_1 = \{z : \ H(z) < 0\}$ и $D_2 = \{z : \ H(z) > 0\}$.

Функцию $Z(z) \in \mathrm{C}^{(1)}(O(E))$ выберем так, чтобы градиент $\nabla Z(z)$ был всюду трансверсален градиенту $\nabla H(z)$, причем $\frac{\partial(H,Z)}{\partial(x_1,x_2)} > 0$. (Которую, в частности, можно построить как и в предыдущем случае.)

Зададим произвольно измеримую функцию $M(z)$ такую, что $0 < m_1 \le |M(z)| \le m_2$ (m_1, m_2— постоянные); непрерывную функцию $\delta(t)$ ($\delta(t) > 0$ при $t \neq 0$, $\delta(0) = 0$), для которой может быть определена функция $\mathcal{F}_{\frac{1}{\delta}}$.

Положим
$$\mu(z) = (1 + M(z)\delta(H))\,\mathrm{e}^{2\varphi(z)i}\,.$$

Тогда имеем
$$\left|\mu - \frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}}\right|^2 = \left|\frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}} + M(z)\delta(H)\frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}} - \frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}}\right|^2 = |M(z)|^2\delta^2(H),$$
и левая часть в (11) оценивается следующим образом:
$$\frac{1}{|M(z)|\delta^2(H)}\left|\mu - \frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}}\right|^2 + \frac{1}{|M(z)|} \le |M(z)| + \frac{1}{|M(z)|} \le m_2 + \frac{1}{m_1}.$$
Тем самым условия теоремы 2 выполняются с $K(z) = m_2 + \frac{1}{m_1} \equiv \mathrm{const}$.

Явно указанным примером пары функций $H(z)$, $Z(z)$, подходящей как для описанной ситуации случая теоремы 1, так и случая теоремы 2, может служить пара функций
$$H(z) = xy - 1, \quad Z(z) = xy + \frac{1}{2}(y^2 - x^2),$$
с областью $D = \{(x, y) : \ x > 0,\ y > 0\}$ и кривой $E = \{(x, y) : y = 1/x\}$.

3. Геометрические следствия теорем 1, 2

Далее расстояние $\mathrm{dist}(z, E)$ от точки $z \in D$ до множества $E \subset E$ мы будем рассматривать как функцию z. Желая подчеркнуть это, а также для уменьшения размера формул, мы будем использовать обозначение $d_E(z)$, полагая $d_E(z) = \mathrm{dist}(z, E)$.

При выполнении условия (17) и дополнительных условиях гладкости на кривую E в работах Сребро и Якубова [13, теорема 1.1] была установлена локальная теорема существования и единственности гомеоморфных решений вырождающихся уравнений Бельтрами, записанная в геометрических терминах. Следующая теорема 3 является специальной версией упомянутого результата. Наша цель состоит в том, чтобы показать возможность ее вывода из теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, $E \subset D$ — кривая класса $\mathrm{C}^{(3)}$, делящая область D на односвязные подобласти D_1, D_2, и в D задано уравнение Бельтрами (1). Предположим, что функция $\mu(z)$ представима в виде*

$$\mu(z) = (1 + \tilde{M}(z)\rho(d_E(z)))\,\mathrm{e}^{2i\theta(z)}, \tag{21}$$

где: 1) *функция $\rho(t)$ непрерывна на $[0, +\infty)$, причем $\rho(0) = 0$ и $\rho(t) > 0$ при $t \neq 0$;* 2) *функция $\theta(z) \in \mathrm{C}^{(1)}(D)$ такова, что всюду на E*

$$dz + \mathrm{e}^{2i\theta(z)}\,\overline{dz} \neq 0, \tag{22}$$

при dz, направленном по касательной к E; 3) *комплекснозначная функция $\tilde{M}(z)$ измерима и п.в. в D*

$$\frac{1}{R} \le |\mathrm{Re}\,\tilde{M}(z)| \le R, \quad |\mathrm{Im}\,\tilde{M}(z)| \le R \quad (R \equiv \mathrm{const}). \tag{23}$$

Тогда в некоторой окрестности $O(E)$ существует решение с особенностью E уравнения, ассоциированного с (1).

