DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2015.3.5

УДК 519.21
ББК 22.172

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ МОНОТОННОСТИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СХЕМЫ БЕРНУЛЛИ

Александр Дмитриевич Веденяпин

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
yktis@mail.ru, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Сергей Александрович Митасов

Магистрант,
кафедра математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
mitasovsergey@mail.ru, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В данной работе, следуя статье [2], аналогичным образом строится функция распределения с использованием схемы Бернулли. Идея построения основана на модели Кокса – Росса – Рубинштейна «бинарный рынок». В данной статье был использован другой подход к определению «успеха» и «неудачи» на каждом шаге. Если в модели Кокса – Росса – Рубинштейна «успехом» или «неудачей» было изменение цены на какую-то фиксированную величину, то здесь в качестве «успеха» или «неудачи» на каждом шаге мы рассматриваем принадлежность изменения значения показателя либо к отрезку, либо к полуинтервалу. Для построенной функции автоматически выполняются все свойства функции распределения кроме монотонности. Соответственно, в работе найдено достаточное условие, при котором построенная функция будет монотонно неубывающей, то есть функцией распределения. Достаточное условие представлено ключевой теоремой 2.

Ключевые слова: бинарный рынок, схема Бернулли, функция распределения, вероятность, испытание-шаг, математическая модель.

Введение

Идея построения, также как и в статье [2], основана на модели Кокса – Росса – Рубинштейна «бинарный рынок» [3; 4]. «Суть их модели состояла в разбиении времени на N шагов и предположении, что цена актива на каждом шаге может двинуться либо вверх на определенную величину с вероятностью p, либо вниз, тоже на некоторую определенную величину с вероятностью $q = 1 - p$» [1]. Цены на шаге N могут принимать лишь конечное число значений. Эти значения принимаются с вероятностями, определяемыми формулой Бернулли: $w_{N,i} = C_N^i p^i q^{N-i}$, где i –

количество шагов движения цены вверх. Соответственно, чем больше N, тем большее количество возможных значений мы можем получить на шаге N.

В данной работе был использован другой подход к определению «успеха» и «неудачи» на каждом шаге. Если в модели Кокса – Росса – Рубинштейна «успехом» или «неудачей» было изменение цены на какую-то фиксированную величину, то здесь в качестве «успеха» или «неудачи» на каждом шаге мы рассматриваем принадлежность изменения значения показателя либо к отрезку $[r; S]$, либо к полуинтервалу $[I, r)$.

В статье [2] была допущена небрежность: построенная там функция не обязана быть монотонной; некоторые формулы нуждаются в корректировке по той причине, что вероятность, которую они дают, может оказаться больше единицы. Например, величина $P_2 = \frac{\mathrm{Max}(\Delta)}{\mathrm{Max}(\Delta) - \mathrm{Min}(\Delta)} \cdot \frac{P_1}{1 - P_1}$ может оказаться больше 1, если $P_1 > 1 - P_1$. Следуя статье [2], построим аналогичным образом функцию при помощи схемы Бернулли. Для этой функции автоматически будут выполняться все свойства функции распределения, кроме монотонности. Соответственно, найдем достаточное условие, при котором построенная функция будет монотонно неубывающей, то есть функцией распределения.

Построение функции $F(x)$

Пусть у нас есть статистические данные о величине какого-либо показателя Q за определенный период времени, который мы обозначим отрезком $[0, T]$. Осуществим разбиение промежутка времени $[0, T]$ на несколько равных промежутков Δt_i, $i = 1, 2, ..., n$. То же сделаем и для отрезка $[T, 2T]$ – разобьем на такое же количество равных промежутков, и в дальнейшем будем их обозначать также Δt_i, $i = 1, 2, ..., n$. Мы будем каждый из этих получившихся промежутков отрезка $[T, 2T]$ в дальнейшем считать, так же, как и в модели Кокса – Росса – Рубинштейна, шагом, у которого будет только 2 исхода.

Пусть Q_0 – это значение показателя Q в момент времени $t = 0$, а Q_i при $i = 1, 2, ..., n$ есть значения показателя Q в концах промежутков времени Δt_i как показано на рисунке 1.

