DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2015.3.3
УДК 514.142.2+514.174.6
ББК 32.973.26-018.2

АЛГОРИТМ ТРИАНГУЛЯЦИИ, ОСНОВАННЫЙ НА УСЛОВИИ ПУСТОГО ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА [1]

Владимир Александрович Клячин

Доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой компьютерных наук и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет
klchnv@mail.ru, kiem@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Статья посвящена классической задаче вычислительной геометрии — построению триангуляции заданного конечного множества евклидова пространства. Наиболее часто используемый в настоящее время способ триангуляции был открыт советским геометром Б.Н. Делоне в 30-х годах прошлого века. Этот способ использует специальное условие — условие пустой сферы. В настоящей статье автор предлагает целую серию способов триангуляций фиксированного конечного множества, которые основаны на условии, аналогичном условию Делоне. Только в предлагаемом методе фигурирует не евклидова сфера, а некоторое выпуклое множество с непустой внутренностью.

Ключевые слова: триангуляция, условие пустой сферы, триангуляция Делоне, выпуклое множество, выпуклая функция, выпуклая оболочка.

1. Триангуляция конечного множества точек

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, в котором введен ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^n$. Через $\langle , \rangle$ мы обозначаем скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ — соответствующие выбранному базису декартовы координаты.

Напомним, что k-мерным симплексом $S = S(A_0, A_1, ..., A_k)$ в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка $k+1$ точек $A_i, i = 0, ..., k \leq n$, таких, что векторы $A_1 - A_0$, $A_2 - A_0$, ..., $A_k - A_0$ линейно независимы. Рассмотрим какой-либо n-мерный симплекс S. Пусть $H_k^{\pm}(S)$ обозначает открытое полупространство, определяемое плоскостью, проходящей через k-ю $(n-1)$-мерную грань симплекса S, и содержащее (для $H_k^+(S)$) или не содержащее (для $H_k^-(S)$) симплекс S. Если из контекста ясно, о каком симплексе идет речь, мы будем опускать его обозначение в обозначениях этих полупространств. Также вместо обозначения симплекса мы равнозначно будем использовать набор его вершин.

Пусть $\{P_i\}$, $i = 1, ..., N$, — некоторый набор P точек $P_i \in \mathbb{R}^n$, таких, что любой симплекс в вершинах из $\{P_i\}$ является невырожденным. Триангуляцией T заданного набора точек называется такой набор n-мерных симплексов $S_1, ..., S_m$, что:

1) каждая точка P_i заданного набора является вершиной одного из симплексов $S \in T$;

2) каждая вершина любого симплекса $S \in T$ является одной из точек P_i, $i = 1, ..., N$;

3) внутренность пересечения любых двух симплексов пуста.

Один из первых алгоритмов триангуляции с использованием условия пустого шара был предложен Б.Н. Делоне в его работе [6] (перевод см. [1]). Это условие означает, что описанная сфера каждого симплекса триангуляции не содержит внутри себя точек заданного конечного множества. Триангуляции, для которых выполняется это условие, получили название триангуляции Делоне [4; 5]. Несложно показать, что при выполнении условия, что никакие n точек из P не лежат на одной гиперплоскости и никакие $n+1$ точек не лежат на одной $(n-1)$-мерной сфере, триангуляция Делоне существует и единственна. С другой стороны, для конечного множества точек общего положения $\{P_i\}$, $i = 1, ..., N$, число различных триангуляций этого множества растет с ростом N порядка c^N (см., например, работу [3] и цитируемую там литературу). Эти факты позволяют поставить задачу о выделении в классе всех триангуляций заданного конечного множества некоторого естественного подкласса, который бы включал в себя классическую триангуляцию Делоне в качестве частного случая.

Практически все алгоритмы построения триангуляции Делоне включают в себя процедуру проверки условия пустой сферы на определенных этапах алгоритма. Хороший обзор алгоритмов имеется в работе [5]. В настоящей статье мы тоже сосредоточимся на подобной процедуре, заменив условие пустой сферы условием пустого выпуклого множества. Дадим соответствующие определения.