Доказательство. Положим $M_1(z) = \mathrm{Re}\,\tilde{M}(z)$, $M_2(z) = \mathrm{Im}\,\tilde{M}(z)$.

Пусть s ($a \le s \le b$) — ориентированный натуральный параметр (отсчитываемый от фиксированной точки $z_0 \in E$), заданный на E, и пусть

$$z = \tilde{z}(s) = \tilde{x}_1(s) + i\tilde{x}_2(s) \ -$$

соответствующая натуральная параметризация кривой E.

Через $|\cdot|$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — будем обозначать стандартные евклидову норму и скалярное произведение в $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, а комплексные числа рассматривать как векторы.

Пусть $\nu(s) = \tilde{z}'(s)$ — единичное векторное поле, касательное к E, $k(s) = |\tilde{z}''(s)|$ — кривизна кривой E в точке $\tilde{z}(s)$, $n(s) = -\tilde{x}_2'(s) + i\tilde{x}_1'(s)$ — единичное нормальное поле.

Пусть точка z — фиксирована. Рассмотрим функцию

$$h(s) = |z - \tilde{z}(s)| = \sqrt{(x_1 - \tilde{x}_1(s))^2 + (x_2 - \tilde{x}_2(s))^2}.$$

С учетом формул Френе

$$\nu'(s) = k(s)n(s), \quad n'(s) = -k(s)\nu(s),$$

имеем

$$h'(s) = -\frac{\langle\nu(s), z - \tilde{z}(s)\rangle}{|z - \tilde{z}(s)|},$$

$$h''(s) = -\frac{(\langle kn(s), z - \tilde{z}(s)\rangle - |\nu(s)|^2)|z - \tilde{z}(s)|^2 + \langle\nu(s), z - \tilde{z}(s)\rangle^2}{|z - \tilde{z}(s)|^3}.$$

Отсюда видно, что если $z - \tilde{z}(s_0) \perp \nu(s_0)$, то есть точка z лежит на нормали к E, проведенной через точку $\tilde{z}(s_0)$, то $h'(s_0) = 0$. При этом

$$h''(s_0) = \frac{1 - \langle k(s_0)n(s_0), z - \tilde{z}(s_0)\rangle}{|z - \tilde{z}(s_0)|} = \frac{1 \pm k(s_0)|z - \tilde{z}(s_0)|}{|z - \tilde{z}(s_0)|},$$

где знак «+» или «−» берется в зависимости от того, одинаково или противоположно направлены коллинеарные векторы $z - \tilde{z}(s_0)$ и $n(s_0)$, или, иначе говоря, в какой из подобластей D_1 или D_2 лежит z.

Тогда $h''(s_0) > 0$, если $|z - \tilde{z}(s_0)| < \frac{1}{|k(s_0)|}$ и $z - \tilde{z}(s_0) \perp \nu(s_0)$. Таким образом, указанное s_0 является точкой локального минимума функции $h(s)$ и, тем самым,

$$d_E(z) = |z - \tilde{z}(s_0)|.$$

Рассмотрим отображение области $\Omega = \{(s,t) : |t| < \frac{1}{|k(s)|}\}$ из плоскости переменных s, t в плоскость переменных x_1, x_2, определенное формулой

$$z = \tilde{z}(s) + tn(s). \tag{24}$$

Данное отображение принадлежит классу $\mathrm{C}^{(2)}$, при этом

$$d_E(\tilde{z}(s) + tn(s)) = |t|.$$

Снова, учитывая формулы Френе, имеем

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} \tilde{x}_1'(s) - t\tilde{x}_2''(s) & -\tilde{x}_2'(s) \\ \tilde{x}_2'(s) + t\tilde{x}_1''(s) & \tilde{x}_1'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{x}_1'(s) - tk(s)\tilde{x}_1'(s) & -\tilde{x}_2'(s) \\ \tilde{x}_2'(s) - tk(s)\tilde{x}_2'(s) & \tilde{x}_1'(s) \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - tk(s) > 0.$$

