



**ТРУДЫ II МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ  
«ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ»**

УДК 517.933+531.383  
ББК 22.213

**ГРАНИЦА МНОЖЕСТВА УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ  
МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА**

**Батхин Александр Борисович**

Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник,  
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
batkhin@gmail.com  
Миусская пл., 4, 125047 г. Москва, Российская Федерация

**Аннотация.** Решается задача вычисления множества устойчивости положения равновесия одной гироскопической задачи, описываемой линейной системой Гамильтона с четырьмя степенями свободы и с пятью параметрами. Для ее решения эффективно применяются методы теории исключения и алгоритмы компьютерной алгебры. Показано, что граница множества устойчивости представляет собой линейчатую поверхность, направляющие которой движутся вдоль параболических сегментов.

**Ключевые слова:** система Гамильтона, положение равновесия, устойчивость, теория исключения, гироскопическая стабилизация.

**Введение**

Задача гироскопической стабилизации системы осесимметричных тяжелых тел находит многочисленные применения для различных технических устройств, в частности в различных моделях центрифуг. Важной частью этой задачи является анализ устойчивости положения равновесия статически неустойчивой системы.

В работе рассматривается некоторая модельная задача, интерес к которой вызван следующими причинами. Во-первых, изначально эта задача была решена численно для двух наборов значений параметров [13] и для нее высказывалось мнение, что полного аналитического решения она не допускает. Во-вторых, в процессе решения задачи

удалось не только получить аналитическое решение проблемы устойчивости в линейном приближении, но и предложить такое ее естественное обобщение, при котором более общая задача сводится к уже решенному частному случаю. В-третьих, для решения задачи были привлечены как хорошо известные методы теории исключений, так и системы компьютерной алгебры, позволяющие эффективно работать с громоздкими полиномиальными объектами. Разработаны и апробированы методы [7], реализованные в виде алгоритмов, которые, по-видимому, могут быть эффективно применены для решения целого класса задач гамильтоновой динамики.

Работа состоит из следующих разделов. В первой части формулируется задача в общей постановке, дается описание вывода уравнений движения и приводится линеаризация задачи в окрестности положения равновесия. Во второй части формулируется критерий устойчивости положения равновесия линейной системы Гамильтона и дается краткое описание методов теории исключений, применяемых в работе. В третьей части приводится вычисление множества устойчивости.

Результаты исследований докладывались на различных международных конференциях и научных семинарах. Данная статья является существенно переработанным вариантом препринта [2].

## 1. Постановка задачи и вывод уравнений

Рассматривается механическая система в поле силы тяжести, состоящая из осесимметричных тел, связанных между собой универсальными шарнирами Кардано — Гука (рис. 1). Центры каждого из шарниров находятся на осях симметрии соответствующих тел. Нижнее тело — невесомый стержень длиной  $l_1$  посредством шарнира прикреплен к оси ротора вертикально поставленного мотора, а верхний невесомый стержень длиной  $l_2$  жестко прикреплен к центру плоского диска массы  $m$  и диаметра  $d$ , перпендикулярно его плоскости. Ротор мотора вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  (рис. 2).

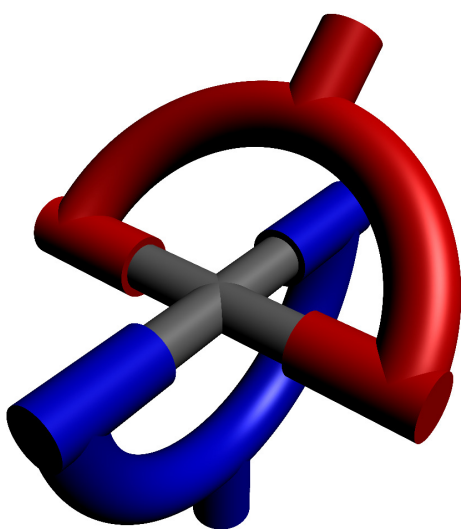


Рис. 1. Шарнир Кардано — Гука

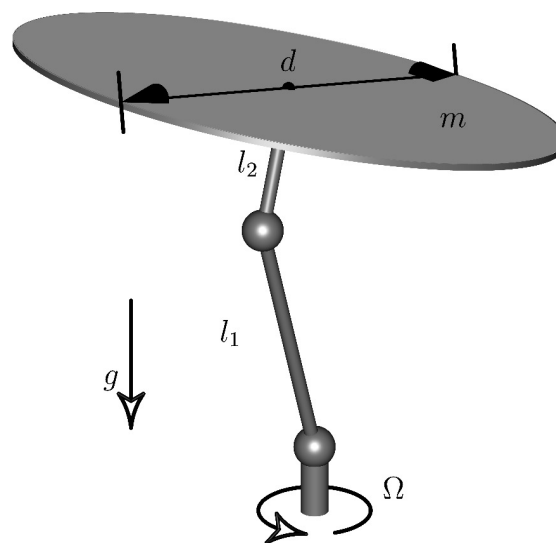


Рис. 2. Массивный диск, прикрепленный к ротору двигателя посредством упругих шарниров Кардано — Гука

**Задача.** Вычислить множество устойчивости для вертикального положения равновесия этой системы, то есть все те значения механических параметров системы, при которых вращение системы вблизи вертикальной оси устойчиво.

Данная задача является обобщением задачи, приведенной в [13, п. 7.8.2], где она формулировалась для фиксированных значений параметров  $l_1 = 2l$ ,  $l_2 = l$  и  $d = 4l$  и решалась численно в линейном приближении в окрестности двух особых точек в пространстве параметров. Отметим, что сама обобщенная задача является частным случаем более общей задачи исследования устойчивости вертикального вращения статически неуравновешенной системы гироскопов Лагранжа, соединенных универсальными шарнирами Кардано — Гука (см.: [1; 5]).

В частном случае задача решена в линейном приближении аналитически с использованием методов компьютерной алгебры (базисы Грёбнера) и методов степенной геометрии [4]. Там же сделаны попытки исследовать более общий вариант задачи и сформулированы некоторые предположения, которые в итоге и позволили получить аналитическое решение общей задачи в линейной постановке.

В [13] приведена без вывода квадратичная часть лагранжиана частной задачи. Сделаем следующие допущения:

- шарниры обладают жесткостью на изгиб и кручение, силы упругости в первом приближении описываются законом Гука;
- массы стержней и шарниров пренебрежимо малы;
- углы отклонения стержней от вертикали малы;
- длины стержней и диаметр массивного диска произвольны;

и схематично опишем получение полного лагранжиана системы, но приведем полные формулы только для его квадратичной части.

Введем неподвижную систему координат  $\xi\eta\zeta$ , начало которой находится в центре  $O_1$  нижнего шарнира Гука, а ось  $\zeta$  направлена вертикально вверх. Равномерно вращающаяся с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $\zeta$  систему обозначим через  $\xi_1\eta_1\zeta_1$ . Систему  $x_1y_1z_1$  с началом в  $O_1$  и осью  $z_1$ , направленной вдоль стержня, свяжем с нижним стержнем. Положение системы координат  $x_1y_1z_1$  относительно вращающейся системы  $\xi_1\eta_1\zeta_1$  зададим тремя углами Крылова (иногда называемыми углами Брайнта)  $\varphi_1$ ,  $\theta_1$  и  $\psi_1$  (рис. 3).

Поскольку переход от неподвижной системы  $\xi\eta\zeta$  к системе  $x_1y_1z_1$  задается последовательностью поворотов  $\xi\eta\zeta \xrightarrow{\Omega t} \xi_1\eta_1\zeta_1 \xrightarrow{\varphi_1} x'_1y'_1z'_1 \xrightarrow{\theta_1} x''_1y''_1z''_1 \xrightarrow{\psi_1} x_1y_1z_1$ , то вектор  $\omega_1$  угловой скорости нижнего стержня определяется по формуле

$$\omega_1 = A_3(-\psi_1) \cdot \left( A_2(-\theta_1) \cdot (A_1(-\varphi_1)\Omega + \dot{\varphi}_1) + \dot{\theta}_1 \right) + \dot{\psi}_1,$$

где  $A_i(\alpha)$  — матрица поворота относительно  $i$ -й оси на угол  $\alpha$ .

