УДК 517.51
ББК 22.161.5

О ВЕСОВОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ В R^n

Шлык Владимир Алексеевич
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и информационных таможенных технологий,
Владивостокский филиал Российской таможенной академии
shlykva@yandex.ru
ул. Стрелковая, 16-в, 690034 г. Владивосток, Российская Федерация

Аннотация. В работе установлен критерий $(1,p,w)$-эквивалентности открытых множеств в R^n. Доказательство этого критерия базируется на определении в смысле Альфорса — Бейрлинга нуль-множеств для весового модуля конденсатора с весом w, удовлетворяющим A_p-условию Макенхаупта, $p>1$.

Ключевые слова: модуль семейства кривых, конденсатор, соболевские классы функций, емкость, вес Макенхаупта.

Введение

В [7] Альфорс и Бейрлинг ввели понятие NED-множества на плоскости и показали, что компактное множество E является устранимым в классе регулярных функций с ограниченным интегралом Дирихле тогда и только тогда, когда E — NED-множество. Затем Ю. Вяйсяля [9], В. Асеев и А. Сычев [1], С. Водопьянов и В. Гольдштейн [2] рассмотрели аналоги NED-множеств в евклидовом пространстве R^n, $n \geq 2$. Из этих аналогов наиболее общим является понятие NC_p-множества E, $p>1$, относительно замкнутого в открытом множестве $G \subset R^n$ и такого, что p-емкость $C_p(F_0, F_1, G)$ конденсатора (F_0, F_1, G) не меняется при удалении E из G для любых непересекающихся континуумов $F_0, F_1 \subset G$, где $(F_0 \cup F_1) \cap E = \emptyset$ (см.: [2]).

В частности, С. Водопьянов и В. Гольдштейн, используя аппроксимацию функции $u \in L^1_p(G)$ кусочно-экстремальными функциями, показали, что два открытых множества G_1 и G_2 $(G_1 \subset G_2)$ $(1,p)$-эквивалентны тогда и только тогда, когда $G_2 \setminus G_1$ есть NC_p-множество в G_2.

Здесь отметим, что в определении NED-множества на плоскости Альфорс и Бейрлинг требовали, чтобы E не влияло на модуль семейства кривых, соединяющих противоположные стороны любого координатного прямоугольника $\Pi \subset R^2$.

Ниже мы даем новое доказательство $(1,p)$-эквивалентности открытых множеств G_1 и G_2 $(G_1 \subset G_2)$, основанное на определении NC_p-множества как множества, не влияющего на модули семейств кривых, расположенных в произвольном координатном прямоугольнике $\Pi \subset G$ и соединяющих его противоположные грани. Причем рассуждение проведем в ситуации, когда рассмотренные выше емкости и классы функций оснащаются весом Макенхаупта [8].

1. Терминология и обозначения

Далее G — открытое множество в R^n, $n \geq 2$, $\mathcal{L}_k$ и $\mathcal{H}^k$ — соответственно k-мерные меры Лебега и Хаусдорфа; A_p — класс локально интегрируемых функций $w : R^n \to$ $\to (0; +\infty)$, удовлетворяющих условию Макенхаупта [8]

$$\sup \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w\, dx \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w^{1-q}\, dx \right)^{p-1} < \infty,$$

где супремум берется по всем координатным кубам $Q \in R^n$, $|Q| = \mathcal{L}_n(Q)$, $p, q \in (1; +\infty)$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Для весовой функции $w \in A_p$ обозначим через $L^1_{p,w}(G)$ класс функций $u : G \to$ $\to (-\infty; +\infty)$, локально интегрируемых в G, имеющих в G обобщенные частные производные и таких, что $\int\limits_G |\nabla u|^p w\, dx < \infty$.

В $L^1_{p,w}(G)$ введем полунорму

$$\|u\|_{L^1_{p,w}(G)} = \left(\int\limits_G |\nabla u|^p w\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Фактор-пространство пространства $L^1_{p,w}(G)$ по тождественно постоянным функциям банахово и полунорма $\|u\|_{L^1_{p,w}(G)}$ является нормой.