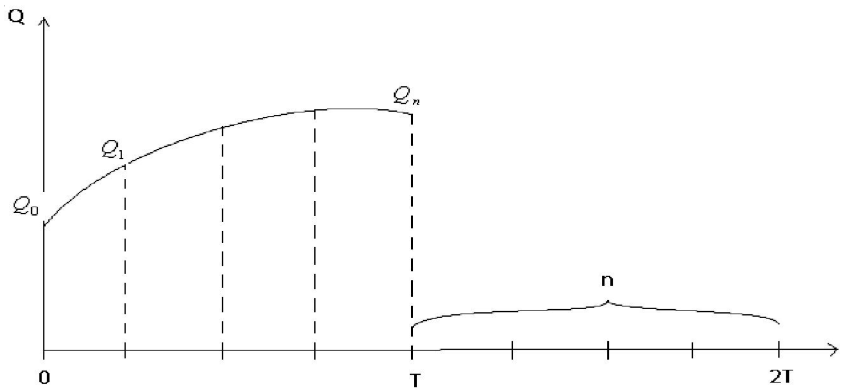

Рис. 1. Разбиение интервалов времени $[0, T]$ и $[T, 2T]$

Далее введем обозначение $\Delta_i := Q_i - Q_{i-1}$ для $i = 1, 2, ..., n$ для отрезка $[0, T]$.

Затем определим максимально возможное увеличение и максимально возможное уменьшение показателя Q на любом из промежутков Δt_i из отрезка $[T, 2T]$ следующим очевидным образом: $S := \underset{i}{\mathrm{Max}}(\Delta_i)$, $I := \underset{i}{\mathrm{Min}}(\Delta_i)$, где $i = 1, 2, ..., n$. Мы предполагаем, что $S \geq 0$ и $I \leq 0$.

За вероятность того, что показатель Q будет возрастающим на промежутке времени Δt_i $\forall i$, можно взять долю времени, в течение которого показатель Q был возрастающим на всем отрезке $[0, T]$. Обозначим эту вероятность символом P_1.

Далее все рассматриваемое относится к отрезку $[T, 2T]$.

Определим на отрезке $[I, S]$ геометрическую вероятность и свяжем ее с вероятностью P_1.

Вероятность того, что за промежуток времени Δt_i $\forall i$ величина Δ_i окажется в отрезке [0, S] или в полуинтервале [I, 0), определим следующим образом:

1) если $P_1 \le (1-P_1)$, то

$$\forall i \quad P(\Delta_i \in [0,S]) := \frac{S}{S-I}\left(\frac{P_1}{1-P_1}\right),$$

$$\forall i \quad P(\Delta_i \in [I,0)) := 1-P(\Delta_i \in [0,S]);$$

2) если $P_1 \ge (1-P_1)$, то

$$\forall i \quad P(\Delta_i \in [I,0)) := \frac{0-I}{S-I}\left(\frac{1-P_1}{P_1}\right),$$

$$\forall i \quad P(\Delta_i \in [0,S]) := 1-P(\Delta_i \in [I,0)).$$

Очевидно, что выполнены равенства:

$$P(\Delta_1 \in [0,S]) = P(\Delta_2 \in [0,S]) = ... = P(\Delta_n \in [0,S]);$$

$$P(\Delta_1 \in [I,0)) = P(\Delta_2 \in [I,0)) = ... = P(\Delta_n \in [I,0)).$$

Теперь определим для $\forall i$ вероятность $P(\Delta_i \in [r,S])$, где $r \in [I,S]$, следующим образом:

1) если $r \ge 0$, то

$$\forall i \quad P(\Delta_i \in [r,S]) := \frac{S-r}{S} P(\Delta_i \in [0,S]);$$

2) если $r \le 0$, то

$$\forall i \quad P(\Delta_i \in [r,S]) := \frac{S-0}{S} P(\Delta_i \in [0,S]) + \frac{0-r}{0-I} P(\Delta_i \in [I,0)).$$

Очевидно, что выполнено:

$$P(\Delta_1 \in [r,S]) \equiv P(\Delta_2 \in [r,S]) \equiv ... \equiv P(\Delta_n \in [r,S]).$$

Функция $P(\Delta_i \in [r,S])$ зависит только от r. Остальные параметры есть константы, определенные заранее, – это количество шагов или равных промежутков времени Δt_i, величины S, I, а также вероятность P_1. Обозначим эту функцию как $P(r)$. Она является непрерывной, убывающей, кусочно-линейной и принимает значения от 1 до 0. В точке $r = 0$ она равна $P(\Delta_i \in [0,S])$. $P(r)$ дает нам вероятность, одинаковую для всех промежутков времени Δt_i, $i = 1, 2, ..., n$. График этой функции представлен на рисунке 2.