Аналогично вводится система координат  $\xi_2\eta_2\zeta_2$  с центром в верхнем шарнире и осями, параллельными осям системы  $x_1y_1z_1$ , а со вторым стержнем свяжем систему координат  $x_2y_2z_2$ , которая получается из системы  $\xi_2\eta_2\zeta_2$  последовательными поворотами на углы  $\varphi_2$ ,  $\theta_2$  и  $\psi_2$ . Тогда вектор угловой скорости  $\omega_2$  массивного диска определяется по формуле

$$\omega_2 = A_3(-\psi_2) \cdot \left( A_2(-\theta_2) \cdot (A_1(-\varphi_2)\omega_1 + \dot{\varphi}_2) + \dot{\theta}_2 \right) + \dot{\psi}_2.$$

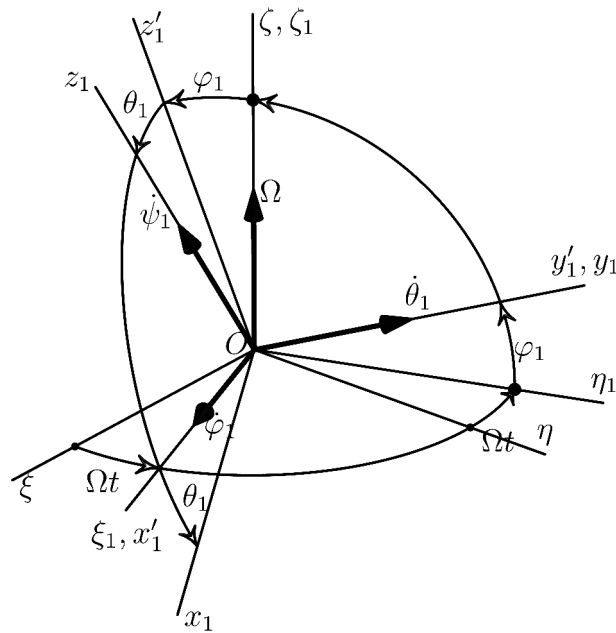


Рис. 3. Переход от неподвижной системы координат  $\xi\eta\zeta$  к системе  $x_1y_1z_1$ , связанной с нижним стержнем

Положение центра масс диска в неподвижной системе координат  $\xi\eta\zeta$  задается вектором

$$\mathbf{C} = A_3(\Omega t) \cdot A_1(\varphi_1) \cdot A_2(\theta_1) (l_1\mathbf{k} + A_1(\varphi_2) \cdot A_2(\theta_2) \cdot l_2\mathbf{k}).$$

Здесь  $l_1$  и  $l_2$  — длины нижнего и верхнего стержней соответственно.

Следуя [10], введем новые угловые переменные

$$\alpha_1 = \varphi_1, \quad \beta_1 = \theta_1, \quad \gamma_1 = \psi_1, \quad \alpha_2 = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \beta_2 = \theta_1 + \theta_2, \quad \gamma_2 = \psi_1 + \psi_2. \quad (1)$$

Для получения функции Лагранжа  $L = T - \Pi$  остается записать выражения кинетической и потенциальной энергии

$$T = \frac{m}{2} (\dot{C}_x^2 + \dot{C}_y^2 + \dot{C}_z^2) + \frac{A}{2} (\omega_{2x}^2 + \omega_{2y}^2) + \frac{B}{2} \omega_{2z}^2,$$

$$\Pi = mgC_z + \Pi_{\text{изгиб}} + \Pi_{\text{кручение}},$$

в новых координатах (1), а затем разложить функцию  $L$  в ряд Тейлора и ограничиться только квадратичными по переменным  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = 1, 2$  членами. Здесь  $A$  и  $B$  — главные моменты инерции диска, а  $\Pi_{\text{изгиб}}$  и  $\Pi_{\text{кручение}}$  — потенциальная энергия сил упругости изгибных и крутильных деформаций в шарнирах.

Отметим, что получающееся таким образом выражение функции Лагранжа  $L$  мо-

жет быть еще упрощено с учетом калибровочной инвариантности. В итоге имеем

$$\begin{aligned}
 L(\tilde{\mathbf{Y}}, \dot{\tilde{\mathbf{Y}}}) &= \frac{A}{2} \left( (\dot{\alpha}_2 - \Omega\beta_2)^2 + (\dot{\beta}_2 + \Omega\alpha_2)^2 \right) + \\
 &+ \frac{C}{2} \left( \Omega^2 (1 - \alpha_2^2 - \beta_2^2) + \Omega (\dot{\alpha}_2\beta_2 - \alpha_2\dot{\beta}_2) + \dot{\gamma}_2^2 \right) - \\
 &+ \frac{m}{2} \left( (l_1(\dot{\alpha}_1 - \Omega\beta_1) + l_2(\dot{\alpha}_2 - \Omega\beta_2))^2 + (l_1(\dot{\beta}_1 + \Omega\alpha_1) + l_2(\dot{\beta}_2 + \Omega\alpha_2))^2 \right) + \quad (2) \\
 &- mg \left( l_2 (1 - \alpha_2^2/2 - \beta_2^2/2) + l_1 (1 - \alpha_1^2/2 - \beta_1^2/2) \right) - \\
 &- \frac{\chi_1}{2} (\alpha_1^2 + \beta_1^2) - \frac{\chi_2}{2} ((\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2) - \frac{\chi'_1}{2} \gamma_1^2 - \frac{\chi'_2}{2} (\gamma_2 - \gamma_1)^2, \\
 \tilde{\mathbf{Y}} &= (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2),
 \end{aligned}$$

где  $l_1 = Kl$ ,  $l_2 = l$ ,  $A = md^2/4$  and  $C = md^2/2$ ,  $d = 4kl$ ,  $\chi_{1,2}$  и  $\chi'_{1,2}$  — коэффициенты жесткости на изгиб и кручение в шарнирах.

Уравнения Эйлера — Лагранжа расщепляются на 2 подсистемы. Одна подсистема исследуется тривиально, а другая в результате замены  $\tau = \Omega t$  преобразуется в гироскопическую систему с четырьмя степенями свободы  $M\mathbf{Y}'' + G\mathbf{Y}' + R\mathbf{Y} = 0$ , где  $\mathbf{Y} = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ ,  $\mathbf{Y}' = d\mathbf{Y}/d\tau$ ,  $M$  — симметричная положительно определенная матрица масс,  $G$  — кососимметричная матрица гироскопических сил,  $R$  — симметричная матрица потенциальных сил.

Преобразование Лежандра, примененное к функции Лагранжа (2), дает функцию Гамильтона  $H(\mathbf{Z})$  в виде квадратичной формы

$$H(\mathbf{Z}) = \frac{1}{2} \mathbf{Z}^T A \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z}' = J A \mathbf{Z}; \quad A = \begin{pmatrix} R - GM^{-1}G/4 & GM^{-1}/2 \\ -M^{-1}G/2 & M^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Матрицы, которые входят в выражение для матрицы  $A$ , имеют вид

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{pmatrix} \Delta(K^2) & \Delta(K) \\ \Delta(K) & \Delta(k^2 + 1) \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \varkappa(2K^2) & \varkappa(2K) \\ \varkappa(2K) & \varkappa(2) \end{pmatrix}, \\
 R &= \frac{1}{\tilde{\Omega}^2} \begin{pmatrix} \Delta(c_1 + c_2 - K) & \Delta(-c_2) \\ \Delta(-c_2) & \Delta(c_2 - 1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta(K^2) & \Delta(K) \\ \Delta(K) & \Delta(1 - k^2) \end{pmatrix}, \\
 \Delta(\xi) &= \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}, \quad \varkappa(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & -\xi \\ \xi & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