Здесь под тождественно постоянной функцией в G будем понимать функцию, равную $\mathcal{L}_n$-почти везде константе на каждой компоненте связности множества G (для разных компонент связности эти константы могут быть различными).

За этим фактор-пространством сохраним обозначение $L^1_{p,w}(G)$. В случае $w \equiv 1$ на R^n положим $L^1_{p,w}(G) = L^1_p(G)$.

Запись $\bar{F}$ обозначает замыкание множества F; $d(x, F)$ — евклидово расстояние между точкой $x \in R^n$ и множеством $F \subset R^n$.

Пусть F_0, F_1 — непересекающиеся непустые компакты из $\bar{G}$. Набор (F_0, F_1, G) назовем конденсатором в G. Определим (p, w)-емкость конденсатора (F_0, F_1, G) как величину

$$C_{p,w}(F_0, F_1, G) = \inf \int\limits_G |\nabla u|^p w\, dx,$$

где инфимум берется по всем функциям $u \in L^1_{p,w}(G) \cap C^\infty(G)$, $0 \leq u \leq 1$ в G, равным j в некоторой окрестности F_j, $j = 0, 1$. Класс всех таких допустимых функций обозначим через $\mathrm{Adm}_{p,w}(F_0, F_1, G)$.

Кривой γ в R^n назовем образ числового интервала при непрерывном его отображении в R^n.

Пусть дано некоторое семейство Γ кривых в R^n. Определим (p, w)-модуль с весом $w \in A_p$ семейства Γ следующим образом:

$$m_{p,w}(\Gamma) = \inf \int\limits_R^n \rho^p w\, dx,$$

где инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho : R^n \to [0; +\infty]$ таким, что $\int\limits_\gamma \rho \, d\mathcal{H}^1 \geq 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$.

Для конденсатора (F_0, F_1, G) через $\Gamma(F_0, F_1, G)$ обозначим семейство всех кривых $\gamma \subset G$, соединяющих F_0 и F_1. Тогда (p, w)-модуль конденсатора с весом $w \in A_p$ определим с помощью равенства $m_{p,w}(F_0, F_1, G) = m_{p,w}(\Gamma(F_0, F_1, G))$.

Пусть $E \subset G$ — относительно замкнутое в G множество. Для координатного прямоугольника $\Pi = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ пусть его грани, параллельные гиперплоскости $x_i = 0$, обозначаются через $\sigma_{0i} \subset \{x : x_i = a_i\}$ и $\sigma_{1i} \subset \{x : x_i = b_i\}$. E назовем $NC_{p,w}$-множеством (см.: [4]), если для любого координатного прямоугольника Π, $\bar{\Pi} \subset G$, выполнены равенства

$$m_{p,w}(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi \setminus E) = m_{p,w}(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Известно, что для $NC_{p,w}$-множества E в G $\mathcal{L}_n(E) = 0$ и любую функцию $u \in L^1_{p,w}(G \setminus E)$ можно продолжить до функции из $L^1_{p,w}(G)$.

Открытые множества G_1 и G_2 ($G_1 \subset G_2 \subset R^n$) назовем $(1, p, w)$-эквивалентными, если оператор ограничения $\theta : L^1_{p,w}(G_2) \to L^1_{p,w}(G_1)$ ($\theta u = u|_{G_1}$) является изоморфизмом векторных пространств $L^1_{p,w}(G_2)$ и $L^1_{p,w}(G_1)$ (для $w \equiv 1$ см.: [2]).