2. Семейства выпуклых множеств

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ семейство $\Phi = \Phi_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$, выпуклых компактных множеств с непустой внутренностью. Пусть S произвольный невырожденный симплекс. Определим описанное множество $B(S) \in \Phi$ (если оно существует) из данного семейства как множество, чья граница содержит вершины симплекса (а значит, содержит весь симплекс в силу выпуклости).

Определение 1. *Рассмотрим произвольную триангуляцию конечного множества точек P. Будем говорить, что эта триангуляция является Φ-триангуляцией, если для любого симплекса S этой триангуляции внутренность множества $B(S)$ не содержит вершин других симплексов.*

Заметим, что если семейство Φ представляет собой семейство всех шаров в $\mathbb{R}^n$, то вышеприведенное определение совпадает с определением триангуляции Делоне. В работе [2] было доказано существование ϕ-триангуляции конечного множества точек при условии, что семейство Φ обладает следующим свойством: для любого невырожденного симплекса S в семействе $\Phi = \Phi_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$, существует, и притом только одно, описанное множество $B(S)$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что это условие на семейство выпуклых множеств выполненным.

Теорема 1. *Если семейство выпуклых множеств* $\Phi = \Phi_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}$, *обладает вышеприведенным свойством, то описанные множества симплексов обладают следующими свойствами:*

1) *множество* $B(S)$ *однозначно определяется любым симплексом с вершинами на его границе;*

2) *если для двух невырожденных симплексов* S_1, S_2 *выполнено* $B(S_1) \neq B(S_2)$ *и пересечение* $B(S_1) \cap B(S_2)$ *не пусто, то персечение границ множеств* $B(S_1), B(S_2)$ *представляет собой* $(n-2)$*-мерную выпуклую поверхность, лежащую в некоторой гиперплоскости;*

3) *если два симплекса* S_1 *и* S_2 *не пересекаются по внутренним точкам, имеют общую* $(n-1)$*-мерную грань* G *и вершины симплексов* A, B, *не принадлежащие грани* G, *причем* $B(S_1)$ *не содержит внутри себя вершину* B *симплекса* S_2, *то* $B(S_2)$ *не содержит внутри себя вершины* A *симплекса* S_1.

Доказательство. Первое свойство непосредственно следует из условия на семейство $\Phi_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$. Второе свойство доказывается от противного. Если предположить, что пересечение $\partial B(S_1) \cap \partial B(S_2)$ не лежит ни в какой гиперплоскости, то найдется некоторый невырожденный симплекс S' с вершинами на этом пересечении. Но тогда и $B(S_1)$ и $B(S_2)$ будут описанными множествами симплекса S', что противоречит условию единственности. Таким образом, пересечение $\partial B(S_1) \cap \partial B(S_2)$ лежит в некоторой гиперплоскости. Выпуклость пересечения очевидно следует из выпуклости множеств $B(S_1),\ B(S_2)$ (см. рис. 1).

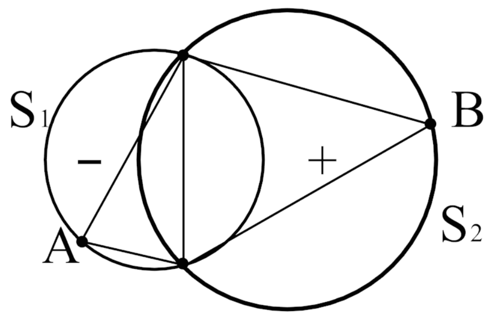

Рис. 1. К доказательству теоремы 1

Докажем третье свойство. Пусть Π — гиперплоскость, содержащая пересечение $\partial B(S_1) \cap \partial B(S_2)$. Эта гиперплоскость разбивает каждое из $B(S_i),\ i = 1, 2$, на две выпуклые части $B^{\pm}(S_i)$. Для определенности будем считать, что $B \in B^+(S_2)$ и, следовательно, в силу того, что B не лежит внутри $B(S_1)$, выполнено $B \notin B^+(S_1)$. Тогда $B^+(S_1) \subset B^+(S_2),\ B^-(S_2) \subset B^-(S_1)$. Если предположить, что точка A лежит внутри $B(S_2)$, то получим, что $A \in B^-(S_2)$. Поскольку эта точка лежит на границе $B(S_1)$, то заключаем, что $B^-(S_1) \subset B^-(S_2)$. Но это противоречит вложению $B^-(S_2) \subset B^-(S_1)$. Следовательно, A не может лежать внутри $B(S_2)$. Теорема доказана полностью.

