



DOI: <http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2015.1.4>

УДК 519.6

ББК 22.193

## РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ЛАГРАНЖЕВО-ЭЙЛЕРОВОЙ СХЕМЫ LES — ASG<sup>1</sup>

**Белоусов Антон Владимирович**

Студент Института математики и информационных технологий,  
Волгоградский государственный университет  
[anton.belousov@mail.ru](mailto:anton.belousov@mail.ru), [infomod@volsu.ru](mailto:infomod@volsu.ru)  
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Храпов Сергей Сергеевич**

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем и  
компьютерного моделирования,  
Волгоградский государственный университет  
[xss-ip@mail.ru](mailto:xss-ip@mail.ru), [infomod@volsu.ru](mailto:infomod@volsu.ru)  
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Аннотация.** Представлены результаты численного моделирования уравнения переноса с неоднородным распределением скорости для одномерного случая. Проведен анализ и сравнение численных схем LES и MUSCL для кусочно-линейной и кусочно-постоянной реконструкции.

**Ключевые слова:** численные схемы, LES, ASG, MUSCL, лагранжево-эйлерова схема.

### Введение

В данной работе проведено сравнение двух типов решения уравнения переноса с неоднородным распределением скорости, а именно LES (лагранжево-эйлерова схема) и MUSCL (Monotonic Upstream-Centered Scheme). По результатам сравнения можно определить эффективность схем, а также точность по отношению к вычислительным затратам для схем равного порядка точности. Все полученные данные будут способствовать дальнейшей реализации схемы LES — ASG уравнений газодинамики.

## 1. Численные схемы

Разработка новых и модификация уже существующих численных методов для повышения их эффективности всегда были актуальными задачами вычислительной математики. Это связано как с практической необходимостью нахождения решений новых сложных задач, так и самой логикой развития численных методов как раздела прикладной математики.

Для построения численного алгоритма необходимо прежде всего четко поставить математическую задачу, эквивалентную данной физической задаче. Кроме того, алгоритм, позволяющий корректно производить вычисления, должен удовлетворять ряду требований, чего не всегда просто добиться в каждой конкретной ситуации.

Известно, что решения различных задач математической физики, которые описываются гиперболическими системами уравнений, могут быть гладкими в одних областях и разрывными в других [1; 5; 6; 8; 9]. Разрывные решения могут при этом возникать из гладких начальных данных. Такие свойства решений налагают на алгоритмы численного решения достаточно жесткие требования. С одной стороны, численный метод должен уметь сохранять свойство монотонности в тех областях, где искомые решения имеют большие перепады значений. С другой стороны, тот же метод должен обладать высоким порядком точности в тех областях, где решение является гладким.

### 1.1. Схема MUSCL

Данная схема относится к методу конечных объемов, обеспечивает высокую точность решения. Идея состоит в том, чтобы заменить кусочно-постоянную аппроксимацию на реконструкцию ячеек и получить их промежуточные состояния на каждом временном шаге. Для каждой ячейки ограничен угол наклона, реконструкция левой и правой ячейки производится непосредственно через вычисление потоков на границах ячеек [3; 11].

### 1.2. Схема LES

Численные схемы, основанные на лагранжевом или эйлеровом подходах, обладают как преимуществами, так и недостатками. Комбинирование лагранжева и эйлерова подходов в рамках одного алгоритма позволяет объединить преимущества обоих методов. Для численного решения можно применить схему «предиктор — корректор». LES является обобщением новой численной схемы cSPH — TVD (combined Smoothed Particle Hydrodynamics — Total Variation Diminishing) [4; 7; 10; 12; 13]. Схема LES строится для уравнения переноса, не только для гидродинамического моделирования, но и прекрасно подходит для задач по переносу загрязненных примесей в приземном слое атмосферы [2].