а безразмерные параметры  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\tilde{\Omega}$  выражаются через исходные параметры  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $m$ ,  $l$ ,  $g$  следующим образом:

$$c_1 = \frac{\chi_1}{mgl}, \quad c_2 = \frac{\chi_2}{mgl}, \quad \tilde{\Omega} = \Omega \sqrt{l/g}.$$

Область физических значений параметров — это положительный ортант

$$\Phi = \{c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad \tilde{\Omega} > 0, \quad k > 0, \quad K > 0\}.$$

Выполним следующую замену параметров:

$$p = \frac{c_1}{\tilde{\Omega}^2}, \quad q = \frac{c_2}{\tilde{\Omega}^2}, \quad r = \frac{2}{K\tilde{\Omega}^2},$$

которая приведет к тому, что элементы матрицы  $JA$  в (3) станут линейными функциями от параметров  $p, q, r$  и рациональными от параметров  $k$  и  $K$ :

$$JA = \begin{pmatrix} -\varkappa(1) & -\varkappa(1/K) & \Delta((k^2 + 1)/(k^2 K^2)) & -\Delta(1/(k^2 K)) \\ \Delta(0) & \Delta(0) & -\Delta(1/(k^2 K)) & \Delta(1/k^2) \\ \Delta(\gamma_1) & \Delta(Kq/2) & -\varkappa(1) & \Delta(0) \\ \Delta(Kq/2) & \Delta(\gamma_2) & -\varkappa(1/K) & \Delta(0) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $\gamma_1 = K(Kr - p - q)/2$ ,  $\gamma_2 = K(r - q)/2 - k^2$ .

Таким образом, вектор параметров задачи есть  $\mathbf{P} = (p, q, r, k, K)$ . Физические значения параметров образуют область  $\Phi : \mathbf{P} > 0$ .

## 2. Устойчивость положения равновесия линейной системы Гамильтона

Напомним критерий устойчивости по Ляпунову положения равновесия линейной системы Гамильтоновой

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = JA(\mathbf{P})\mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})^T, \quad \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

где  $J$  — симплектическая единица,  $A(\mathbf{P})$  — вещественная постоянная симметричная матрица, элементы которой зависят от вектора вещественных параметров  $\mathbf{P} \in \Pi$ ,  $\mathbf{X}$  — канонические координаты, а  $\mathbf{Y}$  — сопряженные им импульсы.

**Определение 1.** Множество устойчивости  $\Sigma$  системы (5) — это множество значений параметров  $\mathbf{P} \in \Pi$ , для которых стационарное решение  $\mathbf{Z} = 0$  системы (5) устойчиво по Ляпунову.

Общая схема вычисления множества устойчивости положения равновесия многопараметрической гамильтоновой системы в линейном приближении дана в [4, п. 2.6]. Основная идея этой схемы заключается в том, что большая часть этапов вычисления проводится не с матрицей  $JA(\mathbf{P})$ , а с ее характеристическим многочленом

$$\check{f}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{2n} \check{f}_j(\mathbf{P})\lambda^j, \quad \check{f}_{2n} = 1, \quad (6)$$

который в силу симплектичности матрицы  $JA(\mathbf{P})$  содержит только четные степени  $\lambda$ . Поэтому в дальнейшем для вычислений используется многочлен от  $\mu = \lambda^2$

$$f(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n f_k(\mathbf{P})\mu^k, \quad f_n = 1, \quad f_j = \check{f}_{2j}, \quad (7)$$

называемый *полухарактеристическим*.

Напомним критерий устойчивости положения равновесия линейной гамильтоновой системы (см., например, [14] или [4, п. 2.1]).

**Теорема 1.** Положение равновесия  $\mathbf{Z} = 0$  линейной гамильтоновой системы (5) устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда

- 1) все корни  $\mu_k$  полухарактеристического многочлена (7) вещественны и неположительны;

2) все элементарные делители матрицы  $JA$  просты.

Граница  $\partial\Sigma$  множества устойчивости состоит из частей двух гиперповерхностей в пространстве параметров

$$F_0 = \{\mathbf{P} : f_0(\mathbf{P}) = 0\} \quad \text{и} \quad F_2 = \{\mathbf{P} : D(f) = 0\},$$

где  $D(f)$  — дискриминант многочлена  $f(\mu)$ , он отличается от результата многочленов  $f(\mu)$  и  $f'(\mu)$  множителем  $(-1)^{m(m-1)/2}$  ([12, гл. XI, § 53]).

В случае рассматриваемой задачи многообразие  $F_0$  не может являться границей множества устойчивости в силу следующего утверждения и его следствия.

**Утверждение 1.** *Если в (3) матрицы  $M$  и  $R$  симметричные  $2 \times 2$ -блочно-скалярные и при этом матрица  $M$  невырожденная, то определитель матрицы  $A$  есть полный квадрат, то есть принимает только неотрицательные значения.*

**Доказательство.** Поскольку матрица  $A$  в формуле (3)  $2 \times 2$ -блочная, тогда согласно формулам Шура (см. [8, Гл. II, § 5, п. 3])

$$\det A = \det (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \cdot \det A_{22}, \quad (8)$$

где  $A_{ij}$  — квадратные блоки матрицы  $A$ . Подставляя вместо блоков  $A_{ij}$  соответствующие матрицы, получаем

$$\det A = \det \left( R - \frac{1}{4}GM^{-1}G + \frac{1}{4}GM^{-1}MM^{-1}G \right) \cdot \det M^{-1} = \det R \cdot \det M^{-1}.$$

Поскольку матрицы  $R$  и  $M$   $2 \times 2$ -блочно-скалярные, то блоки  $R_{ij}$  коммутируют между собой, а тогда из (8) следует, что  $\det R = \det \tilde{R}$ , где  $\tilde{R} \equiv R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21}$ . Но поскольку блоки  $R_{ij}$  есть  $2 \times 2$ -скалярные матрицы, то матрица  $\tilde{R}$  также будет  $2 \times 2$ -скалярной с определителем, равным квадрату диагонального элемента. Аналогичные рассуждения применимы и к матрице  $M$ , а также к обратной к ней  $M^{-1}$ . Следовательно, определитель матрицы  $A$  является полным квадратом, поскольку равен произведению квадратов диагональных элементов матриц  $\tilde{R}$  и  $\tilde{M}^{-1}$ , где  $\tilde{M} = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}$ .

**Следствие 1.** *Если матрицы  $R$  и  $M$  удовлетворяют условию утверждения 1, то критическим множеством, на котором может происходить изменение устойчивости стационарного решения системы (5), является только множество  $F_2$ .*

Таким образом, вычисление границы множества устойчивости сводится к исследованию гиперповерхности  $F_2$ .

Для исследования многообразия  $F_2$  профессором А.Д. Брюно было предложено вычислить вначале ее особые точки, а затем, используя их, построить такое преобразование пространства параметров  $\Pi$ , которое позволит упростить вид полухарактеристического многочлена  $f(\mu)$ .

**Определение 2.** Пусть  $\varphi(P)$  — некоторый многочлен. Точка  $P = P^0$  множества  $\varphi(P) = 0$  называется особой точкой  $k$ -го порядка, если в этой точке обращаются в нуль все частные производные многочлена  $\varphi(P)$  по  $p_1, \dots, p_n$  до  $k$ -го порядка включительно и не обращается в нуль хотя бы одна частная производная порядка  $k + 1$ .



Отметим, что особые точки гиперповерхности  $F_2$  связаны с кратностью корней полухарактеристического многочлена  $f(\mu)$ , а именно, в особых точках многочлен  $f(\mu)$  имеет корни с кратностью больше 2. Это либо точки, в которых кратность корня равна 4, либо кратность корня равна 3, либо имеется пара двукратных корней. Условия кратности корней многочлена формулируются в терминах субдискриминантов многочлена  $f(\mu)$ . Укажем эти условия для многочлена  $f(\mu)$  четвертой степени. Строгое доказательство указанной выше связи может быть проведено средствами компьютерной алгебры, но выходит за рамки данной работы. С вычислительной точки зрения использование теории исключений приводит к менее трудоемким вычислениям, чем вычисление особых точек по определению 2.

