www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА

DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2015.1.1

УДК 517.951, 519.632
ББК 22.161, 22.19

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ [1]

Клячин Алексей Александрович

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
klyachin-aa@yandex.ru, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В настоящей работе вычисляется погрешность, с которой может быть подсчитан заданный интегральный функционал, если в качестве приближающих функций взять кусочно-линейную функцию над триангуляцией, построенной в области.

Ключевые слова: кусочно-линейная функция, аппроксимация функционала, триангуляция, степень погрешности, мелкость разбиения.

Введение

Рассмотрим функционал, задаваемый интегралом

$$I(u) = \int\limits_{\Omega} G(x, u, \nabla u) dx, \tag{1}$$

который определен для функций $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Отметим, что уравнение Эйлера — Лагранжа вариационной задачи для этого функционала имеет вид

$$Q[u] \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(G'_{\xi_i}(x, u, \nabla u) \right)'_{x_i} - G'_u(x, u, \nabla u) = 0. \tag{2}$$

В случае, когда подынтегральное выражение $G(x, u, \nabla u) = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$, уравнением (2) является уравнение минимальной поверхности

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_{x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0.$$

Другим примером является уравнение Пуассона $\Delta u = f(x)$, которое соответствует функции $G(x, u, \nabla u) = |\nabla u|^2 + 2f(x)u(x)$.

В данной работе мы исследуем вопрос о степени аппроксимации функционала (1) кусочно-линейными функциями. К подобным задачам приводят вопросы сходимости вариационных методов ряда краевых задач [2; 3; 5]. Проблема заключается в том, что интеграл (1) должен быть вычислен с точностью не хуже чем $O(h^2)$ при $h \to 0$, где h — мелкость разбиения области на треугольники. Именно в этом случае удается показать равномерную сходимость кусочно-линейных решений. Однако производные непрерывно дифференцируемой функции приближаются производными кусочно-линейной функции с погрешностью первого порядка относительно диаметров треугольников триангуляции (см., например, [4]). Причем с повышением гладкости функции оценка не улучшается. И все-таки, как мы увидим ниже, нам удается показать, что значения интеграла (1) для функций из C^2 приближаются с большей степенью точности, чем производные. Отметим также, что в работах [1; 6] получены оценки погрешности вычисления площади поверхностей для триангуляции, построенной по прямоугольной сетке.

1. Основные результаты

Дадим необходимые определения. Пусть задана многогранная ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Рассмотрим произвольное разбиение этого многогранника на невырожденные тетраэдры T_1, T_2, ..., T_N и пусть M_1, M_2, ..., M_m — все вершины этих тетраэдров. Будем предполагать, что ни одна из точек M_i не является внутренней точкой ни одной грани тэтраэдров. Через Γ_l будем обозначать грани всех тетраэдров, $l = 1, 2, ..., L$, а максимальный диаметр всех тетраэдров обозначим через h, то есть $h = \max\limits_{1 \le k \le N} \mathrm{diam} T_k$.

Для произвольного набора значений $u_1, u_2, ..., u_m$ определим кусочно-линейную функцию $u : \Omega \to \mathbf{R}$ так, что $u(M_i) = u_i, i = 1, ..., m$ и функция $u(x) = p_1^k x_1 + ... + p_n^k x_n + b^k$ на каждом тетраэдре $T_k, k = 1, ..., N$. Данная функция будет непрерывной в Ω и в каждом тетраэдре T_k определен ее градиент $\nabla u = p^k \equiv \mathrm{const}$. Значение интеграла (1) для кусочно-линейной функции можно вычислить следующим образом

$$I(u) = I(p^1, ..., p^N) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{T_k} G(x, u(x), p^k) dx.$$

Для случая, когда $G(x, u, \nabla u) = G(\nabla u)$, можно обойтись без вычисления интеграла

$$I(u) = I(p^1, ..., p^N) = \sum_{k=1}^{N} G(p^k) v(T_k),$$

где $v(T_k)$ — n-мерный объем тетраэдра T_k.