### 1.3. Кусочно-постоянная реконструкция

Рассмотрим одномерное уравнение переноса с неоднородным распределением скорости:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial UQ}{\partial x} = 0, \quad U = U(t) \neq \text{const.} \quad (1)$$

Применив схему MUSCL к уравнению (1), получим

$$Q_i^{n+1} = (1 - A_1(i))Q_i^n + A_2(i)Q_{i-1}^n, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(i) &= C_{i+1/2} \left( 1 - \frac{C_{i+1/2} - C_{i-1/2}}{2} \right), \\ A_2(i) &= C_{i-1/2} \left( 1 - \frac{C_{i-1/2} - C_{i-3/2}}{2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Следует учитывать условия устойчивости

$$C_i = \frac{U_i \tau}{h}, \quad C_i < 1. \quad (4)$$

Для реализации схемы LES уравнение (1) будет иметь вид

$$Q_i^{n+1} = \left( 1 - \frac{B_1(i)}{\delta_i^+} \right) Q_i^n + \frac{B_2(i)}{\delta_{i-1}^+} Q_{i-1}^n, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} B_1(i) &= C_{i+1/2}, \\ B_2(i) &= C_{i-1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Погрешность для обеих схем рассчитываем через соотношение (7)

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |Q_i - Q'_i|, \quad C_i < 1. \quad (7)$$

#### 1.4. Кусочно-линейная реконструкция

Применив схему MUSCL к уравнению (1), получим

$$Q_i^{n+1} = (1 - A_1(i))Q_i^n + A_2(i)Q_{i-1}^n - A_3(i)\lambda_i^n \frac{h}{2} + A_4(i)\lambda_{i-1}^n \frac{h}{2}, \quad (8)$$

где  $B_1, B_2, B_3$  и  $B_4$  рассчитываем через соотношение (9)

$$\begin{aligned} A_1(i) &= C_{i+1/2} \left( 1 - \frac{C_{i+1/2} - C_{i-1/2}}{2} \right), \\ A_2(i) &= C_{i-1/2} \left( 1 - \frac{C_{i-1/2} - C_{i-3/2}}{2} \right), \\ A_3(i) &= C_{i+1/2} \left( 1 - \frac{C_{i+1/2} + C_{i-1/2}}{2} \right), \\ A_4(i) &= C_{i-1/2} \left( 1 - \frac{C_{i-1/2} + C_{i-3/2}}{2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Как и в кусочно-постоянной реконструкции, следует учитывать условия устойчивости (4).

Для реализации схемы LES применим шаг «предиктор — корректор» к уравнению (1) и в результате получим

$$Q_i^{n+1} = \left(1 - \frac{B_1(i)}{\delta_i^+}\right) Q_i^n + \frac{B_2(i)}{\delta_{i-1}^+} Q_{i-1}^n - B_3(i) \lambda_i^n \frac{h}{2} + B_4(i) \lambda_{i-1}^n \frac{h}{2}, \quad (10)$$

где  $B_1, B_2, B_3, B_4, \delta_i^+$  и  $\delta_{i-1}^+$  рассчитываем через соотношения (11) и (12)

$$\begin{aligned} B_1(i) &= C_{i+1/2}, \\ B_2(i) &= C_{i-1/2}, \\ B_3(i) &= C_{i+1/2}(1 - C_i), \\ B_4(i) &= C_{i-1/2}(1 - C_{i-1}). \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \delta_i^+ &= 1 + C_{i+1/2} - C_i, \\ \delta_{i-1}^+ &= 1 + C_{i-1/2} - C_{i-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

## 2. Проведение вычислительных экспериментов

Проведем сравнение численных схем MUSCL и LES для кусочно-линейной и кусочно-постоянной реконструкции для решения уравнения переноса с неоднородным распределением скорости. Следует обратить внимание, что обе схемы совпадают при  $U = \text{const}$ , а также схемы хороши для реализации переноса гладких профилей, поэтому рассмотрим, как будет вести себя профиль, представленный на рисунках 1 и 2.