Пусть имеем многочлен четвертой степени

$$f(\mu) = \mu^4 + f_3\mu^3 + f_2\mu^2 + f_1\mu + f_0,$$

тогда матрица Сильвестра многочленов  $f(\mu)$  и  $f'(\mu)$  есть

$$\text{Syl}(f, f') = \begin{pmatrix} 1 & f_3 & f_2 & f_1 & f_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f_3 & f_2 & f_1 & f_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & f_3 & f_2 & f_1 & f_0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3f_3 & 2f_2 & f_1 \\ 0 & 0 & 4 & 3f_3 & 2f_2 & f_1 & 0 \\ 0 & 4 & 3f_3 & 2f_2 & f_1 & 0 & 0 \\ 4 & 3f_3 & 2f_2 & f_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Ее определитель равен с точностью до знака дискриминанту  $D(f)$  многочлена  $f(\mu)$ .

**Определение 3.** Определитель матрицы, получающийся из матрицы Сильвестра (9) вычеркиванием первых  $k$  и последних  $k$  строк и первых  $k$  и последних  $k$  столбцов ( $k < 4$ ), называется  $k$ -м субдискриминантом дискриминанта  $D(f)$  и обозначается  $D^{(k)}(f)$ . При  $k = 0$  имеем сам дискриминант многочлена  $f(\mu)$ :  $D^{(0)}(f) \equiv D(f)$ .

Легко видеть, что  $k$ -й субдискриминант многочлена есть ни что иное как определитель  $k$ -го иннора матрицы (9) (см.: [9, гл. 1]).

Поскольку матрица Сильвестра для многочлена степени  $m$  является квадратной  $(2m - 1) \times (2m - 1)$  матрицей, то такой многочлен имеет ровно  $m - 1$  нетривиальный субдискриминант. Для матрицы (9) они равны

$$\begin{aligned} D(f) &= -27f_3^4f_0^2 + 18f_3^3f_2f_1f_0 - 4f_3^3f_1^3 - 4f_3^2f_2^3f_0 + f_3^2f_2^2f_1^2 + \\ &+ 144f_3^2f_2f_0^2 - 6f_3^2f_1^2f_0 - 80f_3f_2^2f_1f_0 + 18f_3f_2f_1^3 + 16f_2^4f_0 - \\ &- 4f_2^3f_1^2 - 192f_3f_1f_0^2 - 128f_2^2f_0^2 + 144f_2f_1^2f_0 - 27f_1^4 + 256f_0^3, \\ D^{(1)}(f) &= -6f_3^3f_1 + 2f_3^2f_2^2 - 12f_3^2f_0 + 28f_3f_2f_1 - 8f_2^3 + 32f_2f_0 - 36f_1^2, \\ D^{(2)}(f) &= 3f_3^2 - 8f_2. \end{aligned}$$

**Теорема 2.** Для того чтобы многочлен  $f(\mu)$  имел  $d$  кратных корней, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\underbrace{D^{(0)}(f) = \dots = D^{(d-1)}(f)}_d = 0, \quad D^{(d)}(f) \neq 0,$$



при этом кратные корни многочлена  $f(\mu)$  есть корни многочлена, который выражается через матрицу Сильвестра (9) следующим образом:

$$\text{НОД}(f, f') = D^{(d)}\mu^d + \det M_d^{(1)}\mu^{d-1} + \dots + \det M_d^{(d)}, \quad (10)$$

где матрица  $M_d^{(j)}$  есть  $d$ -й иннор матрицы, получаемой из матрицы (9) заменой  $d + 1$ -го справа столбца на ее же  $j$ -й справа столбец.

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из доказательства теоремы 3.3 в [11], которая обеспечивает существование  $d$ -кратных корней двух произвольных многочленов.

Для многочлена четвертого порядка можно явно выписать условия на его коэффициенты, при которых он будет иметь либо единственный корень кратности 4, либо пару корней кратности 3 и 1, либо пару двукратных корней. Приведем эти условия здесь, поскольку они используются в дальнейших вычислениях.

Согласно теореме 2 корень кратности 4 многочлена  $f(\mu)$  обеспечивается условиями  $D^{(0)}(f) = D^{(1)}(f) = D^{(2)}(f) = 0$ , которые в коэффициентах многочлена  $f(\mu)$  записываются в виде системы

$$f_3^4 - 256f_0 = 0, \quad f_3^3 - 16f_1 = 0, \quad 3f_3^2 - 8f_2 = 0, \quad (11)$$

а корень кратности 4 равен  $\mu_{1,2,3,4} = -f_3/4$ .

Пусть нулевой и первый субдискриминанты равны нулю (то есть  $d = 2$ ), тогда многочлен (10) есть квадратный трехчлен вида

$$H(\mu) \equiv D^{(2)}(f)\mu^2 + 2(f_3f_2 - 6f_1)\mu + f_3f_1 - 16f_0. \quad (12)$$

Если дискриминант квадратного трехчлена (12) не равен нулю, тогда многочлен  $H(\mu)$  имеет два различных корня, а многочлен  $f(\mu)$  имеет соответственно пару корней кратности 2. В этом случае коэффициенты многочлена  $f(\mu)$  удовлетворяют системе

$$f_3^3 - 8f_3^2f_2 + 16f_2^2 - 64f_0 = 0, \quad f_3^3 - 4f_3f_2 + 8f_1 = 0,$$

а пара двукратных корней есть

$$\mu_{1,2} = -\left(f_3 + \sqrt{D^{(2)}(f)}\right)/4, \quad \mu_{3,4} = -\left(f_3 - \sqrt{D^{(2)}(f)}\right)/4. \quad (13)$$

Если  $D(H) = 0$ , тогда многочлен  $H(\mu)$  имеет один корень кратности 2, а многочлен  $f(\mu)$  имеет соответственно корни кратности 3 и 1. В этом случае коэффициенты многочлена  $f(\mu)$  удовлетворяют системе

$$3f_3f_1 - f_2^2 - 12f_0 = 0, \quad 27[8f_1 - f_3(-f_3^2 + 4f_2)]^2 + D^{(2)}(f)^3 = 0,$$

а корни суть

$$\mu_{1,2,3} = -f_3/4 + \sqrt{3D^{(2)}(f)^3}/12, \quad \mu_4 = -f_3/4 - \sqrt{3D^{(2)}(f)^3}/4. \quad (14)$$

Отметим, что условие  $D^{(2)}(f) \geq 0$  гарантирует вещественность, а при дополнительных условиях  $f_i \geq 0$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  и неположительность корней многочлена  $f(\mu)$ . При

условии  $D^{(2)}(f) = 0$  корни с различной кратностью в (13) и (14) становятся корнем кратности 4.

Наконец, если лишь  $D(f) = 0$ , то корень кратности 2 находится по формуле

$$\mu_{1,2} = -\det M_1^{(1)}/D^{(1)}(f),$$

где

$$\det M_1^{(1)} = -9f_3^3 f_0 + f_3^2 f_2 f_0 + 32f_3 f_2 f_0 + 3f_3 f_1^2 - 4f_2^2 f_1 - 48f_1 f_0.$$

Два других корня многочлена  $f(\mu)$  удовлетворяют уравнению

$$\mu^2 + (f_3 + 2\mu_{1,2})\mu + f_2 + 2f_3\mu_{1,2} + 3\mu_{1,2}^2 = 0.$$

Пункт 1) теоремы 1 для линейных гамильтоновых систем с числом степеней свободы  $m < 4$  переформулируется в виде явных условий на коэффициенты и дискриминант полухарактеристического многочлена (7) (см. теорему 2.2 в [4]). Для случая  $m \geq 4$  пункт 1) теоремы 1 конструктивно формулируется в виде условий на коэффициенты и субдискриминанты многочлена (7).