Заметим, что в общем случае указать способ построения $B(S)$ для произвольного симплекса S, а также способ проверки условия пустого выпуклого множества из Φ_α представляет собой сложную задачу. Однако мы укажем целую серию семейств Φ_α, для которых это сделать удается.

3. Пример семейства Φ_α

Рассмотрим произвольную строго выпуклую вниз гладкую функцию $x_{n+1} = \Psi(x)$, определенную во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и такую, что

$$\frac{\Psi(x)}{|x|} \to +\infty \text{ при } x \to \infty. \tag{1}$$

При выполнении этого условия пересечение графика функции $\Psi(x)$ с произвольной невертикальной плоскостью Π представляет собой выпуклую компактную $(n-1)$-мерную поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$. Положим для любых $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$

$$\Phi(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \Psi(y) \leq \Psi(x) + \langle \nabla\Psi(x), y - x\rangle + r\}.$$

В силу свойства (1) и выпуклости $\Psi(x)$ множества $\Phi(x,r)$ образуют семейство выпуклых компактных множеств. Покажем, что для всякого невырожденного симплекса S можно построить единственное описанное множество из этого семейства. Пусть также точки $p_0, ..., p_n \in \mathbb{R}^n$ образуют произвольный невырожденный симплекс S. В пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ построим набор точек $Q_i = (p_i, \Psi(p_i)),\ i = 0, ..., n$. Построим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ плоскость Π, проходящую через эти точки. Очевидно, что проекция пересечения этой плоскости с графиком функции $\Psi(x)$ представляет собой границу некоторого множества $Phi(x,r)$. При этом точка x — это единственная точка, в которой касательная к графику параллельна плоскости Π. Существование и единственность такой точки следуют из выпуклости и гладкости функции $\Psi(x)$.

Теперь обратимся к вопросу проверки условия пустоты множеств вида $B(x,r)$. С этой целью построим функцию $H(p_0, ..., p_n)$, зависящую от $(n+1)$ точек из $\mathbb{R}^n$. Пусть точки $p_0, ..., p_n \in \mathbb{R}^n$ образуют произвольный невырожденный симплекс. В пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ построим набор точек $Q_i = (p_i, \Psi(p_i)),\ i = 0, ..., n$. Построим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ плоскость Π, проходящую через эти точки и еще вертикальную гиперплоскость Π', проходящую через точки $Q_0, ..., Q_{n-1}$. Ориентируем эти плоскости нормалями ξ и ξ' соответственно следующим образом. Нормаль ξ для Π направим вверх, то есть так, чтобы $\langle e_{n+1}, \xi\rangle \geq 0$ (здесь e_{n+1} — единичный вектор положительного направления оси Ox_{n+1}). Вектор ξ' выберем как внутренний вектор по отношению к симплексу $S(p_0, ..., p_n)$. Такой выбор корректен, поскольку плоскость Π' проходит через грань этого симплекса, определяемую вершинами $p_0, ..., p_n$. В качестве значения функции $H(p_0, ..., p_n)$ возьмем величину угла между нормалями ξ и ξ'. В основе проверки условия пустоты лежит следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ произвольное конечное множество. Зафиксируем произвольно $p_i \in P,\ i = 0, ..., n-1$ и пусть Π — гиперплоскость, проходящая через эти точки. Будем предполагать, что эти точки образуют невырожденный $(n-1)$-мерный симплекс. Пусть $P' \subset P$ — та часть точек из P, которые лежат по одну сторону от Π. Если точка $p_n \in P'$ такова, что*

$$H(p_0, ..., p_n) = \min_{p \in P'} H(p_0, ..., p_{n-1}, p),$$

то множество $B(S)$, где S — симплекс с вершинами $p_0, ..., p_n$ не содержит внутри себя точек из P'.