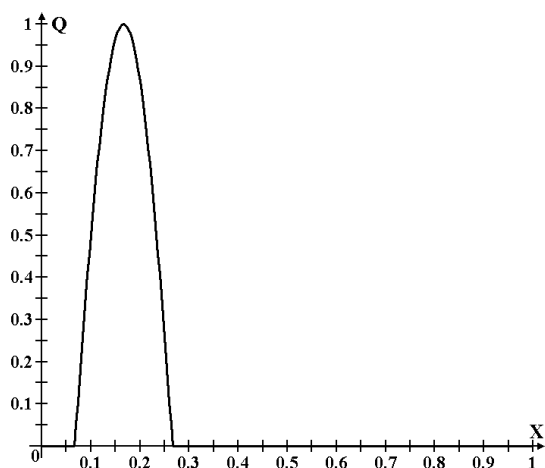


Рис. 1. Исходный профиль

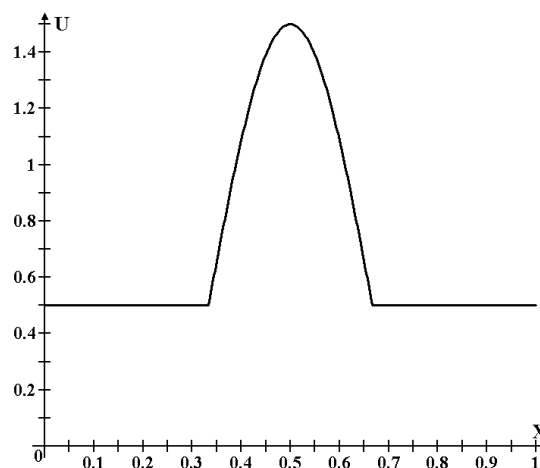


Рис. 2. Профиль скорости

Проведем тестовые расчеты и получим решения на сетках с частотой дискретной пространственной дискретизации  $N$ : 300, 600, 1 200, 2 400, 4 800, 9 600. Будем использовать ограничитель  $\text{minmod}$ . Количество итераций для  $N = 300$  будет 970, а для каждого последующего  $N$  количество итераций увеличивается в два раза, для удовлетворения условия (4).

$$\lambda_i^n = L\left(\frac{U_{i+1} - U_i}{h}, \frac{U_i - U_{i-1}}{h}\right),$$

$$L(a, b) = \frac{1}{2}(\text{sign}(a) + \text{sign}(b))\min(|a|, |b|).$$
(13)

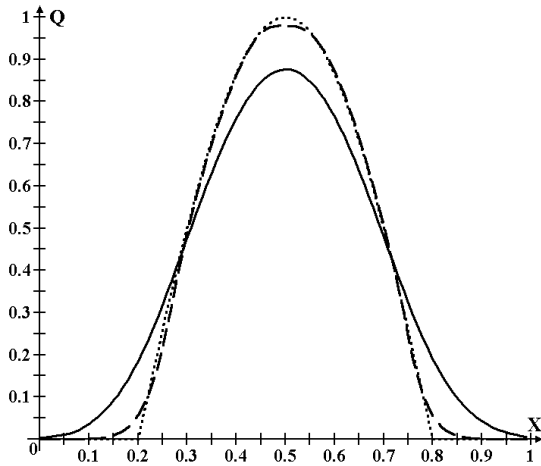


Рис. 3. Конечные профили для схемы LES при  $N = 300$ , где: сплошная линия — это кусочно-постоянная реконструкция; прерывистая линия — это кусочно-линейная реконструкция; пунктирная линия — это исходный профиль