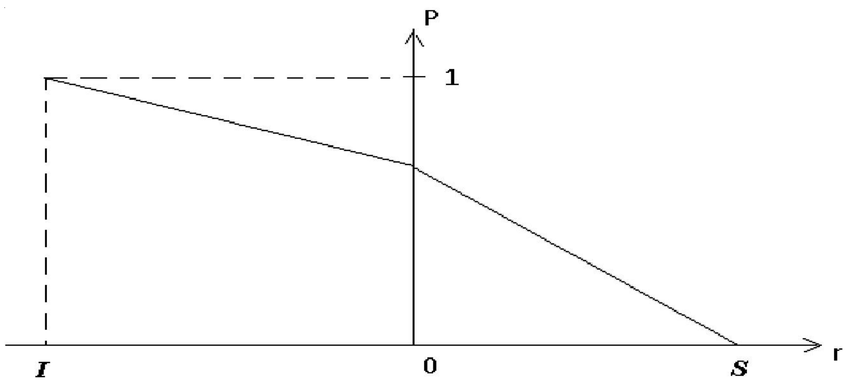

Рис. 2. Функция $P(r)$

Максимально возможное увеличение показателя Q за период времени [T, 2T] будет равно nS, а максимально возможное уменьшение равно nI. Далее пусть $x \in [n \cdot I,\ n \cdot S]$. Этот отрезок (см. рис. 3) будет отражать все возможные изменения показателя Q, которые мы можем получить в конце периода времени [T, 2T].

При помощи схемы Бернулли можно вычислить вероятность того, что в n испытаниях наступит ровно k успехов. В нашем случае промежутки Δt_i, как и в модели Кокса – Росса – Рубинштейна, будем называть шагами. Успехом на i-м шаге будет то, что $\Delta_i \in [r,\ S]$, причем для любого шага вероятностью успеха будет одна и та же функция $P(r)$. Рассчитаем k – минимальное число успехов, необходимое для того, чтобы совокупное изменение показателя Q смогло оказаться в отрезке [x, nS] при условии, что $n - k$ раз было уменьшение показателя Q на величину I. Это число успехов находится из неравенства $k \cdot S + (n-k) \cdot I \geq x$, где k принимает только натуральные значения и 0.

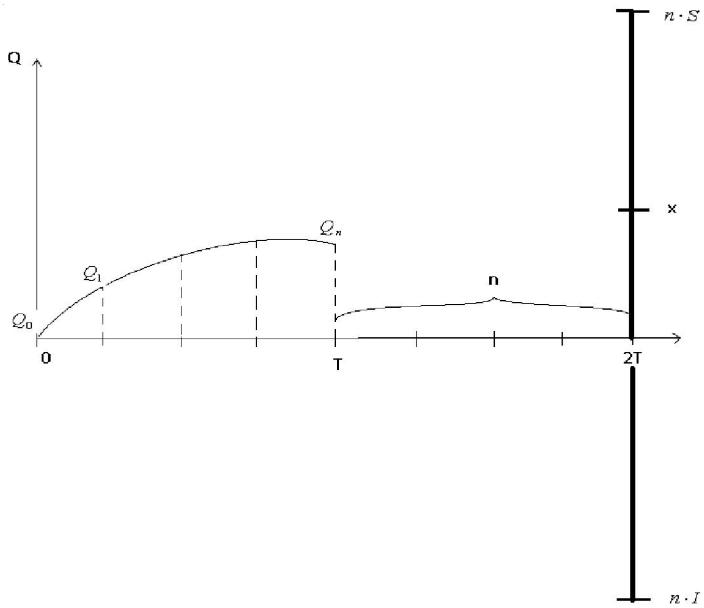

Рис. 3. Отрезок [nI, nS]

Решаем его относительно k:

$$k \geq \frac{x - nI}{S - I}. \tag{1}$$

Очевидно, что если $x = Sn$, то необходимое и достаточное условие того, что совокупное изменение показателя за период [T, $2T$] находится в отрезке [x, nS] (вырождающемся в данном случае в точку), будет выполнено, когда в каждом из n периодов изменение показателя Q будет равно S, а из неравенства (1) тогда получим $k \geq n$.

Неравенство (1) будет использоваться в качестве одного из условий, гарантирующих то, что совокупное изменение показателя Q за период [T, $2T$] сможет оказаться в отрезке [x, nS].

Теперь пусть $k_{\min}$ – минимальное количество успехов, удовлетворяющих неравенству (1) (очевидно зависит от x). При прохождении x через точки $nI + t(S - I)$, где $t = 1, 2, ..., n - 1$, меняется $k_{\min}$. Минимальное количество успехов $k_{\min}$ принимает значения 1, 2, ..., n на полуинтервале (nI, nS]. Эти значения принимаются на полуинтервалах $(nI + (t-1)(S - I), nI + t(S - I)]$, где $t = 1, 2, ..., n$.