По построению данного отображения очевидно, что оно взаимно однозначно отображает некоторую окрестность прямой $t = 0$ на окрестность кривой E, причем обратное к нему является отображением класса $\mathrm{C}^{(1)}$. Пусть $H(x_1, x_2) = t(x_1, x_2)$ получается выражением t через x_1, x_2 из системы уравнений (24).

Положим $\delta(t) = \rho(|t|)$. Тогда (21) примет вид

$$\mu(z) = (1 + \tilde{M}(z)\delta(H(z)))\, \mathrm{e}^{2i\theta(z)}\,. \tag{25}$$

Отсюда, вычисляя, получаем

$$|\mu(z)|^2 = 1 + M^*(z)\delta(H(z)),$$

где $M^*(z) = 2M_1(z) + |\tilde{M}(z)|^2\delta(H(z))$. Далее можно записать

$$|\mu(z)| = 1 + \sqrt{1 + M^*(z)\delta(H(z))} - 1 = 1 + M(z)\delta(H(z)),$$

где

$$M(z) = \frac{M^*(z)}{1 + \sqrt{1 + M^*(z)\delta(H(z))}}.$$

С учетом (23), равенства $d_E(z) = |H(z)|$ и непрерывности $\delta(t)$, ясно, что можно выбрать столь малое $\epsilon > 0$, чтобы при $d_E(z) < \epsilon$ было выполнено

$$\frac{1}{C} \le |M(z)| \le C, \quad \frac{1}{C} \le |\tilde{M}(z)| \le C, \tag{26}$$

где $C = C(R, \epsilon) > 0$ — некоторая константа.

Пусть $Z(z)$ — функция класса $C^{(1)}$, определенная в окрестности E уравнением

$$\nabla Z(z) = \lambda(z)\,\mathrm{e}^{i\theta(z)}, \tag{27}$$

где $\lambda(z) > 0$ — интегрирующий множитель формы $\omega(z) = \cos\theta(z)dx_1 + \sin\theta(z)dx_2$.

Тогда имеем

$$\frac{\partial(H,Z)}{\partial(x_1,x_2)} = \begin{vmatrix} H_{x_1} & H_{x_2} \\ Z_{x_1} & Z_{x_2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} H_{x_1} & H_{x_2} \\ \lambda\cos\theta & \lambda\sin\theta \end{vmatrix} = \lambda(z)(-H_{x_2}\cos\theta + H_{x_1}\sin\theta) = \lambda\langle i\nabla H, \mathrm{e}^{i\theta(z)}\rangle. \tag{28}$$

Далее, в (3) положим $dz = i\nabla H$, откуда получим

$$i\nabla H + \mathrm{e}^{2i\theta(z)}\,\overline{i\nabla H} \neq 0 \Longleftrightarrow -2\,\mathrm{e}^{-i\theta(z)}\langle i\nabla H, \mathrm{e}^{i\theta(z)}\rangle \neq 0.$$

Тем самым из (28) вытекает, что на E

$$\frac{\partial(H,Z)}{\partial(x_1,x_2)} \neq 0,$$

а в силу непрерывности якобиана это же неравенство справедливо в некоторой окрестности E. Можно считать, что ориентация E и параметризация s согласованы так, что

$$\frac{\partial(H,Z)}{\partial(x_1,x_2)} > 0.$$

Тогда отображение $J(z) = H(z) + iZ(z)$ вместе с обратным принадлежит классу C^1 в некоторой окрестности E, и значит является локально квазиконформным.