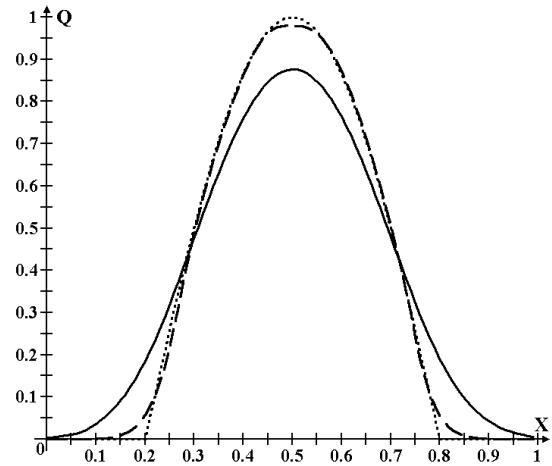


Рис. 4. Конечные профили для схемы MUSCL при  $N = 300$ , где: сплошная линия — это кусочно-постоянная реконструкция; прерывистая линия — это кусочно-линейная реконструкция; пунктирная линия — это исходный профиль

Обратим внимание на то, что обе схемы (рис. 3 и 4) почти полностью совпадают в конечных профилях. Более подробные результаты испытаний представлены на рисунках 5–8, а также в таблице 1.

Таблица 1

**Результаты тестов, погрешность вычислений**

N	Кусочно-постоянная реконструкция		Кусочно-линейная реконструкция	
	MUSCL	LES	MUSCL	LES
300	$7,5455 \times 10^{-2}$	$7,5451 \times 10^{-2}$	$2,0163 \times 10^{-2}$	$1,0191 \times 10^{-2}$
600	$4,2171 \times 10^{-2}$	$4,2169 \times 10^{-2}$	$5,7162 \times 10^{-3}$	$5,7275 \times 10^{-3}$
1 200	$2,2633 \times 10^{-2}$	$2,2633 \times 10^{-2}$	$2,6335 \times 10^{-3}$	$2,6309 \times 10^{-3}$
2 400	$1,1818 \times 10^{-2}$	$1,1818 \times 10^{-2}$	$1,2402 \times 10^{-3}$	$1,2411 \times 10^{-3}$
4 800	$6,0794 \times 10^{-3}$	$6,0794 \times 10^{-3}$	$5,9244 \times 10^{-4}$	$5,9223 \times 10^{-4}$
9 600	$3,0903 \times 10^{-3}$	$3,0903 \times 10^{-3}$	$2,7158 \times 10^{-4}$	$2,7163 \times 10^{-4}$

Составим формулу, по которой будем сравнивать кусочно-линейную схему MUSCL с LES.

$$F(x) = \log_{10} \sum_{i=0}^N Q_i - Q_i^*,$$
(14)

где  $Q_i$  — решение по MUSCL, а  $Q_i^*$  — решение по LES.