**Утверждение 2.** Для того чтобы все корни многочлена (7) степени  $m \geq 4$  были неположительны, необходимо и достаточно выполнения условий

$$f_i(P) \geq 0, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad D^{(k)}(f) \geq 0, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

### 3. Вычисление множества устойчивости

Вернемся к исследованию многообразия  $F_2$ . Дискриминант полухарактеристического многочлена (7) матрицы (4) имеет вид

$$D(f) = l(\mathbf{P})^4 g(\mathbf{P}) / (4k^{14} K^9),$$

где  $l(\mathbf{P}) = -Kr + (K+1)q + p$ , а  $g(\mathbf{P})$  есть многочлен 5-го порядка по переменным  $p$  и  $q$ , 6-го по  $r$  и 10-го по  $k$  и  $K$ . Здесь его выражение не приводится из-за его громоздкости (многочлен содержит 976 слагаемых), но может быть легко получено из (4) с помощью любой системы компьютерной алгебры.

Для того чтобы упростить интерпретацию получаемых объектов, будем рассматривать полиномы в 3-мерном пространстве  $\Pi'$  параметров  $\mathbf{P}' = (p, q, r)$ , считая, что два оставшихся параметра  $k$  и  $K$  принимают фиксированные положительные значения.

Таким образом гиперповерхность  $F_2$  в пространстве  $\Pi'$  представляет собой объединение множеств  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{G}$ , где

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{P}' : l(\mathbf{P}') = 0\}, \quad \mathcal{G} = \{\mathbf{P}' : g(\mathbf{P}') = 0\}.$$

Множество  $\mathcal{L}$  — плоскость в пространстве  $\Pi'$  играет важную роль в вычислении корней кратности 3 многочлена (7), но самостоятельного интереса не представляет, поскольку, как будет показано ниже, на  $\mathcal{L}$  множество устойчивости  $\Sigma_{\mathcal{L}}$  лежит в множестве устойчивости  $\Sigma$ .

В [4] показано, что структура множества  $\mathcal{G}$  связана с условиями кратности корней полухарактеристического многочлена  $f(\mu)$  следующим образом:

- 1) в особых точках 2-го порядка множества  $\mathcal{G}$  многочлен  $f(\mu)$  имеет либо нулевой корень кратности 3, либо один ненулевой корень кратности 4;
- 2) в особых точках 1-го порядка множества  $\mathcal{G}$  многочлен  $f(\mu)$  имеет либо корень кратности 3, либо пару двукратных корней;
- 3) в точках множества  $\mathcal{G}$  многочлен  $f(\mu)$  имеет по крайней мере один корень кратности не ниже 2.

Начнем с определения параметров, при которых многочлен  $f(\mu)$  имеет нулевой корень кратности 3. Свободный член  $f_0$  полинома (7) равен определителю матрицы (4) и, в силу утверждения 1, является полным квадратом величины

$$f_{00} = \frac{K}{4} (-K^2 r^2 + K(K+1)rq + Krp - Kqp - 2K(K - k^2 + 1)r + 2((K+1)^2 - k^2)q - 2(k^2 - 1)p + 4Kk^2).$$

При фиксированных значениях параметров  $k$  и  $K$  уравнение  $f_{00}(\mathbf{P}') = 0$  задает конус в пространстве параметров  $\mathbf{P}'$  с центром в точке

$$P_0 : [p = 2k^2, q = -2, r = -2(K - k^2 + 1)/K].$$

Подставляя  $P_0$  в многочлен  $f(\mu)$ , получаем корни  $\mu_{1,2,3} = 0, \mu_4 = -4$ .

Корень кратности 4 многочлен  $f(\mu)$  имеет в особых точках 2-го порядка, а коэффициенты многочлена удовлетворяют в этом случае системе (11). Эта система имеет следующие корни:

$$\begin{aligned} P_1 : [p = 0, q = 0, r = 0], \\ P_2 : \left[ p = \frac{k}{2} (5k + K + 1), q = k + \frac{1}{2}, r = \frac{5k^2 + 2Kk + 4k + K + 1}{2K} \right], \\ P_3 : \left[ p = \frac{k}{2} (5k - K - 1), q = -k + \frac{1}{2}, r = \frac{5k^2 - 2Kk - 4k + K + 1}{2K} \right]. \end{aligned}$$

В точке  $P_1$  многочлен  $f(\mu)$  имеет четырехкратный корень  $\mu_{1,2,3,4} = -1$ , а в точках  $P_{2,3}$  — четырехкратный корень  $\mu_{1,2,3,4} = -1/4$ .

Отметим, что в точках  $P_i, i = 0, \dots, 3$  собственные числа матрицы  $JA$  не зависят от параметров  $k$  и  $K$ .

Для построения упрощающего преобразования в [4] были использованы еще две особые точки — вершины двух параболических сегментов, каждый из которых есть часть однопараметрического семейства точек первого порядка.

Первый сегмент принадлежит семейству  $\mathcal{P}_1$ , лежит в плоскости  $\mathcal{L}$  и проходит через точки  $P_0$  и  $P_1$ . На  $\mathcal{P}_1$  многочлен  $f(\mu)$  имеет корень кратности 3. Параметрическое представление семейства  $\mathcal{P}_1$  задается формулами

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} p = -k^2(t^2 + 2t - 3)/2, \\ q = -(t-1)^2/2, \\ r = -\frac{(K + k^2 + 1)t^2 - 2(k^2 - K + 1)t + K - 3k^2 + 1}{2K}. \end{cases}$$

Вершина этой параболы есть точка при  $t = 0$

$$P_4 : [p = 3k^2/2, \quad q = -1/2, \quad r = -(K - 3k^2 + 1)/(2K)].$$

Вдоль семейства  $\mathcal{P}_1$  корни многочлена  $f(\mu)$  равны  $\mu_{1,2,3} = -(t+1)^2/4$ ,  $\mu_4 = -(t-3)^2/4$ .

Второй сегмент принадлежит семейству  $\mathcal{P}_2$ , который проходит через точки  $P_2$  и  $P_3$ . Оно вычисляется при решении системы (11) и имеет параметрическое представление

$$\mathcal{P}_2 : \begin{cases} p = k^2v^2/2 + k(K+1)v + 2k^2, \\ q = v^2/2 + kv, \\ r = -((K+k^2+1)v^2 + 2k(K+2k)v + 4k^2)/(2K). \end{cases}$$

Вершина этой параболы есть точка при  $v = 0$

$$P_5 : [p = 2k^2, \quad q = 0, \quad r = 2k^2/K].$$

Вдоль семейства  $\mathcal{P}_2$  корни многочлена  $f(\mu)$  равны  $\mu_{1,2(3,4)} = (v^2 - 2)/4 \pm \sqrt{1 - v^2}/2$ .