2. Критерий весовой эквивалентности открытых множеств в R^n

Теорема 1. *Для того чтобы открытые множества G_1 и G_2 ($G_1 \subset G_2 \subset R^n$) были $(1, p, w)$-эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы множество $G_2 \setminus G_1$ было $NC_{p,w}$-множеством в G_2.*

Доказательство. Необходимость. Пусть пространства $L^1_{p,w}(G_2)$ и $L^1_{p,w}(G_1)$ изоморфны как линейные пространства при изоморфизме ограничения $\theta u = u|_{G_1}$, $u \in L^1_{p,w}(G_2)$. Переходя к факторпространствам и используя теорему Банаха, получим ограниченность оператора θ^{-1}. Установим теперь, что $\mathcal{L}_n(G_2 \setminus G_1) = 0$. Предположим обратное. Тогда множество $G_2 \setminus G_1$ имеет хотя бы одну точку плотности x_0, являющуюся одновременно точкой Лебега для веса $w(x)$. Рассмотрим последовательность открытых кубов $Q_m = Q\left(x_0, \frac{1}{m}\right)$ с центром в точке x_0 и ребром длины $\frac{1}{m}$, $m = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим функцию $u_m(x) = d(x, R^n \setminus Q_m)$, $x \in R^n$.

Известно (см.: [6]), что $|\nabla u_m| = 1$ $\mathcal{L}_n$-почти всюду на Q_m и $|\nabla u_m| = 0$ $\mathcal{L}_n$-почти всюду на $R^n \setminus Q_m$, $|u_m(x') - u_m(x'')| \leq |x' - x''|$ для любых $x', x'' \in R^n$. Тогда

$$\int\limits_{Q_m} w(x) \, dx \leq \int\limits_{G_2} |\nabla u_m|^p w \, dx \leq \|\theta^{-1}\|^p \int\limits_{G_1} |\nabla u_m|^p w \, dx \leq \|\theta^{-1}\|^p \int\limits_{Q_m \cap G_1} w \, dx. \qquad (1)$$

При $m \to \infty$ соотношение (1) неверно. Следовательно, $\mathcal{L}_n(G_2 \setminus G_1) = 0$ и любая функция $u \in L^1_{p,w}(G_1)$ продолжается до функции $\tilde{u} \in L^1_{p,w}(G_2)$ с сохранением нормы.

Установим, что $E = G_2 \setminus G_1$ — $NC_{p,w}$-множество в G_2.

Пусть $\Pi = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ — произвольный координатный прямоугольник в G_2 и $v_{0i} = \lim\limits_{k \to \infty} v_{ki}$ в $L^1_{p,w}(\Pi \setminus E)$, $v_{ki} \in \mathrm{Adm}_{p,w}(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi \setminus E)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $\int\limits_{\Pi \setminus E} |\nabla v_{0i}|^p w \, dx = C_{p,w}(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi \setminus E)$.

Тогда v_{0i} назовем экстремальной функцией для $C_{p,w}(\sigma_{0i},\sigma_{1i},\Pi\setminus E)$ (о существовании экстремальной функции для емкости конденсатора см.: [5, предложение 7]).

Положим $\Pi_m=\left\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n : a_i+\frac{1}{m}<x_i<b_i-\frac{1}{m}, i=1,2,\ldots,n\right\}$. Ясно, что при m, больших некоторого m_0, $\overline{\Pi_m}\subset\Pi$ и $\Pi_m\uparrow\Pi$ при $m\to\infty$.

Пусть $\psi_m\in C_0^\infty(\Pi)$ и $\psi_m\equiv 1$ на Π_m. Тогда $v_{0i}\psi_m, v_{ki}\psi_m\in L^1_{p,w}(G_1)$ и, следовательно, в силу сказанного выше, продолжаются до функций из $L^1_{p,w}(G_2)$. Отсюда v_{0i}, v_{ki} продолжаются соответственно до функций $\tilde v_{0i},\tilde v_{ki}\in L^1_{p,w}(\Pi)$, где

$$\int\limits_{\Pi\setminus E}|\nabla v_{0i}|^p w\,dx=\int\limits_{\Pi}|\nabla\tilde v_{0i}|^p w\,dx,$$

$$\int\limits_{\Pi\setminus E}|\nabla v_{ki}|^p w\,dx=\int\limits_{\Pi}|\nabla\tilde v_{ki}|^p w\,dx.$$