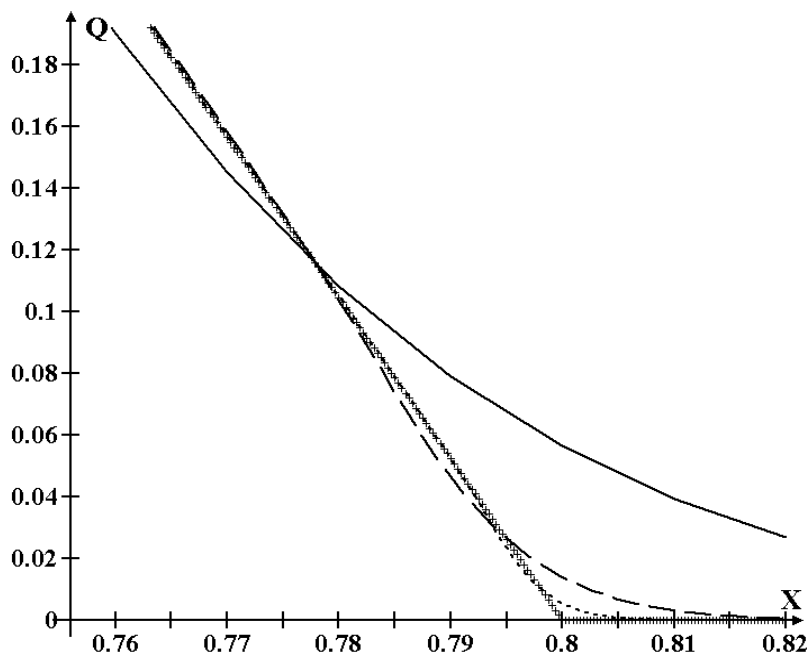


Рис. 5. Вырезка из конечного профиля схемы LES с кусочно-линейной реконструкцией на сетках  $N = 300$  (сплошная линия),  $N = 2400$  (прерывистая линия),  $N = 9600$  (пунктирная линия), исходный профиль (плюс)

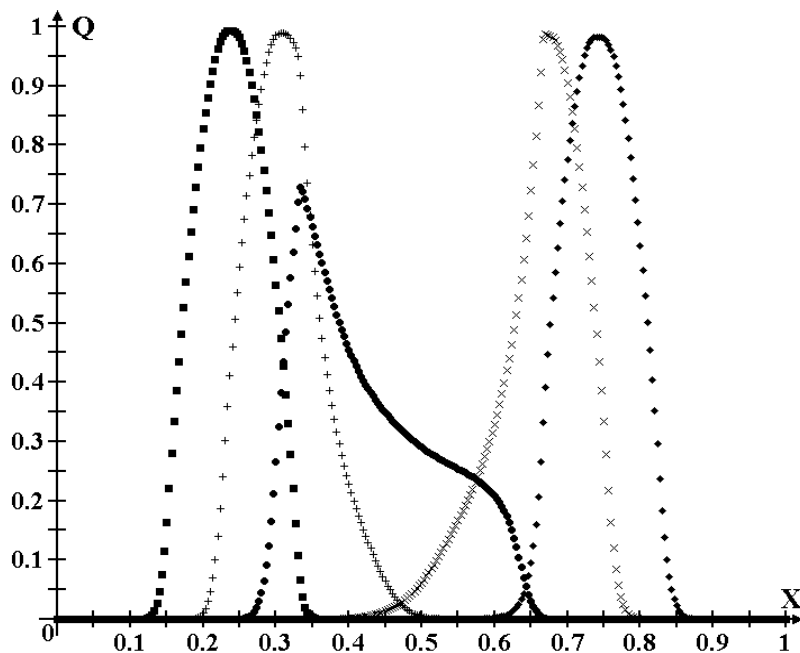


Рис. 6. Профиль схемы LES с кусочно-линейной реконструкцией в моменты итераций 150 (квадрат), 300 (плюс), 450 (круг), 700 (крест), 850 (ромб), для  $N = 300$

При проведении тестовых расчетов мы получили данные, на основе которых можем полагать, что численные схемы MUSCL и LES одинаково хорошо применимы для моделирования уравнений переноса.

По итогам проведенной работы мы удостоверились в правильности выбора схемы LES для последующей разработки программы для численного газодинамического моделирования на основе схемы LES — ASG.

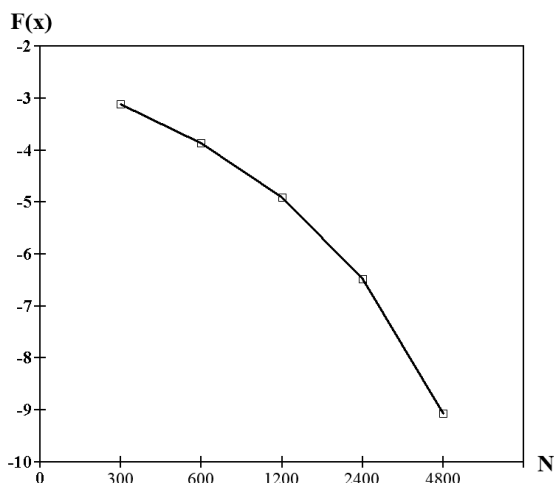


Рис. 7. Отличие кусочно-линейной схемы MUSCL от LES по формуле (14)