Так как векторы $p^1, ..., p^N$ однозначно определяются значениями $u_1, ..., u_m$, то можем записать величину $I(p_1, ..., p_N)$ через переменные $u = (u_1, ..., u_m)$. Действительно, значения переменных $p^1, ..., p^N$ выражаются линейно через переменные $u_1, ..., u_m$:

$$p_l^k = \sum_{i=1}^m a_{li}^k u_i, \ k = 1, ..., N, \ l = 1, ..., n.$$

Числа a_{li}^k однозначно определяются разбиением области Ω на тетраэдры $T^1, ..., T^N$. Поэтому

$$I(u_1, ..., u_m) = \sum_{k=1}^N G\left(\sum_{i=1}^m a_{1i}^k u_i, ..., \ \sum_{i=1}^m a_{ni}^k u_i\right) \cdot v(T_k).$$

Пусть $f \in C^2(\overline{\Omega})$. Обозначим через f^N кусочно-линейную функцию такую, что $f^N(M_i) = f(M_i), i = 1, 2, ..., m$. Пусть $g^t = f^N + t(f - f^N)$. Следующее утверждение дает формулу определения погрешности приближенного вычисления функционала $I(f)$.

Теорема 1. *Предположим, что функция $f \in C^2(\overline{\Omega})$ и f^N — соответствующая кусочно-линейная функция. Тогда*

$$I(f) - I(f^N) = \sum_{k=1}^N \int_{T_k} (f - f^N) \int_0^1 Q[g^t] dt\, dx + \int_{\partial\Omega} (f - f^N) \sum_{i=1}^n \nu_i \int_0^1 G'_{\xi_i}(x, g^t, \nabla g^t) dt\, dS +$$

$$+ \sum_{\textit{внутр.}\ \Gamma_l} \int_{\Gamma_l} (f - f^N) \sum_{i=1}^n \nu_i \int_0^1 (G'_{\xi_i}(x, g_+^t, \nabla g_+^t) - G'_{\xi_i}(x, g_-^t, \nabla g_-^t)) dt\, dS, \qquad (3)$$

где g_+^t, g_-^t — функция g^t, рассматриваемая в двух тетраэдрах с общей гранью Γ_l, причем g_+^t соответствует тому тетраэдру, для которого нормаль ν является внешней.

Доказательство. Применяя формулу Гаусса — Остроградского, имеем

$$I(f) - I(f^N) = \sum_{k=1}^N \int_{T_k} \left(G(x, f, \nabla f) - G(x, f^N, \nabla f^N)\right) =$$

$$\sum_{k=1}^N \left[\int_{T_k} \left((f - f^N) \int_0^1 G'_u(x, g^t, \nabla g^t) dt - \sum_{i=1}^n (f - f^N) \int_0^1 (G'_{\xi_i}(x, g^t, \nabla g^t))'_{x_i} dt\right) dx\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \int_{\partial T_k} (f - f^N) \sum_{i=1}^n \nu_i \int_0^1 G'_{\xi_i}(x, g^t, \nabla g^t) dt =$$

$$= \sum_{k=1}^N \left[\int_{T_k} \left((f - f^N) \int_0^1 G'_u(x, g^t, \nabla g^t) dt - \sum_{i=1}^n (f - f^N) \int_0^1 (G'_{\xi_i}(x, g^t, \nabla g^t))'_{x_i} dt\right) dx\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\partial\Omega}(f-f^N)\sum_{i=1}^{n}\nu_i\int\limits_0^1 G'_{\xi_i}(x,g^t,\nabla g^t)dt+$$

$$+\sum_{\text{внутр. }\Gamma_l}\int\limits_{\Gamma_l}(f-f^N)\sum_{i=1}^{n}\nu_i\int\limits_0^1(G'_{\xi_i}(x,g^t_+,\nabla g^t_+-G'_{\xi_i}(x,g^t_-,\nabla g^t_-)dt,$$

где g^t_+, g^t_- — функции g^t, рассматриваемые в тетраэдрах с общей гранью Γ_l, причем g^t_+ соответствует тому тетраэдру, для которого нормаль ν является внешней. Таким образом, окончательно приходим к равенству

$$I(f)-I(f^N)=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{T_k}(f-f^N)\int\limits_0^1 Q[g^t]dt+\sum_{\text{гранич. }\Gamma_l}\int\limits_{\Gamma_l}(f-f^N)\sum_{i=1}^{n}\nu_i\int\limits_0^1 G'_{\xi_i}(x,g^t,\nabla g^t)dt+$$

$$+\sum_{\text{внутр. }\Gamma_l}\int\limits_{\Gamma_l}(f-f^N)\sum_{i=1}^{n}\nu_i\int\limits_0^1(G'_{\xi_i}(x,g^t_+,\nabla g^t_+-G'_{\xi_i}(x,g^t_-,\nabla g^t_-))dt.$$

