УДК 519.633
ББК 22.25

ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА НА ОСНОВЕ КОМБИНИРОВАННОГО ПОДХОДА SPH-TVD: ПРОБЛЕМА МОДЕЛИРОВАНИЯ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ [1]

А.В. Писарев, С.С. Храпов, А.В. Хоперсков

Обсуждается проблема численного моделирования сдвиговых течений, допускающих развитие неустойчивости Кельвина – Гельмгольца. Для модели мелкой воды показано, что численный алгоритм cSPH-TVD (комбинированный SPH-TVD) адекватно описывает динамику неустойчивости тангенциального разрыва.

Ключевые слова: *численные методы, гибридные методы, гиперболические уравнения, неустойчивость Кельвина – Гельмгольца, гидродинамика.*

Введение

Особые требования к численным алгоритмам возникают при моделировании сдвиговых неустойчивостей, которые возникают при изучении самых различных физических объектов и явлений [5; 6; 9–11]. Наиболее трудными представляются системы, допускающие развитие сверхотражения при наличии большого числа неустойчивых мод с близкими значениями инкрементов [7], а также, когда ширина переходной зоны сопоставима с длиной возмущения [3; 6].

Для численного интегрирования уравнений гидродинамики используют два основных подхода. Первый основан на самых различных сеточных методах [2], в основе которых лежит задание сетки, в узлах которой рассчитываются значения величин. Второй, лагранжевый подход, отличается тем, что все физические величины определяются динамическими частицами, на которые разбивается непрерывная среда [12]. Наиболее эффективным представляется метод Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). Стандартная версия SPH-алгоритма обладает недостатком, связанным с невозможностью описания неустойчивости Кельвина – Гельмгольца. Этот эффект наглядно проявляется даже при моделировании распада произвольного скачка давления в одномерном приближении, когда не удается адекватно рассчитывать контактный разрыв.

В работе [8] был предложен новый численный метод, основанный на совместном использовании SPH- и TVD-алгоритмов (cSPH-TVD). В данной работе обсуждается вопрос о возможности применения cSPH-TVD для моделирования неустойчивых сдвиговых течений на примере укороченных уравнений гидродинамики в рамках модели мелкой воды.

Моделирование неустойчивости Кельвина – Гельмгольца

Будем исходить из простой двумерной модели, определяемой системой уравнений Сен-Венана:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(hu_x)+\frac{\partial}{\partial y}(hu_y)=0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}=g\frac{\partial h}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}=g\frac{\partial h}{\partial y}, \quad (3)$$

где $h(x, y, t)$ – толщина слоя жидкости; $u_x(x, y, t)$, $u_y(x, y, t)$ – компоненты скорости; g – ускорение свободного падения. Будем использовать численный метод интегрирования, подробно описанный в работе [8]. Процедура численного интегрирования системы уравнений (1)–(3) разбита на четыре этапа:

1) В начале расчетного цикла (момент времени t_n) «жидкие» частицы находятся в центрах эйлеровых ячеек. Используя алгоритм Smooth Particle Hydrodynamics, определяем изменения интегральных значений объемов, импульсов жидких частиц и их положения внутри ячеек.

2) На втором этапе рассчитываем потоки массы и импульса через границы эйлеровых ячеек в момент времени $t_{n+1/2}$, основываясь на модифицированном TVD-подходе и решении задачи Римана.

3) Производим расчет изменений интегральных параметров жидких частиц, связанных с потоками через границы эйлеровых ячеек.

4) На заключительном этапе помещаем частицы в центры ячеек.

В численной модели в качестве единиц измерения выберем единицы системы СИ (метр, секунда) и считаем $g = 9{,}81$ м/с^2. Размер расчетной области составляет 400×400 ячеек, площадь ячейки $h^2 = 6{,}25$ ($h = 2{,}5$). Линейный размер расчетной области равен $L = 1\,000$. В качестве начальных условий примем:

$$H_0=1,\ u_0=\begin{cases} Fr\sqrt{gH_0}\big/2, & y<0 \\ -Fr\sqrt{gH_0}\big/2, & y>0 \end{cases},\ v_0=0,$$

где Fr – число Фруда.