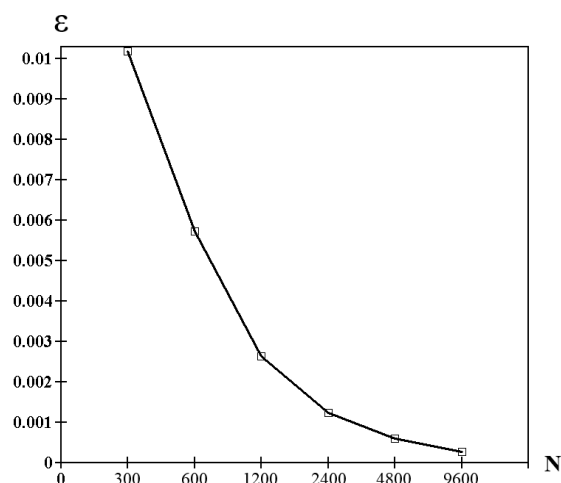


Рис. 8. Погрешность вычислений кусочно-линейной схемы LES

### ПРИМЕЧАНИЕ

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 15-02-06204.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиев, А. В. Иерархический SPH-метод для математического моделирования в гравитационной газовой динамике / А. В. Алиев, Г. А. Тарнавский // Сиб. электрон. мат. изв. — 2007. — С. 376–434.
2. Белослудцев, А. А. Информационно-компьютерный комплекс для моделирования динамики примесей от предприятий химической промышленности / А. А. Белослудцев, Д. В. Гусаров, М. А. Еремин, Н. М. Кузьмин, С. А. Хоперсков, С. С. Храпов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2009. — № 12. — С. 95–102.
3. Еремин, М. А. Конечно-объемная схема интегрирования уравнений гидродинамики / М. А. Еремин, А. В. Хоперсков, С. А. Хоперсков // Изв. Волгогр. гос. техн. ун-та. — 2010. — № 6:8. — С. 24–27.
4. Жумалиев, А. Г. Численная схема cSPH — TVD: моделирование фронта ударной волны / А. Г. Жумалиев, С. С. Храпов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2012. — № 16. — С. 60–67.
5. Кузьмин, Н. М. Численное моделирование эволюции неустойчивых мод джетов, выходящих из молодых звездных объектов / Н. М. Кузьмин, В. В. Мусцовой, С. С. Храпов // Астрон. журн. — 2007. — № 84:12. — С. 1089–1098.
6. Куликовский, А. Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. — М. : ФИЗМАТ-ЛИТ, 2001. — 608 с.
7. Кузьмин, Н. М. Численная схема cSPH — TVD: исследование влияния ограничений наклонов / Н. М. Кузьмин, А. В. Белоусов, Т. С. Шушкевич, С. С. Храпов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2014. — № 1. — С. 22–33.
8. Писарев, А. В. Особенности динамики затопления Волго-Ахтубинской поймы в зависимости от режимов испарения и инфильтрации / А. В. Писарев, С. С. Храпов,

А. А. Воронин, Т. А. Дьяконова, Е. А. Циркова // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2012. — № 1. — С. 36–41.

9. Писарев, А. В. Численная модель динамики поверхностных вод в русле Волги: оценка коэффициента шероховатости / А. В. Писарев, С. С. Храпов, Е. О. Агафонникова, А. В. Хоперсков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2013. — № 1. — С. 114–130.

10. Храпов, С. С. Численная схема для моделирования динамики поверхностных вод на основе комбинированного SPH-TVD-подхода / С. С. Храпов, А. В. Хоперсков, Н. М. Кузьмин, А. В. Писарев, И. А. Кобелев // Вычислительные методы и программирование. — 2011. — Т. 12, № 1. — С. 282–297.