Шесть найденных особых точек  $P_i$ ,  $i = 0, \dots, 5$  позволяют определить преобразование пространства параметров  $\Pi$ , упрощающее многочлен  $f(\mu)$ . Идея такой замены была высказана еще в [4, п. 3.7], но была реализована лишь частично. Эта замена переводит плоскости  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{M}$ , в которых лежат семейства  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  соответственно, в координатные плоскости, а точку, лежащую на середине отрезка  $P_4P_5$ , переводит в начало координат новой системы. Такое преобразование имеет вид

$$\mathbf{Q} = B\mathbf{P}' + \overrightarrow{P_4P_5}/2, \quad (15)$$

где  $B$  — матрица, столбцы которой есть векторы  $\overrightarrow{P_0P_1}/2$ ,  $\overrightarrow{P_2P_3}/2$  и  $\overrightarrow{P_4P_5}/2$ :

$$B = \begin{pmatrix} k^2 & k(K+1) & k^2/4 \\ -1 & k & 1/4 \\ \frac{k^2 - K - 1}{K} & \frac{k(K+2)}{K} & \frac{k^2 + K + 1}{4K} \end{pmatrix},$$

а  $\mathbf{Q} = (U, V, W)$  — вектор новых параметров. Тогда в новых переменных коэффициенты многочлена  $f(\mu)$  существенно упрощаются:

$$\begin{aligned} f_3 &= (5 - W)/2, \\ f_2 &= -U^2/2 - V^2/2 + 3W^2/32 - 3U - 7W/16 + 43/32, \\ f_1 &= U^2W/8 + V^2W/8 - W^3/128 + 11U^2/8 + UW/4 + \\ &\quad + 3V^2/8 - W^2/128 - 5U/4 - 27W/128 + 29/128, \\ f_{00} &= -U^2/4 + V^2/4 - W^2/64 - U/2 - 3W/32 + 7/64, \quad f_0 = f_{00}^2. \end{aligned}$$

Дискриминант  $D(f)$  зависит лишь от параметров  $(U, V, W)$ , а множитель  $g(\mathbf{Q})$  имеет вид

$$\begin{aligned} g(\mathbf{Q}) &= 64U^6 + 192U^4V^2 - 4U^4W^2 + 192U^2V^4 - 8U^2V^2W^2 + \\ &\quad + 64V^6 - 4V^4W^2 + 72U^4W - 4U^2W^3 - 72V^4W + 4V^2W^3 + \\ &\quad + 60U^4 - 312U^2V^2 + 20U^2W^2 + 60V^4 + 20V^2W^2 - W^4 + \\ &\quad + 36U^2W - 36V^2W + 12U^2 + 12V^2 + 2W^2 - 1. \end{aligned}$$

Отметим, что в новых переменных многочлен  $g(\mathbf{Q})$  содержит переменные  $U$  и  $V$  только в четных степенях, следовательно он инвариантен при замене знаков у переменных  $U$  и  $V$ . Более того, если переменные  $U$  и  $V$  поменять местами, а знак переменной  $W$  заменить на противоположный, то многочлен  $g(\mathbf{Q})$  не изменится. Следовательно, достаточно исследовать нули многочлена  $g(\mathbf{Q})$  в одном октанте, например, для  $\mathbf{Q} \geq 0$ .

Поскольку упрощающее преобразование (15) линейное невырожденное, то топологическая структура особых точек гиперповерхности  $F_2$  остается неизменной, а независимость полухарактеристического многочлена  $f(\mu)$  после преобразования (15) от параметров  $k$  и  $K$  позволяет утверждать, что все результаты, полученные в новых параметрах  $\mathbf{Q}$ , верны и для любых значений параметров  $k > 0$ ,  $K > 0$ .

Множество  $\mathcal{G}$  состоит из двумерной компоненты  $\tilde{\mathcal{G}}$  и четырех одномерных компонент. Компонента  $\tilde{\mathcal{G}}$  является линейчатой поверхностью с параметризацией

$$U = u \sin \varphi, \quad V = (u + 1) \cos \varphi, \quad W = 4u + 2 \cos^2 \varphi + 1. \quad (16)$$

Образующие линейчатой поверхности  $\tilde{\mathcal{G}}$  пересекаются с семействами  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  только в точках параболических сегментов, заключенных между  $P_0$  и  $P_1$  для семейства  $\mathcal{P}_1$  и между  $P_2$  и  $P_3$  для семейства  $\mathcal{P}_2$ . Будем обозначать эти сегменты  $\mathcal{P}_1^0$  и  $\mathcal{P}_2^0$ , соответственно, а их параметрическое представление задается формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1^0 : [V = 0, \quad W = -2U^2 - 1], \quad -1 \leq U \leq 1, \\ \mathcal{P}_2^0 : [U = 0, \quad W = 2V^2 + 1]. \quad -1 \leq V \leq 1. \end{aligned}$$

Семейство образующих имеет огибающую

$$\mathcal{F} : U = -\sin^3 \varphi, \quad V = \cos^3 \varphi, \quad W = 3 \cos 2\varphi.$$

При изменении параметра  $\varphi$  образующие поверхности  $\tilde{\mathcal{G}}$  движутся вдоль параболических сегментов  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ , проходя последовательно через точки  $P_i$ ,  $i = 0, \dots, 5$ . С учетом параметризации (16) корни полухарактеристического многочлена  $f(\mu)$  на поверхности  $\tilde{\mathcal{G}}$  равны

$$\mu_{1,2} = -(1 + \sin \varphi)^2 / 4, \quad \mu_{3,4} = u \pm (1 - \sin \varphi) \sqrt{-u} - \cos^2 \varphi / 4.$$

Из выражения для  $\mu_{3,4}$  следует, что эта пара корней вещественна и отрицательна при  $u \leq 0$ .

Поверхность  $\tilde{\mathcal{G}}$  можно представить себе в виде однополостного гиперboloида с двумя склейками. Одна склейка выполнена вдоль параболического сегмента  $\mathcal{P}_1^0$  и расположена на уровне  $u = -1$ , другая — вдоль параболического сегмента  $\mathcal{P}_2^0$  и расположена на уровне  $u = 0$ . Склейки повернуты на  $90^\circ$  относительно друг друга. На рисунке 4 показана линейчатая поверхность  $\tilde{\mathcal{G}}$  вместе с семействами особых точек  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  (сплошная линия) и  $\mathcal{F}$  (пунктирная линия). Отмечены также особые точки  $P_i$ ,  $i = 0, \dots, 5$ .

Линейчатая поверхность  $\tilde{\mathcal{G}}$  делит пространство параметров  $\mathbf{Q}$  на четыре области  $S_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , в каждой из которых полухарактеристический многочлен  $f(\mu)$  имеет набор корней определенной структуры. Для выяснения, принадлежит ли область множеству устойчивости  $\Sigma$ , достаточно выбрать одну внутреннюю точку области и вычислить корни многочлена  $f(\mu)$  в ней. В областях  $S_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  многочлен  $g(\mathbf{Q}) \geq 0$ , а в области  $S_0$  многочлен  $g(\mathbf{Q}) < 0$ .

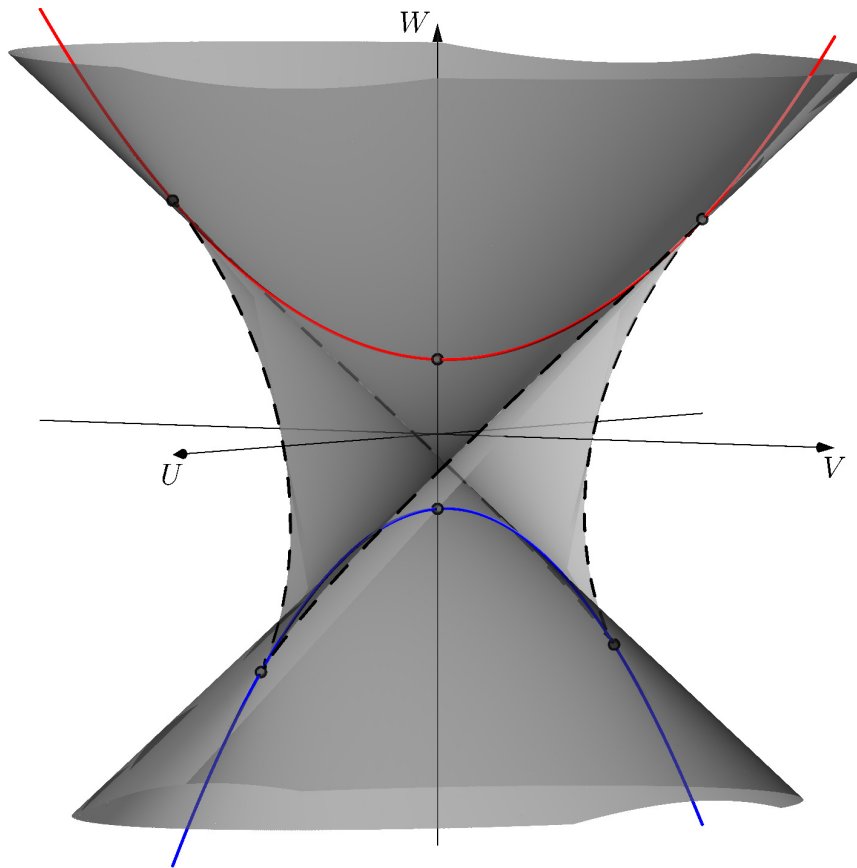


Рис. 4. Поверхность  $\tilde{\mathcal{G}}$  с семействами  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{F}$  и особыми точками  $P_i$ ,  $i = 0, \dots, 5$

**Область  $S_1$**  выделяется поверхностью  $\tilde{\mathcal{G}}$  при значении  $u > 0$  и содержит две ветви параболы  $\mathcal{P}_2$ . В точках  $S_1$  многочлен  $f(\mu)$  имеет две пары комплексных корней, следовательно, эта область не входит в множество устойчивости  $\Sigma$ .