Результаты расчетов представлены на рисунках 1 и 2 для значения $Fr = 1$. Возмущение задавалось в виде

$$\tilde{v}=\begin{cases} \varepsilon\, u_0 \sin(2\pi\, n/L), & |\,y\,|<h \\ 0 & ,\ |\,y\,|<h \end{cases},$$

где $\varepsilon = 10^{-4}$ – относительная амплитуда начального возмущения; $n = 2$ – число длин волн в интервале от $-L/2$ до $L/2$.

Четко выделяются характерные стадии развития неустойчивости тангенциального разрыва скорости на мелкой воде:

- Формирование собственной моды (этап A), когда происходит перестройка начального возмущения в собственную моду без нарастания амплитуды.
- На линейной стадии (этап B) развития неустойчивости рост возмущений следует экспоненциальному закону. Относительная амплитуда волны нарастает до 1–2 % по закону $\propto \exp(t/\tau)$ с $t = 109$ с для параметров течения, изображенного на рисунке 1.

- Далее начинается нелинейная стадия развития неустойчивости (этап *C*), когда наступает «насыщение» амплитуды возмущений. Формируются характерные вихревые структуры (см. рис. 2), аналогичные тем, что наблюдаются при развитии неустойчивости тангенциального разрыва в газе [1].

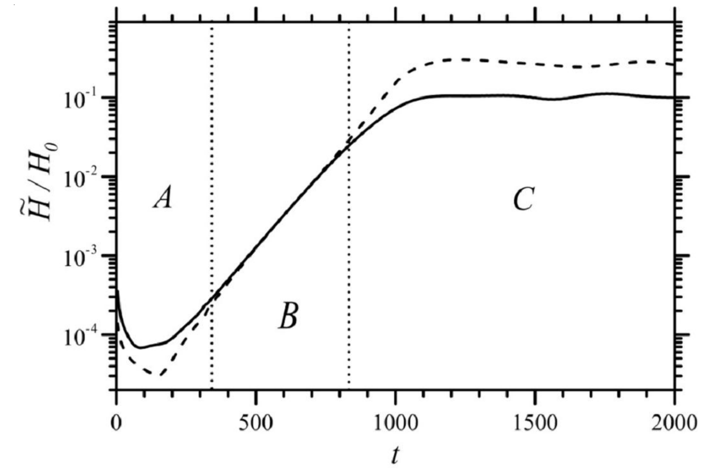

Рис. 1. Зависимость максимальной (*сплошная линия*) и минимальной (*штриховая линия*) амплитуд возмущений глубины (*H*) от времени. Латинскими буквами *A*, *B*, *C* обозначены стадии развития неустойчивости тангенциального разрыва скорости

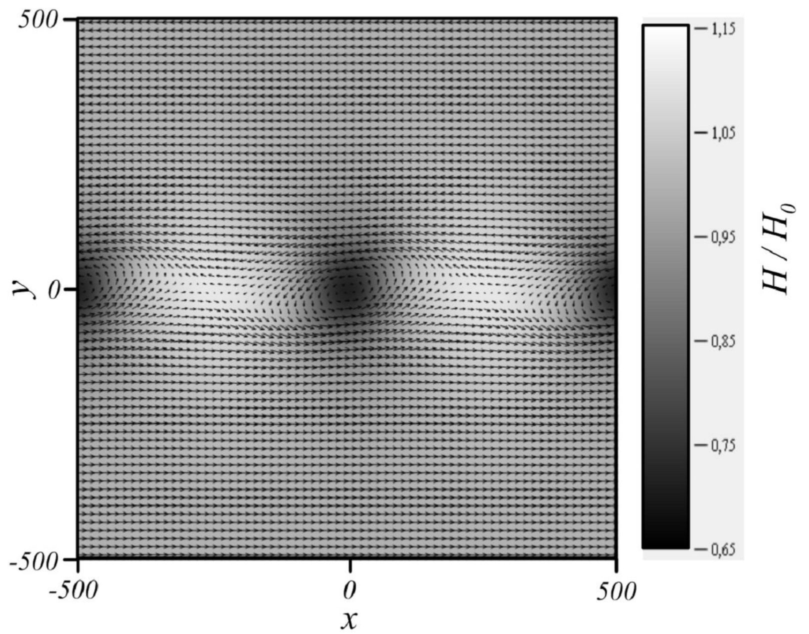

Рис. 2. Нелинейная стадия развития неустойчивости тангенциального разрыва скорости. Представлены распределение глубины *H* и поле скоростей $\vec{\text{v}} = \{u, v\}$ в момент времени $t = 1\ 100$