С учетом (25), (26), (27), имеем

$$\frac{1}{|M(z)|\delta^2(H)}\left|\mu - \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}}\right|^2 + \frac{1}{|M(z)|} = \frac{1}{|M(z)|\delta^2(H)}\left|\tilde{M}(z)\delta(H(z))\right|^2 +$$

$$+ \frac{1}{|M(z)|} = \frac{\tilde{M}(z)|^2}{|M(z)|} + \frac{1}{|M(z)|} \leq K_0,$$

где K_0 — некоторая константа.

Тем самым установлено, что в некоторой окрестности E выполняются условия теоремы 1, с $K(z) \equiv K_0$, и, следовательно, уравнение, ассоциированное с уравнением (1), имеет решение с особенностью E. Теорема доказана.

Случай, когда вдоль дуги E выполняется условие $dz + \mu(z)\overline{dz} = 0$, дается следующей теоремой.

Теорема 4. *Предположим, что 1) $H(z) \in C^1(D)$, $\nabla H(z) \neq 0$ в D и E задано уравнением $H(z) = 0$; 2) функция $\mu(z)$ может быть записана в виде:*

$$\mu(z) = \frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}} + M^*(z)\rho(|H(z)|), \tag{29}$$

где функция $\rho(t)$ непрерывна на $[0,+\infty)$, причем $\rho(0)=0$ и $\rho(t)>0$ при $t\neq 0$ и $\frac{1}{\rho(t)}$ имеет интегрируемую особенность в нуле и комплекснозначная функция $M^*(z)$ измерима в D, причем

$$\left|\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{\nabla H(z)}}{\nabla H(z)}M^*(z)\right)\right|\geq\frac{1}{C_1},\quad |M^*(z)|\leq C_2\quad (C_1,\ C_2\equiv\mathrm{const}). \tag{30}$$

Тогда в некоторой окрестности $O(E)$ существует решение с особенностью E уравнения, ассоциированного с (1).

Доказательство. Положим $\theta(z)=\arg(\nabla H(z))$, тогда $\nabla H(z)=|\nabla H(z)|\,\mathrm{e}^{i\theta(z)}$ и

$$\mathrm{e}^{2i\theta(z)}=\frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}}.$$

Тогда (29) перепишем более кратко

$$\mu(z)=\mathrm{e}^{2i\theta(z)}+M^*(z)\rho(|H(z)|).$$

Так как $dz=i\nabla H$ направлен по касательной к E, из (29) видим, что при $H(z)=0$

$$\mu(z)=\mathrm{e}^{2i\theta(z)}=\frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}},$$

и, значит, $dz+\mathrm{e}^{2i\theta(z)}\,\overline{dz}=0$ при $z\in E$ и dz направлен по касательной к E.

Как и выше зададим $Z(z)\in\mathrm{C}^{(1)}(D)$ так, чтобы градиент $\nabla Z(z)$ был всюду трансверсален градиенту $\nabla H(z)$, причем $\frac{\partial(H,Z)}{\partial(x_1,x_2)}>0$.

Имеем

$$|\mu(z)|^2=1+2\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{-2i\theta}\,M^*)\rho+|M^*|^2\rho^2.$$

Откуда

$$|\mu|=1+\sqrt{1+2\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{-2i\theta}\,M^*)\rho+|M^*|^2\rho^2}-1=1+\frac{2\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{-2i\theta}\,M^*)+|M^*|^2\rho}{\sqrt{1+2\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{-2i\theta}\,M^*)\rho+|M^*|^2\rho^2}+1}\rho.$$

Замечая, что

$$\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{-2i\theta}\,M^*)=\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{\nabla H}}{\nabla H}M^*\right),$$