11. Хоперсков, А. В. Динамика газового диска в неосесимметричном темном гало / А. В. Хоперсков, М. А. Еремин, С. А. Хоперсков, М. А. Бутенко, А. Г. Морозов // Астрон. журн. — 2012. — № 89:1. — С. 19–31.

12. Хоперсков, А. В. Задача управления гидрологическим режимом в эколого-экономической системе «Волжская ГЭС — Волго-Ахтубинская пойма». Ч. 1. Моделирование динамики поверхностных вод в период весеннего паводка / А. В. Хоперсков, С. С. Храпов, А. В. Писарев, А. А. Воронин, М. В. Елисеева, И. А. Кобелев // Проблемы управления. — 2012. — № 5. — С. 18–25.

13. Khrapov S. The Numerical Simulation of Shallow Water: Estimation of the Roughness Coefficient on the Flood Stage / S. Khrapov, A. Pisarev, I. Kobelev, A. Zhumaliev, E. Agafonnikova, A. Losev, A. Khoperskov // Advances in Mechanical Engineering. — 2013. — Vol. 2013. — Article ID 787016, 11 pages.

## REFERENCES

1. Aliev A.V., Tarnavskiy G.A. Ierarkhicheskiy SPH-metod dlya matematicheskogo modelirovaniya v gravitatsionnoy gazovoy dinamike [The hierarchical SPH-method for mathematical modeling in gravitational gas dynamics]. *Sib. elektron. mat. izv.*, 2007, pp. 376–434.

2. Belosludtsev A.A., Gusarov D.V., Eremin M.A., Kuzmin N.M., Khoperskov S.A., Khrapov S.S. Informatsionno-kompyuternyy kompleks dlya modelirovaniya dinamiki primesey ot predpriyatiy khimicheskoy promyshlennosti [Information and computer system for modeling the dynamics of impurities from the chemical industry]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2009, no. 12, pp. 95–102.

3. Eremin M.A., Khoperskov A.V., Khoperskov S.A. Konechno-obyemnaya skhema integrirovaniya uravneniy gidrodinamiki [A finite-volume scheme for integrating the equations of hydrodynamics]. *Izv. Volgogr. gos. tekhn. un-ta*, 2010, no. 6:8, pp. 24–27.

4. Zhumaliev A.G., Khrapov S.S. Chislennaya skhema cSPH — TVD: modelirovanie fronta udarnoy volny [Numerical scheme cSPH-TVD: simulation of the shock front]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2012, no. 16, pp. 60–67.

5. Kuzmin N.M., Mustsevov V.V., Khrapov S.S. Chislennoe modelirovanie evolyutsii neustoychivyykh mod dzhetov, vykhodyashchikh iz molodykh zvezdnykh obyektov [Numerical Modeling of the Evolution of Unstable Modes of Jets from Young Stellar Objects]. *Astron. zhurn.* [Astronomy Reports], 2007, no. 84:12, pp. 1089–1098.

6. Kulikovskiy A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. *Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravneniy* [Mathematical problems in the numerical solution of hyperbolic systems]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2001. 608 p.

7. Kuzmin N.M., Belousov A.V., Shushkevich T.S., Khrapov S.S. Chislennaya skhema sSPH — TVD: issledovanie vliyaniya ogranichiteley naklonov [Numerical scheme CSPH - TVD: study of the impact limiters slopes]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2014, no. 1, pp. 22–33.



8. Pisarev A.V., Khrapov S.S., Voronin A.A., Dyakonova T.A., Tsirkova E.A. Osobennosti dinamiki zatopleniya Volgo-Akhtubinskoy poymy v zavisimosti ot rezhimov ispareniya i infiltratsii [Features of the dynamics of flooding of the Volga-Akhtuba floodplain, depending on the mode of evaporation and infiltration]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2012, no. 1, pp. 36-41.