Усредняя $\tilde v_{ki}$ надлежащим образом по Соболеву (см.: [4]), получим $u_{ki}\in\mathrm{Adm}_{p,w}(\sigma_{0i},\sigma_{1i},\Pi)$ такие, что

$$\int\limits_{\Pi}|\nabla u_{ki}-\nabla\tilde v_{ki}|^p w\,dx<\frac{1}{k}.$$

Это позволяет заключить, что $\tilde v_{0i}$ является экстремальной для $C_{p,w}(\sigma_{0i},\sigma_{1i},\Pi)$. В силу известного равенства модуля и емкости конденсатора (см.: [5, теорема 1]) имеем:

$$m_{p,w}(\sigma_{0i},\sigma_{1i},\Pi\setminus E)=C_{p,w}(\sigma_{0i},\sigma_{1i},\Pi\setminus E)=C_{p,w}(\sigma_{0i},\sigma_{1i},\Pi)=m_{p,w}(\sigma_{0i},\sigma_{1i},\Pi),$$

$$i=1,2,\ldots,n.$$

Другими словами, E является $NC_{p,w}$-множеством в G_2.

Достаточность. Поскольку $E=G_2\setminus G_1$ — $NC_{p,w}$-множество в G_2, то каждая функция $u\in L^1_{p,w}(G_1)$ продолжается до функции $\tilde u\in L^1_{p,w}(G_2)$. Равенство $\mathcal{L}_n(E)=0$ гарантирует единственность продолжения с сохранением нормы. Значит, оператор θ, введенный ранее, осуществляет изоморфизм пространств $L^1_{p,w}(G_1)$ и $L^1_{p,w}(G_2)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асеев, В. В. О множествах, устранимых для пространственных квазиконформных отображений / В. В. Асеев, А. В. Сычев // Сиб. мат. журн. — 1974. — Т. 15. — № 6. — С. 1213–1227.

2. Водопьянов, С. К. Критерий устранимости множеств для пространств L^1_p, квазиконформных и квазиизометрических отображений / С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн // Сиб. мат. журн. — 1977. — Т. 18. — № 1. — С. 48–68.

3. Демшин, И. Н. Критерии нуль-множеств для весовых соболевских пространств / И. Н. Демшин, Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык // Зап. науч. семинаров ПОМИ. — 2001. — Т. 276. — С. 52–82.

4. Дымченко, Ю. В. Достаточность семейства ломаных в методе модулей и устранимые множества / Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык // Сиб. мат. журн. — 2010. — Т. 51. — № 6. — С. 1298–1315.

5. Пугач, П. А. Обобщенные емкости и полиэдральные поверхности / П. А. Пугач, В. А. Шлык // Зап. науч. семинаров ПОМИ. — 2010. — Т. 383. — С. 148–178.

6. Федерер, Г. Геометрическая теория меры / Г. Федерер. — М. : Наука, 1987. — 760 с.

7. Ahlfors, L. Conformal invariants and functions-theoretic null-sets / L. Ahlfors, A. Beurling // Acta Math. — 1950. — Vol. 83. — № 1-2. — P. 101–129.

8. Muckenhoupt, B. The equivalence of two conditions for weight functions / B. Muckenhoupt // Studia Math. — 1974. — Vol. 49. — P. 101–106.

9. Väisälä, J. On the null-sets for extremal distances / J. Väisälä // Ann. acad. Sci. Fenn. Ser. I. Math. — 1962. — № 322. — P. 1–12.

REFERENCES

1. Aseev V.V., Sychev A.V. O mnozhestvakh, ustranimykh dlya prostranstvennykh kvazikonformnykh otobrazheniy [On the removable sets for space quasiconformal mappings]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal]. 1974, vol. 15, no. 6, pp. 1213–1227.

2. Vodopyanov S.K., Goldshteyn V.M. Kriteriy ustranimosti mnozhestv dlya prostranstv L^1_p, kvazikonformnykh i kvaziizometricheskikh otobrazheniy [Criteria of removability of sets for the spaces L^1_p, quasiconformal and quasiisometric mappings]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal]. 1977, vol. 18, no. 1, pp. 48–68.

3. Demshin I.N., Dymchenko Yu.V., Shlyk V.A. Kriterii nul-mnozhestv dlya vesovykh sobolevskikh prostranstv [The null-sets criteria for the weighted Sobolev spaces]. *Zap. nauch. seminarov POMI* [J. of Math. Sciences]. 2001, vol. 276, pp. 52–82.