**Область  $S_2$**  — криволинейный тетраэдр, натянутый на сегменты  $\mathcal{P}_1^0$ ,  $\mathcal{P}_2^0$  и кривую  $\mathcal{F}$ . Его поверхность соответствует значениям параметра  $-1 < u < 0$ . В точках области  $S_2$  многочлен  $f(\mu)$  имеет вещественные корни.

**Область  $S_3$**  выделяется поверхностью  $\tilde{\mathcal{G}}$  при значении  $u < -1$  и содержит две ветви параболы  $\mathcal{P}_1$ . В точках области  $S_3$  многочлен  $f(\mu)$  имеет вещественные корни.

**Область  $S_0 = \Pi' \setminus (S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \tilde{\mathcal{G}})$**  — дополнение пространства параметров  $\Pi'$ . В точках области  $S_0$  многочлен  $f(\mu)$  имеет пару вещественных и пару комплексных корней, следовательно, эта область не входит в множество устойчивости  $\Sigma$ .

Непосредственная проверка показывает, что для всех точек областей  $S_2$  и  $S_3$  выполнены условия утверждения 2, следовательно, в этих точках многочлен  $f(\mu)$  имеет неположительные корни.

Осталось проверить условие 2) теоремы 1 для тех точек областей  $S_2$  и  $S_3$ , в которых многочлен  $f(\mu)$  имеет нулевые и кратные корни. Как показано в [4, п. 2.5], для проверки простоты элементарных делителей матрицы  $JA$  достаточно вычислить ранг

вспомогательной матрицы  $M_A(\mu) \equiv JA - \sqrt{\mu}E$  для случаев, когда корень  $\mu$  либо нулевой (тогда у исходного характеристического многочлена (6) нулевой корень имеет кратность не менее 2), либо кратный отрицательный. Здесь  $E$  — единичная матрица.

**Утверждение 3.** Пусть  $\mu$  — корень полухарактеристического многочлена  $f(\mu)$  кратности  $k$ . Все элементарные делители матрицы  $JA$ , соответствующие этому корню, просты тогда и только тогда, когда

$$\text{rang } M_A(\mu) = \begin{cases} 2m - 2k, & \text{при } \mu = 0, \\ 2m - k, & \text{при } \mu < 0. \end{cases}$$

Проверка простоты элементарных делителей в точках гиперповерхностей  $F_0$  (для случая нулевых корней) и  $F_2$  (для случая кратных корней) дает следующее утверждение.

**Утверждение 4.** Матрица  $JA$  на гиперповерхности  $F_0$  имеет простые элементарные делители всюду, кроме прямой  $C_1$ , которая есть прямая касания гиперповерхностей  $F_0$  и  $F_2$ . На границе множества устойчивости  $\Sigma$ , задаваемой частью гиперповерхности  $\tilde{G}$ , элементарные делители матрицы  $JA$  непростые всюду, кроме сегмента  $\mathcal{P}_1^0$ .

Теперь можно сформулировать итоговое утверждение, позволяющее конструктивно описать множество устойчивости задачи.

**Утверждение 5.** Множество устойчивости задачи есть  $S_2 \cup S_3 \cup \mathcal{P}_1^0$ , при этом множество  $S_2 \cup S_3$  задается системой неравенств

$$g(\mathbf{Q}) > 0, \quad D^{(1)}(f) > 0, \quad D^{(2)}(f) > 0$$

и показано на рисунке 5.

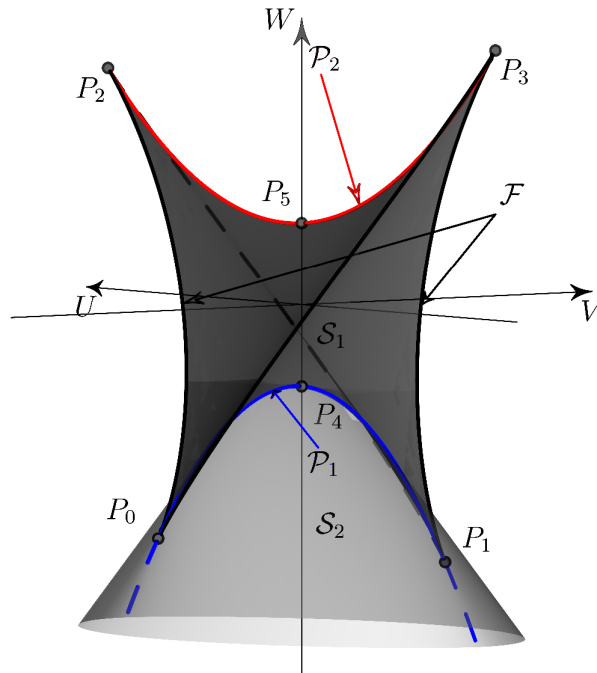


Рис. 5. Множество устойчивости в переменных  $(U, V, W)$ . Показаны особые точки  $P_i$ ,  $i = 0, \dots, 5$  и семейства  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{F}$



Для физических значений параметров множество устойчивости всегда состоит:

- из части  $\mathcal{S}_1$  в виде трехгранного клина, образованного участками сегмента  $\mathcal{P}_2$  и огибающей  $\mathcal{F}$ ;
- массивной подобласти части  $\mathcal{S}_2$ .

Вершина трехгранного клина — особая точка  $P_2$  задает наименьшее значение угловой скорости  $\Omega$  вращения ротора, при котором имеется устойчивость.

### Заключение

В работе рассмотрена линейная гамильтонова система, однако на самом деле исходная задача нелинейна и полное решение проблемы устойчивости положения равновесия возможно лишь с учетом нелинейных членов. В работе [3] выделена область в пространстве параметров, для которой применима теорема Лагранжа — Дирихле, но полное исследование требует вычисления нормальной формы функции Гамильтона в окрестности положения равновесия и применения соответствующих теорем о формальной устойчивости (см., например: [6; 15]).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барняк, М. А. К исследованию устойчивости вертикального вращения статически неуравновешенной системы шарнирно-связанных осесимметричных тел / М. А. Барняк, В. А. Стороженко // Изв. АН СССР. МТТ. — 1988. — Вып. 4. — С. 51–58.
2. Батхин, А. Б. Устойчивость одной многопараметрической системы Гамильтона / А. Б. Батхин // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. — 2011. — № 69. — С. 1–28.
3. Батхин, А. Б. Выделение областей устойчивости нелинейной системы Гамильтона / А. Б. Батхин // Автомат. и телемех. — 2013. — Вып. 8. — С. 47–64.
4. Батхин, А. Б. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем / А. Б. Батхин, А. Д. Брюно, В. П. Варин // Прикладная математика и механика. — 2012. — Т. 76. — № 1. — С. 80–133.
5. Болграбская, И. А. Об одном методе исследования колебаний вращающихся осесимметричных упругих стержней / И. А. Болграбская, А. Я. Савченко // Механика твердого тела (Донецк). — 1984. — Вып. 4. — С. 52–73.
6. Брюно, А. Д. О формальной устойчивости систем Гамильтона / А. Д. Брюно // Мат. заметки. — 1967. — Т. 1. — № 3. — С. 325–330.
7. Брюно, А. Д. Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии / А. Д. Брюно, А. Б. Батхин // Программирование. — 2012. — Т. 38. — № 2. — С. 11–28.
8. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Физматлит, 2004. — 560 с.
9. Джури, Э. Инноры и устойчивость динамических систем / Э. Джури. — М. : Наука, 1979. — 304 с.
10. Ишлинский, А. Ю. Вращение твердого тела на струне и смежные задачи / А. Ю. Ишлинский, В. А. Стороженко, М. Е. Темченко. — М. : Наука, 1991. — 330 с.
11. Калинина, Е. А. Теория исключения / Е. А. Калинина, А. Ю. Утешев. — СПб. : Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. — 72 с.
12. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1968. — 432 с.
13. Майлыбаев, А. А. Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике / А. А. Майлыбаев, А. П. Сейранян. — М. : Физматлит, 2009. — 400 с.
14. Малкин, И. Г. Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. — М. : Наука, 1966. — 531 с.
15. Маркеев, А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике / А. П. Маркеев. — М. : Наука, 1978. — 312 с.