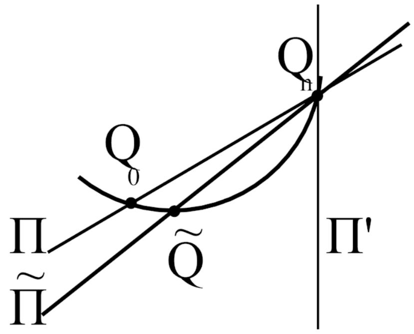

Рис. 2. К доказательству теоремы 2

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Предположим, что найдется точка $\tilde{p} \in P'$, лежащая внутри $B(S)$. Построим точку $\tilde{Q} = (\tilde{p},\ \Psi(p')) \in \mathbb{R}^{n+1}$. В силу выпуклости функции $\Psi(x)$ точка $\tilde{Q}$ лежит ниже гиперплоскости Π (см. рис. 2).

Пусть Π' — вертикальная гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящая через точки $Q_0, ..., Q_{n-1}$. Здесь точки Q_i, $i = 0, ..., n-1$, построены также, как и в определении функции $H(p_0, ..., p_n)$. Проведем через точки $Q_0, ..., Q_{n-1}, \tilde{Q}$ гиперплоскость $\tilde{\Pi}$. Поскольку точка $\tilde{Q}$ лежит ниже плоскости Π, то угол между плоскостями Π и Π' больше, чем угол между плоскостями $\tilde{\Pi}$ и Π'. Последнее, как нетрудно видеть, означает, что

$$H(p_0, ..., p_{n-1}, p_n) > H(p_0, ..., p_{n-1}, \tilde{p}).$$

Это противоречит выбору точки p_n. Таким образом, точка p' не может лежать внутри $B(S)$. Теорема доказана.

4. Выпуклая оболочка и триангуляция

Для приведенного выше примера семейства выпуклых множеств триангуляция с условием пустых описанных множеств может быть построена универсальным алгоритмом, не зависящим от заданной выпуклой функции $\Psi(x)$. Опишем соответствующую процедуру свед́ения построения триангуляции к построению выпуклой оболочки точек. Пусть $P \subset R^n$ произвольное конечное множество точек, таких что никакие $n+1$ из них не лежат в одной гиперплоскости и никакие $n+2$ из них не лежат на границе одного множества семейства $\Phi(x, r)$, построенного в предыдущем подразделе статьи. По множеству P построим множество

$$Q = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, ..., x_n) \in P,\ x_{n+1} = \Psi(x_1, ..., x_n)\}.$$

Выпуклая оболочка $\mathrm{conv}(Q)$ этих точек представляет собой выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^{n+1}$. Рассмотрим те грани этого многогранника, чьи внешние нормали ξ направлены «вниз», то есть для которых выполнено неравенство $\langle \xi, e_{n+1} \rangle < 0$. Проекция этих граней на плоскость $x_{n+1} = 0$ образует Φ-триангуляцию множества P. Действительно, из того, что никакие $n+2$ точек из P не лежат на границе одного множества семейства $\Phi(x, r)$, следует, что выбранные грани выпуклой оболочки $\mathrm{conv}(Q)$ имеют ровно $n+1$ вершину, то есть являются n-мерными симплексами в $\mathbb{R}^{n+1}$. Проекция симплекса тоже будет симплексом. В силу выбора граней проекции их не могут пересекаться по внутренним точкам. Таким образом, совокупность этих проекций образует триангуляцию множества P. Стоит заметить, что точки множества Q не могут лежать ниже гиперплоскости, содержащей любую выбранную грань. Это простое следствие выпуклости многогранника $\mathrm{conv}(Q)$. А это влечет выполнение условия пустого описанного множества для семейства $\Phi(x, r)$.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02517 р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Делоне, Б. Н. О пустой сфере. К мемуару Георгия Вороного / Б. Н. Делоне ; пер. с фр. А. Ю. Игумнов // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — 2006. — Т. 1. — С. 147–153.

2. Клячин, В. А. Об одном обобщении условия Делоне / В. А. Клячин // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. — 2008. — № 1. — С. 48–50.

3. Клячин, В. А. Метод цепей для организации хранения многомерных триангуляций / В. А. Клячин, В. В. Попов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2013. — № 2 (19). — С. 71–79. — DOI: 10.15688/jvolsu1.2013.2.8.

4. Майоров, А. А. Эффективный алгоритм построения триангуляции Делоне / А. А. Майоров, Т. К. Нгуен // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. — 2011. — № 1. — С. 105–108.

5. Скворцов, А. В. Алгоритмы построения и анализа триангуляции / А. В. Скворцов, Н. С. Мирза. — Томск : Изд-во Томск. ун-та, 2006. — 168 с.