Применим доказанное равенство для оценки погрешности вычисления площади графика функции

$$I(f)=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+f^2_{x_1}+f^2_{x_2}}\,dx_1dx_2$$

в случае плоской области $\Omega\subset\mathbf{R}^2$. Итак, пусть $f\in C^2(\overline{\Omega})$. Положим

$$M_0=\max_{\overline{\Omega}}|f(x)|,\quad M_1=\max_{1\le i\le 2}\max_{\overline{\Omega}}|f_{x_i}(x)|,\quad M_2=\max_{1\le i,j\le 2}\max_{\overline{\Omega}}|f_{x_ix_j}(x)|.$$

Тогда, так как в каждом треугольнике T_k градиент ∇f^N постоянен, не сложно получить оценку

$$|Q[g^t]|=\left|\sum_{i,j=1}^{2}\frac{(1+|\nabla g^t|^2)\delta_{ij}-g^t_{x_i}g^t_{x_j}}{(1+|\nabla g^t|^2)^{3/2}}f_{x_ix_j}\right|\le 24M_1^2M_2.$$

При этом мы учитываем, что $|\nabla f^N|\le M_1$. Далее ясно, что

$$\left|\sum_{i=1}^{2}\nu_i\int\limits_0^1\frac{g^t_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla g^t|^2}}dt\right|\le 1.$$

Зафиксируем внутреннее ребро Γ_l. Обозначим через T_+ и T_- треугольники, соприкасающиеся по этому ребру. Тогда на Γ_l выполнено $\nabla g^t_+-\nabla g^t_-=(\nabla f^N)|_{T_+}-(\nabla f^N)|_{T_-}$. Поэтому

$$\left|\frac{\nabla g^t_+}{\sqrt{1+|\nabla g^t_+|^2}}-\frac{\nabla g^t_-}{\sqrt{1+|\nabla g^t_-|^2}}\right|\le 2|\nabla g^t_+-\nabla g^t_-|\le 2|(\nabla f^N)|_{T_+}-(\nabla f^N)|_{T_-}|.$$

Воспользуемся результатами работы [4]. Там показано, что градиенты функции f^N и f удовлетворяют неравенству

$$|\nabla f - \nabla f^N| \le h(2+\mu)M_2, \quad \mu = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{1+\tan^2\varphi_0}}{\tan\varphi_0}\right)^{1/2}, \tag{4}$$

где $\varphi_0 > 0$ — минимальный острый угол в треугольниках триангуляции (если $\varphi_0 = \pi/2$, то считаем $\mu = 1$). Тогда

$$\left| \frac{(g^t_+)_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla g^t_+|^2}} - \frac{(g^t_-)_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla g^t_-|^2}} \right| \le 4h(2+\mu)M_2.$$

Положим $C_1 = 4(2+\mu)M_2$. Применяя приведенные неравенства к равенству (3), получаем

$$|I(f^N) - I(f)| \le \max_{\Omega} |f^N - f| [24|\Omega| M_1^2 M_2 + |\partial\Omega| + nC_1 h \sum_{\text{внутр. } \Gamma_l} |\Gamma_l|],$$

где $|\Omega|$ — площадь фигуры Ω, а $|\partial\Omega|$ — ее периметр. Мы можем предположить, что триангуляция обладает таким свойством, что найдется постоянная C_2, независящая от h, для которой $\sum\limits_{\text{внутр. } \Gamma_l} |\Gamma_l|\, h \le C_2$. Таким образом, мы приходим к неравенству

$$|I(f^N) - I(f)| \le C_3 \max_{\Omega} |f^N - f|,$$

где

$$C_3 = 24|\Omega| M_1^2 M_2 + |\partial\Omega| + nC_1 C_2.$$

Далее не сложно доказать с помощью формулы Тейлора, что $|f^N - f| \le 2M_2 h^2$. Таким образом окончательно приходим к оценке

$$|I(f^N) - I(f)| \le 2M_2 C_3 h^2. \tag{5}$$

Замечание. Пусть $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ и $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$, где $x_i = a + i(b-a)/m$, $y_j = c + j(d-c)/m$. Тогда Ω разбивается на прямоугольники $\Omega_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $0 \le i \le m-1$, $0 \le j \le m-1$. Далее разделим каждый такой прямоугольник правой или левой диагональю. Тогда

$$\varphi_0 = \pi/2,\ C_2 = \frac{m-1}{m} D((b-a) + (d-c)) + D^2 \le D(D + P/2),$$

где $D = \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}$ — длина диагонали прямоугольника, а $P = 2(b-a+d-c)$ — его периметр.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-41-02517-р_поволжье_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гацунаев, М. А. Приближенное вычисление площади поверхности / М. А. Гацунаев // Материалы Научной сессии, г. Волгоград, 26–30 апр. 2010 г. Математика и информационные технологии. — 2010. — Вып. 6. — С. 66–70.

2. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович. — М. : Наука, 1950. — 696 с.

3. Клячин, А. А. О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности / А. А. Клячин, М. А. Гацунаев // Уфим. мат. журн. — 2014. — № 6 (3). — С. 3–16.

4. Клячин, В. А. C^1-аппроксимация поверхностей уровня функций, заданных на нерегулярных сетках / В. А. Клячин, Е. А. Пабат // Сиб. журн. индустр. мат. — 2010. — № XIII (2). — С. 69–78.

5. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. — М. : Наука, 1970. — 512 с.

6. Floater, M. S. Extrapolation methods for approximating arc length and surface area / M. S. Floater, A. F. Rasmussen, U. Reif // Numerical Algorithms. — 2007. — Vol. 44, iss. 3. — P. 235–248.

REFERENCES

1. Gatsunaev M.A. Priblizhennoe vychislenie ploshchadi poverkhnosti [Approximate calculation of the surface area]. *Materialy Nauchnoy sessii, g. Volgograd, 26–30 apr. 2010 g. Matematika i informatsionnye tekhnologii*, 2010, iss. 6, pp. 66-70.

2. Kantorovich L.V. *Priblizhennye metody vysshego analiza* [Approximate methods of higher analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1950. 696 p.

3. Klyachin A.A., Gatsunaev M.A. O ravnomernoy skhodimosti kusochno-lineynykh resheniy uravneniya minimalnoy poverkhnosti [On uniform convergence of piecewise linear solutions of the minimal surface equation]. *Ufim. mat. zhurn.* [Ufa Mathematical Journal], 2014, no. 6 (3), pp. 3-16.

4. Klyachin V.A., Pabat E.A. C^1-approksimatsiya poverkhnostey urovnya funktsiy, zadannykh na neregulyarnykh setkakh [C^1-approximation of the level surfaces of functions defined on irregular grids]. *Sib. zhurn. industr. mat.* [Journal of Applied and Industrial Mathematics], 2010, no. XIII (2), pp. 69-78.

5. Mikhlin S.G. *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational methods in mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 512 p.

6. Floater M.S., Rasmussen A.F., Reif U. Extrapolation methods for approximating arc length and surface area. *Numerical Algorithms*, 2007, vol. 44, iss. 3, pp. 235-248.

ERROR ESTIMATE CALCULATION OF INTEGRAL FUNCTIONALS USING PIECEWISE LINEAR FUNCTIONS

Klyachin Aleksey Aleksandrovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
klyachin-aa@yandex.ru, matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. Consider the functional given by the integral

$$I(u) = \int_{\Omega} G(x, u, \nabla u)dx, \tag{1}$$

defined for functions $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Note that the Euler — Lagrange equation of the variational problem for this functional has the form

$$Q[u] \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(G'_{\xi_i}(x, u, \nabla u)\right)'_{x_i} - G'_u(x, u, \nabla u) = 0. \tag{2}$$

Where $G(x, u, \nabla u) = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$. Equation (2) is the equation of a minimal surface. Another example is the Poisson equation $\Delta u = f(x)$, which corresponds to the function $G(x, u, \nabla u) = |\nabla u|^2 + 2f(x)u(x)$.

Next, we examine the question of the degree of approximation of the functional (1) by piecewise linear functions. For such problems lead the convergence of variational methods for some boundary value problems. Note that the derivatives of a continuously differentiable function approach derived piecewise linear function with an error of the first order with respect to the diameter of the triangles of the triangulation. We obtain that the value of the integral (1) for functions in C^2 is possible to bring a greater degree of accuracy. Note also that in [1; 6] estimates the error calculation of the surface triangulation, built on a rectangular grid.

Key words: piecewise linear functions, approximation of functional, triangulation, degree of error, fineness of partition.