## REFERENCES

1. Barnyak M.A., Storozhenko V.A. K issledovaniyu ustoychivosti vertikalnogo vrashcheniya staticheski neuravnoveshennoy sistemy sharnirno-svyazannykh osesimmetrichnykh tel [Investigation of stability of the vertical rotation of a statically unbalanced system of hinge-connected axisymmetric bodies]. *Izv. AN SSSR. MTT* [Izvestiya: Mathematics], 1988, iss. 4, pp. 51–58.
2. Batkhin A.B. Ustoychivost odnoy mnogoparametricheskoy sistemy Gamil'tona [Stability of the certain multiparameter Hamiltonian system]. *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha RAN* [Preprints of KIAM RAS], 2011, no. 69, pp. 1–28.
3. Batkhin A.B. Vydelenie oblastey ustoychivosti nelineynoy sistemy Gamil'tona [Segregation of stability domains of the Hamilton nonlinear system]. *Avtomat. i telemekh.* [Automation and Remote Control], 2013, iss. 8, pp. 47–64.
4. Batkhin A.B., Bruno A.D., Varin V.P. Mnozhestva ustoychivosti mnogoparametricheskikh gamiltonovykh sistem [Stability sets of multiparameter hamiltonian systems]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 2012, vol. 76, no. 1, pp. 80–133.
5. Bolgrabskaya I.A., Savchenko A.Ya. Ob odnom metode issledovaniya kolebaniy vrashchayushchikhsya osesimmetrichnykh uprugikh sterzhney [On a method of investigation of vibrations of rotating axisymmetric elastic bars]. *Mekhanika tverdogo tela (Donetsk)* [Mechanics of rigid body (Donetsk)], 1984, iss. 4, pp. 52–73.
6. Bruno A.D. O formalnoy ustoychivosti sistem Gamil'tona [On the formal stability of the Hamiltonian systems]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 1967, vol. 1, no. 3, pp. 325–330.
7. Bruno A.D., Batkhin A.B. Razreshenie algebraicheskoy singulyarnosti algoritmami stepennoy geometrii [Resolution of an algebraic singularity by power geometry algorithms]. *Programmirovaniye* [Programming and Computer Software ], 2012, vol. 38, no. 2, pp. 11–28.
8. Gantmacher F.R. *Teoriya matrits* [Theory of Matrices]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 560 p.
9. Dzhuri E. *Innory i ustoychivost dinamicheskikh sistem* [Inners and Stability of Dynamic Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 304 p.
10. Ishlinskiy A.Yu., Storozhenko V.A., Temchenko M.E. *Vrashchenie tverdogo tela na strune i smezhnye zadachi* [Rotation of rigid body on the string and adjacent problems]. Moscow, Nauka Publ., 1991. 330 p.
11. Kalinina E.A., Uteshev A.Yu. *Teoriya isklyucheniya* [Exception theory]. SPb., Izd-vo NII khimii SPbGU Publ., 2002. 72 p.
12. Kurosh A.G. *Kurs vysshey algebry* [Higher Algebra]. Moscow, Mir Publishers, 1988. 428 p.
13. Maylybaev A.A., Seyranyan A.P. *Mnogoparametricheskie zadachi ustoychivosti. Teoriya i prilozheniya v mekhanike* [Multiparameter Problems of Stability. Theory and Applications in Mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 400 p.
14. Malkin I.G. *Teoriya ustoychivosti dvizheniya* [Theory of stability of motion]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 531 p.
15. Markeev A.P. *Tochki libratsii v nebesnoy mekhanike i kosmodinamike* [Libration points in celestial mechanics and cosmodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 312 p.

**ON THE STRUCTURE OF THE BOUNDARY OF THE SET OF STABILITY  
OF A CERTAIN MULTI-PARAMETER HAMILTONIAN SYSTEM**

**Batkhin Alexander Borisovich**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher,  
Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS  
batkhin@gmail.com  
Miuskaya sq. 4, 125047 Moscow, Russian Federation

**Abstract.** We consider a certain model problem, which attracted our attention for the following reasons. First of all, initially, this task was solved numerically for only two sets of parameter values and it has been suggested that the problem does not allow the full analytical solution. Secondly, solving the problem we not only managed to obtain analytical solution of stability problem in linear approximation, but also we offered such its natural generalization, which can be reduced to the already solved particular case. Third, to solve this problem we used to involved as well known methods of the theory of exceptions, and the computer algebra system that allows us to work effectively with bulky polynomial objects. Methods that were developed, implemented and tested in the form of algorithms, can be effectively used for solving a class of problems in Hamiltonian dynamics.

We consider a mechanical system in a gravitational field which consists of axisymmetric bodies, interconnected by universal Hooke joints. Centers of each of the joints are on the axes of symmetry of the corresponding body. Lower body is a weightless rod of length  $l_1$  and it is attached by the joint to the rotor axis vertically supplied motor. The upper rod of length  $l_2$  is firmly attached to the center of a flat disk of mass  $m$  and diameter  $d$  perpendicular to its plane. Rotor of the motor rotates with the constant angular velocity  $\Omega$ . Such mechanical systems are statically unstable. The Lagrangian of the system with the accuracy up to terms of second order was provided as well. The problem in the special case was completely solved analytically earlier by methods of computer algebra and Power Geometry. The general case of the problem in linear approach was considered by the author and solved analytically by methods of elimination theory.

The equations of motion of the system near vertical axis can be split up into two subsystems, of which a nontrivial is a subsystem with 4 degrees of freedom of the form  $\dot{X} = JA(P)X$ , where  $J$  is symplectic unit,  $A(P)$  is  $8 \times 8$  symmetric matrix. The elements of the matrix  $A$  are written as rational functions of the parameter vector  $P$  of dimension 5. It is shown that by linear non-degenerated transformation of the parameter space the general case is reduced to special case with dimension of parameter vector equals 3.

The characteristic polynomial  $f(\mu)$  of the matrix  $JA(P)$  has polynomial over  $P$  coefficients. It is proved that its free term  $f_0(P)$  is a perfect square, and, therefore, the boundary of the set of stability carries out a hypersurface  $\mathcal{F}_2 = \{P : D(f)(P) = 0\}$ , where  $D(f)$  is the discriminant of the polynomial  $f(\mu)$ .  $\mathcal{F}_2$  is the union of a plane and a ruled surface  $\mathcal{G}$ . The surface  $\mathcal{G}$  is formed by a straight line moving along the two parabolic segments  $P_1^0, P_2^0$  and it divides parameter space into four regions, but stability takes place only in two of them, which are 1) the interior of the curvilinear tetrahedron and 2) an unrestricted area. Each of the region of stability intersects with the region of physical values of parameters.

**Key words:** Hamiltonian system, stationary point, stability, exception theory, gyroscopic stabilization.