6. Delaunay, B. N. Sur la sphere vide. A la memoire de Georges Voronoi / B. N. Delaunay // Известия АН СССР. — 1934. — № 6. — С. 793–800.

REFERENCES

1. Delaunay B.N. O pustoy sfere. K memuaru Georgiya Voronogo [On the Empty Sphere. To the Memory of Georges Voronoi]. *Zapiski seminara «Sverkhmedlennye protsessy»*, 2006, vol. 1, pp. 147-153.

2. Klyachin V.A. Ob odnom obobshchenii usloviya Delone [On Some Generalization of Delaunay Condition]. *Vestn. Tomsk. gos. un-ta. Matem. i mekh.*, 2008, no. 1, pp. 48-50.

3. Klyachin V.A., Popov V.V. Metod tsepey dlya organizatsii khraneniya mnogomernykh triangulyatsiy [Chain Method for Storage of Multidimensional Triangulations]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2013, no. 2 (19), pp. 71-79. DOI: 10.15688/jvolsu1.2013.2.8.

4. Mayorov A.A., Nguen T.K. Effektivnyy algoritm postroeniya triangulyatsii Delone [Effective Algorithm of Delaunay Triangulation]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Geodeziya i aerofotosyemka*, 2011, no. 1, pp. 105-108.

5. Skvortsov A.V., Mirza N.S. *Algoritmy postroeniya i analiza triangulyatsii* [Analisys and Algorithms of Triangulations]. Tomsk, Izd-vo Tomsk. un-ta Publ., 2006. 168 p.

6. Delaunay B.N. Sur la sphere vide. A la memoire de Georges Voronoi. *Izvestiya AN SSSR* [Izvestiya: Mathematics], 1934, no. 6, pp. 793-800.

TRIANGULATION ALGORITHM BASED ON EMPTY CONVEX SET CONDITION

Vladimir Aleksandrovich Klyachin

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Head of Department of Computer Science and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
klchnv@mail.ru, kiem@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. The article is devoted to generalization of Delaunay triangulation. We suggest to consider empty condition for special convex sets. For given finite set $P \subset \mathbb{R}^n$ we shall say that empty condition for convex set $B \subset \mathbb{R}^n$ is fullfiled if $P \cap B = P \cap \partial B$. Let $\Phi = \Phi_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}$ be a family of compact convex sets with non empty inner. Consider some nondegenerate simplex $S \subset \mathbb{R}^n$ with vertexes $p_0, ..., p_n$. We define the girth set $B(S) \in \Phi$ if $q_i \in \partial B(S), i = 0, 1, ..., n$. We suppose that the family Φ has the property: for arbitrary nondegenerate simplex S there is only one the girth set $B(S)$. We prove the following main result.

Theorem 1. If the family $\Phi = \Phi_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$ of convex sets have the pointed above property then for the girth sets it is true:

1. The set $B(S)$ is uniquely determined by any simplex with vertexes on $\partial B(S)$.
2. Let S_1, S_2 be two nondegenerate simplexes such that $B(S_1) \neq B(S_2)$. If the intersection $B(S_1) \cap B(S_2)$ is not empty, then the intersection of boundaries $B(S_1), B(S_2)$ is $(n-2)$-dimensional convex surface, lying in some hyperplane.
3. If two simplexes S_1 and S_2 don't intersect by inner points and have common $(n-1)$-dimensional face G and A, B are vertexes don't belong to face G and vertex B of simplex $B(S_2)$ such that $B \notin B(S_1)$ then $B(S_2)$ does not contain the vertex A of simplex S_1.

These statements allow us to define Φ-triangulation correctly by the following way. The given triangulation T of finite set $P \subset \mathbb{R}^n$ is called Φ-triangulation if for all simlex $S \in T$ the girth set $B(S) \in Phi$ is empty. In the paper we give algorithm for construct Φ-triangulation arbitrary finite set $P \subset \mathbb{R}^n$. Besides we describe exapmles of families Φ for which we prove the existence and uniqueness of girth set $B(S)$ for arbitrary nondegenerate simplex S.

Key words: triangulation, empty shpere condition, Delaunay triangulation, convex set, convex function, convex hull.