с учетом (30), заключаем, что в некоторой окрестности $O(E)$

$$|\mu(z)|=1+M(z)\delta(H(z)),$$

где $\frac{1}{C_3}\leq|M(z)|\leq C_3$, $\delta(t)=\rho(|t|)$ и C_3 — некоторая постоянная. Далее

$$\frac{1}{|M(z)|\delta^2(H)}\left|\mu-\frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}}\right|^2+\frac{1}{|M(z)|}=\frac{1}{|M(z)|\delta^2(H)}|M^*(z)\delta(H)|^2+\frac{1}{|M(z)|}\leq$$

$$\leq\frac{|M^*(z)|^2}{|M(z)|}+\frac{1}{|M(z)|}\leq C_4\equiv\mathrm{const}.$$

Тем самым, условия теоремы 2 выполняются с $K(z)=C_4$, и значит утверждение теоремы справедливо.

Следствие 1. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, $E \subset D$ — кривая класса $\mathrm{C}^{(3)}$, делящая область D на односвязные подобласти D_1, D_2. Предположим, что*

$$\mu(z) = \frac{\nabla d_E(z)}{\overline{\nabla d_E(z)}} + M^*(z)\rho(d_E(z)), \tag{31}$$

где функция $\rho(t)$ непрерывна на $[0, +\infty)$, причем $\rho(0) = 0$ и $\rho(t) > 0$ при $t \neq 0$ и $\frac{1}{\rho(t)}$ имеет интегрируемую особенность в нуле и комплекснозначная функция $M^*(z)$ измерима в D, причем

$$\Big|\mathrm{Re}\Big(\frac{\overline{\nabla d_E(z)}}{\nabla d_E(z)} M^*(z)\Big)\Big| \geq \frac{1}{C_1}, \quad |M^*(z)| \leq C_2 \quad (C_1,\ C_2 \equiv \mathrm{const}).$$

Тогда в некоторой окрестности $O(E)$ существует решение с особенностью E уравнения, ассоциированного с (1).

Замечание 5. Пример $E = \{x_2 = 0\}$ показывает, что $d_E(z) = |x_2|$ и $\nabla d_E(z)$ в точках E неопределен. Но в случае, когда E есть кривая класса $\mathrm{C}^{(3)}$, как было видно из доказательства теоремы 3, функция $H(z) = \pm d_E(z)$, где «+» выбирается в одной из областей D_i, $i = 1, 2$, а «−» — в другой и $H(z) = 0$ на E является функцией класса $\mathrm{C}^{(1)}(O(E))$. Поэтому функция

$$\frac{\nabla d_E(z)}{\overline{\nabla d_E(z)}} = \frac{\nabla H(z)}{\overline{\nabla H(z)}}$$

будет по непрерывности продолжаться на E.

Доказательство. Вытекает из сделанного замечания при выборе указанной $H(z)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белинский, П. П. Общие свойства квазиконформных отображений / П. П. Белинский. — Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1974. — 100 с.

2. Векуа, И. Н. Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. — М. : Наука, 1988. — 512 с.

3. Волковыский, Л. И. Некоторые вопросы теории квазиконформных отображений / Л. И. Волковыский // Некоторые проблемы математики и механики, к семидесятилетию М.А. Лаврентьева. — Ленинград : Наука, 1970. — С. 128–134.

4. Гольдштейн, В. М. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения / В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк. — М. : Наука, 1983. — 284 с.

5. Кондрашов, А. Н. К теории вырождающихся уравнений Бельтрами переменного типа / А. Н. Кондрашов // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т. 53. — № 6. — С. 1321–1337.

6. Кондрашов, А. Н. К теории уравнения Бельтрами переменного типа со многими складками / А. Н. Кондрашов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2013. — № 2 (219). — С. 26–35.

7. Миклюков, В. М. Изотермические координаты на поверхностях с особенностями / В. М. Миклюков // Мат. сб. — 2004. — Т. 195. — № 1. — С. 69–88.

8. Якубов, Э. Х. О решениях уравнения Бельтрами с вырождением / Э. Х. Якубов // Докл. акад. наук СССР. — 1978. — Т. 243. — № 5. — С. 1148–1149.