Заключение

Показано, что численный алгоритм cSPH-TVD [8] способен описывать сдвиговые неустойчивости, несмотря на то что на одном из этапов схемы cSPH-TVD используется подход сглаженных частиц SPH. Таким образом, у комбинированного метода cSPH-TVD отсутствует недостаток классического SPH, не позволяющий корректно моделировать тангенциальные и контактные разрывы.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 10-07-97017, № 11-07-97025, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (№ 02.740.11.5198), ФЦП «Старт-11 Н1 – Информационные технологии, программные продукты и телекоммуникационные системы» (проект № 8861р/14383).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Еремин, М. А. Конечно-объемная схема интегрирования уравнений гидродинамики / М. А. Еремин, А. В. Хоперсков, С. А. Хоперсков // Изв. Волгогр. гос. техн. ун-та. Серия «Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах». – 2010. – Т. 6, № 8. – С. 24–27.

2. Куликовский, А. Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. – М. : Физматлит, 2001. – 608 с.

3. Мусцевой, В. В. Линейный анализ устойчивости двухпотоковой аккреции / В. В. Мусцевой, А. В. Хоперсков // Письма в Астрон. журн. – 1991. – Т. 17, № 3. – С. 281–288.

4. Фридман, А. М. Неуниверсальность классической концепции тангенциального разрыва / А. М. Фридман, О. В. Хоружий // УФН. – 1993. – Т. 163. – С. 79–85.

5. Фридман, А. М. Предсказание и открытие сильнейших гидродинамических неустойчивостей, вызванных скачком скорости: теория и эксперименты / А. М. Фридман // УФН. – 2008. – Т. 178, № 3. – С. 225–242.

6. Фридман, А. М. Физика галактических дисков / А. М. Фридман, А. В. Хоперсков. – М. : Физматлит, 2011. – 640 с.

7. Хоперсков, А. В. К вопросу об устойчивости сверхзвуковой МГД-струи / А. В. Хоперсков // Изв. ВУЗов. Радиофизика. – 1996. – Т. 39, № 7. – С. 891–900.

8. Храпов, С. С. Численная схема для моделирования динамики поверхностных вод на основе комбинированного SPH-TVD-подхода / С. С. Храпов, А. В. Хоперсков, Н. М. Кузьмин, А. В. Писарев, И. А. Кобелев // Вычислительные методы и программирование. – 2011. – Т. 12. – С. 282–297.

9. Afanasiev, V. L. Formation of ionization-cone structures in active galactic nuclei: II. Nonlinear hydrodynamic modeling / V. L. Afanasiev, S. N. Dodonov, S. S. Khrapov, V. V. Mustsevoi, A. V. Moiseev // Astrophysical Bulletin. – 2007. – V. 62. – P. 15–25.

10. Criminale, W. O. Theory and Computation of Hydrodynamic Stability / W. O. Criminale, T. L. Jackson, R. D. Joslin. – Cambridge University Press, 2003. – 433 p.

11. Fridman, A. M. Centrifugal instability in rotating shallow water and the problem of the spiral structure in galaxies / A. M. Fridman, A. G. Morozov, M. V. Nezlin, E. N. Snezhkin // Physics Letters A. – 1985. – V. 109. – P. 228–231.

12. Monaghan, J. J. Particle methods for hydrodynamics / J. J. Monaghan // Computer Physics reports. – 1985. – V. 3. – P. 71–124.

THE NUMERICAL SCHEME BASED ON A COMBINED SPH-TVD APPROACH: SIMULATION OF SHEAR FLOWS

A.V. Pisarev, S.S. Khrapov, A.V. Khoperskov

We discuss the problem of numerical simulation of shear flows on the example of Kelvin – Helmholtz instability. A numerical algorithm cSPH-TVD (combined SPH-TVD) adequately describes the dynamics of the instability of tangential discontinuity in the shallow water model.

Key words: *numerical methods, hybrid methods, hyperbolic equations, Kelvin – Helmholtz instability, hydrodynamics.*