4. Dymchenko Yu.V., Shlyk V.A. Dostatochnost semeystva lomanykh v metode moduley i ustranimye mnozhestva [The sufficiency of families of polygonal curves in the moduli method and removable sets]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal]. 2010, vol. 51, no. 6, pp. 1298–1315.

5. Pugach P.A., Shlyk V.A. Obobshchennye emkosti i poliedralnye poverkhnosti [Generalized capacities and polyhedral surfaces]. *Zap. nauch. seminarov POMI* [J. of Math. Sciences]. 2010, vol. 383, pp. 148–178.

6. Federer H. *Geometricheskaya teoriya mery* [Geometric measure theory]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 760 p.

7. Ahlfors L., Beurling A. Conformal invariants and functions-theoretic null-sets. *Acta Math.* 1950, vol. 83, no. 1-2, pp. 101–129.

8. Muckenhoupt B. The equivalence of two conditions for weight functions. *Studia Math.* 1974, vol. 49, pp. 101–106.

9. Väisälä J. On the null-sets for extremal distances. *Ann. acad. Sci. Fenn. Ser. I. Math.* 1962, no. 322, pp. 1–12.

ON THE WEIGHTED EQUIVALENCE OF OPEN SETS IN R^n

Shlyk Vladimir Alekseevich

Doctor of Physical and mathematical Sciences, professor, Department of Informatics and Customs Informatics Technologies,
Vladivostok Branch of Russian Customs Academy
shlykva@yandex.ru
Strelkovaya st., 16-v, 690034 Vladivostok, Russian Federation

Abstract.

Ahlfors and Beurling gave a characterization in terms of extremal distances of the removable singularities for the class of analytic functions with finite Dirichlet integral. Following Ahlfors and Beurling refer a relatively closed set E contained in open set $G \subset R^n$ as an $NC_{p,w}$-set if E do not affect the(p,w)-modulus $m_{p,w}(F_0, F_1, \Pi)$ for every coordinate rectangle $\Pi \subset G$.

Dymchenko and Shlyk established that $NC_{p,w}$-sets are removable for the weighted Sobolev space $L^1_{p,w}(G)$. Observe that the idea to study removable sets of this type in R^n, $n \geq 2$, in terms of rectangle is not new and for $w \equiv 1$ was considered by Hedberg, Yamamoto. In particular Hedberg gave the definition of null set $E \subset \Pi$ for a certain condenser capacity and showed that such set E is removable for the class of real valued harmonic function u with vanishing periods, $\int |\nabla u|^p \, dx < \infty$. Also remark that $NC_{p,w}$- sets were under investigation by Väisälä, Aseev and Sychev for $p = n$, $w \equiv 1$; by Vodop'yanov and Gol'dshtein, $w \equiv 1$. For more fully information about $NC_{p,w}$-sets, $w \equiv 1$, we refer to the book by Gol'dshtein and Reshetnyak "Quasiconformal mappings and Sobolev Spaces".

Following Vodop'yanov and Gol'dshtein open sets G_1 and G_2 ($G_1 \subset G_2$) will be called $(1, p, w)$-equivalent if the operator of restriction θ: $L^1_{p,w}(G_2) \to L^1_{p,w}(G_1)$ is the isomorphism of the vector spaces $L^1_{p,w}(G_2)$ and $L^1_{p,w}(G_1)$.

In the present paper we have established the criterion of $(1, p, w)$-equivalence of open sets in R^n: In order to open sets G_1 and G_2 ($G_1 \subset G_2 \subset R^n$) be $(1, p, w)$-equivalent, necessary and sufficient that the set $G_2 \setminus G_1$ be an $NC_{p,w}$-set in G_2. This result generalize the earlier criterion by Vodop'yanov and Gol'dstein and it's proof is used the definition of null-sets for the Muckenhoupt weight condenser module in Ahlfors — Beurling sense.

Key words: modulus of curves family, condenser, capacity, Sobolev functions classes, Muckenhoupt weight.