9. Lavrentieff, M. Sur une classe de representation continues / M. Lavrentieff // Мат. сб. — 1935. — Т. 42. — № 4. — С. 407–424. [Имеется перевод: Об одном классе непрерывных отображений // Лаврентьев, М. А. Избранные труды. Математика и механика / М. А. Лаврентьев. — М. : Наука, 1990. — С. 219–237.]

10. Martio, O. On existence and uniqueness of degenerate Beltrami equations / O. Martio, V. M. Miklyukov // Complex Variables. — 2004. — № 49. — P. 647–656.

11. Srebro, U. Branched folded maps and alternating Beltrami equations / U. Srebro, E. Yakubov // Journal d'analyse mathematique. — 1996. — № 70. — P. 65–90.

12. Srebro, U. Uniformization of maps with folds / U. Srebro, E. Yakubov // Israel mathematical conference proceedings. — 1997. — № 11. — P. 229–232.

13. Srebro, U. μ-Homeomorphisms / U. Srebro, E. Yakubov // Contemporary Mathematics AMS. — 1997. — № 211. — P. 473–479.

REFERENCES

1. Belinskiy P.P. *Obshchie svoystva kvazikonformnykh otobrazheniy* [General Properties of Quasiconformal Mappings]. Novosibirsk, Nauka. Sib. otd-nie Publ., 1974. 100 p.

2. Vekua I.N. *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized analytic functions]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 512 p.

3. Volkovyskiĭ L.I. Nekotorye voprosy teorii kvazikonformnykh otobrazheniy [Some problems of the theory of quasiconformal mappings]. *Nekotorye problemy matematiki i mekhaniki, k semidesyatiletiyu M.A. Lavrenteva* [in: Some Problems of Mathematics and Mechanics (to the seventieth birthday of M. A. Lavrent'ev)]. Leningrad, Nauka Publ., 1970, pp. 128–134.

4. Goldshteyn V.M., Reshetnyak Yu.G. *Vvedenie v teoriyu funktsiy s obobshchennymi proizvodnymi i kvazikonformnye otobrazheniya* [Quasiconformal Mappings and Sobolev Spaces]. Dordrecht, Kluwer, 1983. 284 p.

5. Kondrashov A.N. K teorii vyrozhdayushchikhsya uravneniy Beltrami peremennogo tipa [On the theory of degenerate alternating beltrami equations]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 2012, vol. 53, no. 6, pp. 1321–1337.

6. Kondrashov A.N. K teorii uravneniya Beltrami peremennogo tipa so mnogimi skladkami [On the theory of alternating Beltrami equation with many folds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2013, no. 2 (219), pp. 26–35.

7. Miklyukov V.M. Izotermicheskie koordinaty na poverkhnostyakh s osobennostyami [Isothermic coordinates on singular surfaces]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 2004, vol. 195, no. 1, pp. 69–88.

8. Yakubov E.Kh. O resheniyakh uravneniya Beltrami s vyrozhdeniem [Solutions of Beltrami's equation with degeneration]. *Dokl. akad. nauk SSSR* [Doklady Mathematics], 1978, vol. 243, no. 5, pp. 1148–1149.

9. Lavrentieff M. Sur une classe de representation continues. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 1935, vol. 42, no. 4, pp. 407–424.

10. Martio O., Miklyukov V.M. On existence and uniqueness of degenerate Beltrami equations. *Complex Variables*, 2004, no. 49, pp. 647–656.

11. Srebro U., Yakubov E. Branched folded maps and alternating Beltrami equations. *Journal d'analyse mathematique*, 1996, no. 70, pp. 65–90.

12. Srebro U., Yakubov E. Uniformization of maps with folds. *Israel mathematical conference proceedings*, 1997, no. 11, pp. 229–232.