9. Pisarev A.V., Khrapov S.S., Agafonnikova E.O., Khoperskov A.V. Chislennaya model dinamiki poverkhnostnykh vod v rusle Volgi: otsenka koeffitsienta sherokhovatosti [Numerical model of dynamics of surface waters in line with the Volga: the estimated coefficient of roughness]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye nauki*, 2013, no. 1, pp. 114-130.

10. Khrapov C.C., Khoperskov A.V., Kuzmin N.M., Pisarev A.V., Kobelev I.A. Chislennaya skhema dlya modelirovaniya dinamiki poverkhnostnykh vod na osnove kombinirovannogo SPH-TVD-podkhoda [Numerical scheme for modeling the dynamics of surface water based on the combined SPH-TVD-approach]. *Vychislitelnye metody i programmirovaniye*, 2011, vol. 12, no. 1, pp. 282-297.

11. Khoperskov A.V., Eremin M.A., Khoperskov S.A., Butenko M.A., Morozov A.G. Dinamika gazovogo diska v neosesimmetrichnom temnom galo [Dynamics of Gaseous Disks in a Non-axisymmetric Dark Halo]. *Astron. zhurn.* [Astronomy Reports], 2012, no. 89:1, pp. 19-31.

12. Khoperskov A.V., Khrapov S.S., Pisarev A.V., Voronin A.A., Eliseeva M.V., Kobelev I.A. Zadacha upravleniya gidrologicheskim rezhimom v ekologo-ekonomicheskoy sisteme «Volzhskaya GES — Volgo-Akhtubinskaya poyma». Ch. 1. Modelirovaniye dinamiki poverkhnostnykh vod v period vesennego pavodka [The task of managing the hydrological regime in the ecological and economic system «Volga Hydroelectric Power Station — Volga-Akhtuba floodplain». Part 1. Modeling the dynamics of surface water during spring flood]. *Problemy upravleniya* [Control Sciences], 2012, no. 5, pp. 18-25.

13. Khrapov S., Pisarev A., Kobelev I., Zhumaliev A., Agafonnikova E., Losev A., Khoperskov A. The Numerical Simulation of Shallow Water: Estimation of the Roughness Coefficient on the Flood Stage. *Advances in Mechanical Engineering*, 2013, vol. 2013. Article ID 787016, 11 p.

## DEVELOPMENT OF THE PROGRAM FOR NUMERICAL GASDYNAMIC MODELING ON THE BASIS OF LAGRANGE — EULER SCHEME THE LES — ASG

**Belousov Anton Vladimirovich**

Student, Institute of Mathematics and Information Technologies,  
Volgograd State University  
anton.belousov@mail.ru, infomod@volsu.ru  
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Khrapov Sergeevich**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Associate Professor, Department of Information Systems and Computer Simulation,  
Volgograd State University  
xss-ip@mail.ru, infomod@volsu.ru  
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Abstract.** In this paper, the authors compare the two types of solving the transport equation with inhomogeneous distribution of velocity, namely LES (Lagrange — Euler scheme) and MUSCL (Monotonic Upstream-Centered Scheme).

Computational experiments LES schemes and MUSCL, using a piecewise linear and piecewise constant reconstruction, for solving the transport equation with inhomogeneous distribution of velocity. Note that both circuits coincide with  $U = \text{const}$ , as well as circuitry to implement good smooth transfer profiles. In the calculations limiter minmod is used. According to the results of comparison circuits to determine the effectiveness, as well as accuracy with respect to the computational cost for the accuracy of the order of equal circuits.

The authors study the results of calculations of numerical schemes for LES and MUSCL nets dimension 300, 600, 1 200, 2 400, 4 800 and 9 600. According to the research we can assume that the scheme LES and MUSCL equally well applicable for modeling the transport equation.

According to the results of the work we made sure that LES scheme and its subsequent development will continue on the basis of the scheme LES-ASG.

**Key words:** numerical schemes, LES, ASG, MUSCL, Lagrange — Euler scheme.