13. Srebro U., Yakubov E. μ-Homeomorphisms. *Contemporary Mathematics AMS*, 1997, no. 211, pp. 473–479.

BELTRAMI EQUATIONS WITH DEGENERATE ON ARCS

Kondrashov Alexander Nikolaevich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Computer Sciences and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
ankondr@mail.ru, alexander.kondrashov@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In the recent paper [5] were obtained some conditions for the existence and uniqueness of solutions with singularity of the associated equation with the Beltrami equation

$$f_{\overline{z}}(z) = \mu(z) f_z(z). \qquad (*)$$

Here we gave geometric interpretation this results.

The main results are as follows.

Let $D \subset \mathbb{C}$ be a simply connected domain divided by curve $E \subset D$ of class $\mathrm{C}^{(3)}$ into two subdomain D_1, D_2.

Theorem 1. *Suppose that $\mu(z)$ can be represented in the form*

$$\mu(z) = (1 + \tilde{M}(z)\rho(d_E(z)))\, \mathrm{e}^{2i\theta(z)},$$

where: 1) *function $\rho(t)$ is continuous on $[0, +\infty)$, and $\rho(0) = 0$ and $\rho(t) > 0$ for $t \neq 0$;*

2) *function $\theta(z) \in \mathrm{C}^{(1)}(D)$ is such that everywhere on E*

$$dz + \mathrm{e}^{2i\theta(z)}\, \overline{dz} \neq 0,$$

at dz tangential to E;

3) *complex-valued function $\tilde{M}(z)$ is measurable and almost everywhere in D*

$$\frac{1}{R} \leq |\mathrm{Re}\, \tilde{M}(z)| \leq R, \quad |\mathrm{Im}\, \tilde{M}(z)| \leq R \quad (R \equiv \mathrm{const}).$$

Then in some neighborhood of $O(E)$, there exists an solution with a singularity E of the equation associated with the (*).

Theorem 2. *Suppose that* 1) *$H(z) \in \mathrm{C}^1(D)$, $\nabla H(z) \neq 0$ in D and E defined by the equation $H(z) = 0$;* 2) *the function $\mu(z)$ can be written as:*

$$\mu(z) = \frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}} + M^*(z)\rho(|H(z)|),$$

where: 1) *the function $\rho(t)$ is continuous on $[0, +\infty)$;* 2) *$\rho(0) = 0$ and $\rho(t) >$ > 0 for $t \neq 0$, and $\frac{1}{\rho(t)}$ has an integrable singularity at zero;* 3) *$M^*(z)$ is complex-valued measurable function in D, and*

$$\left|\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{\nabla H(z)}}{\nabla H(z)} M^*(z)\right)\right| \geq \frac{1}{C_1}, \quad |M^*(z)| \leq C_2 \quad (C_1,\ C_2 \equiv \mathrm{const}).$$

Then in some neighborhood of $O(E)$, there exists an solution with a singularity E of the equation associated with the (*).

Corollary. *Assume that*

$$\mu(z) = \frac{\nabla d_E(z)}{\overline{\nabla d_E(z)}} + M^*(z)\rho(d_E(z)),$$

where: 1) *the function $\rho(t)$ is continuous on $[0, +\infty)$;* 2) $\rho(0) = 0$ *and* $\rho(t) > 0$ *for* $t \neq 0$, *and* $\frac{1}{\rho(t)}$ *has an integrable singularity at zero;* 3) $M^*(z)$ *is complex-valued measurable function in D, and*

$$\left|\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{\nabla d_E(z)}}{\nabla d_E(z)} M^*(z)\right)\right| \geq \frac{1}{C_1}, \quad |M^*(z)| \leq C_2 \quad (C_1,\ C_2 \equiv \mathrm{const}).$$

Then in some neighborhood of $O(E)$, there exists an solution with a singularity E of the equation associated with the (*).

Key words: degenerate Beltrami equation, Beltrami equation of variable type, folds, solution with singularity, associated equation.