Теперь успехом на каждом шаге будем считать то, что $\Delta_i \in [r(x, k_{\min}),\ S]$, где $r(x, k_{\min})$ – функция, не убывающая на полуинтервале (nI, nS] и дифференцируемая на полуинтервалах $(nI + (t-1)(S - I), nI + t(S - I)]$ при $t = 1, 2, ..., n$, и будем считать, что ее значения принадлежат полуинтервалу (I, S]. Для удобства представим $r(x, k_{\min})$ как n неубывающих, дифференцируемых функций:

$$r(x, k_{\min}) = \begin{cases} r(x,1) := r_1(x) & x \in (nI,\ nI + (S-I)] \\ r(x,2) := r_2(x) & x \in (nI + (S-I),\ nI + 2(S-I)] \\ \quad\quad ... & \\ r(x,n) := r_n(x) & x \in (nI + (n-1)(S-I),\ nI + n(S-I)] \end{cases}$$

определенных на соответствующих полуинтервалах $(nI + (t-1)(S - I), nI + t(S\ I)]$ (рис. 4).

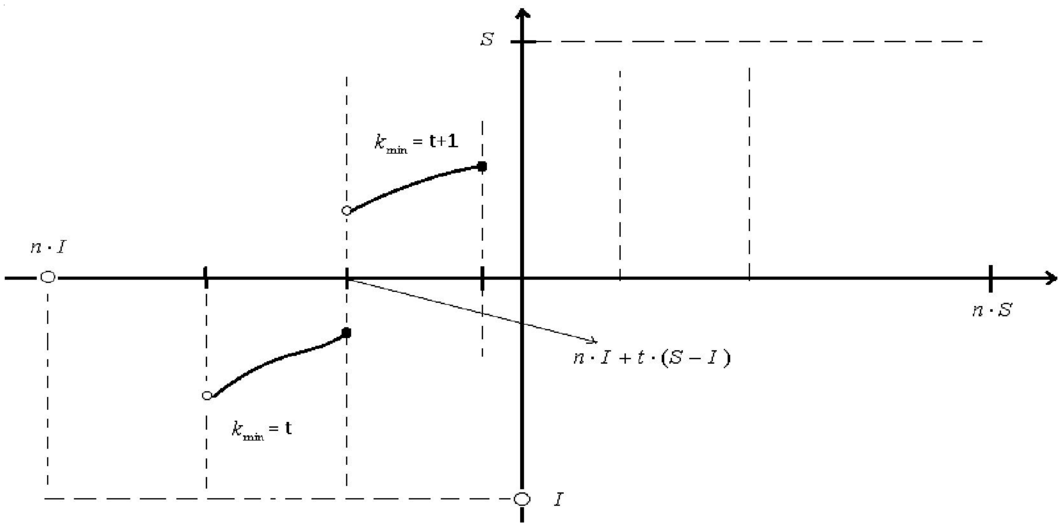

Рис. 4. Функция $r(x,\ k_{\min})$

Предположим, что эта функция удовлетворяет тому, что условие $\Delta_i \in [r(x, k_{\min}),\ S]\ \forall i$ гарантирует нам то, что совокупное изменение показателя Q будет находиться в отрезке $[x,\ nS]$, если только количество успехов будет удовлетворять неравенству (1).

Теперь для каждого k, удовлетворяющего неравенству (1), вычислим вероятность наступления k успехов в n испытаниях по формуле Бернулли:

$$P_n^k = C_n^k \cdot [P(r(x, k_{\min}))]^k \cdot [1 - P(r(x, k_{\min}))]^{n-k}, \tag{2}$$

при этом вероятность успеха будем определять композицией функций $P(r(x,\ k_{\min}))$. Так как наступление $k_{\min}$ успехов и $n - k_{\min}$ неудач, $k_{\min} + 1$ успехов и $n - k_{\min} - 1$ неудач и т. д. являются несовместными событиями, то вероятности этих событий можно складывать. И эта сумма даст вероятность того, что количество успехов удовлетворяет неравенству $k \geq \dfrac{x - nI}{S - I}$, где вероятность успеха представлена функцией $P(r(x,\ k_{\min}))$, и, следовательно, эта сумма зависит только от $x \in (nI,\ \ nS]$, так как k и $k_{\min}$ также, согласно неравенству (1), зависят только от x. Будем считать, что сумма

$$\sum_{k \geq \frac{x - nI}{S - I}} P_n^k \tag{3}$$

дает вероятность того, что совокупное изменение показателя Q за период $[T,\ 2T]$ окажется в отрезке $[x,\ nS]$. Подобное допущение возможно, поскольку условие $\Delta_i \in [r(x, k_{\min}),\ S]\ \forall i$ и неравенство (1) по предположению дают нам гарантии. Сумма (3) зависит только от $x \in (nI,\ \ nS]$.

Разница

$$1 - \sum_{k \geq \frac{x - nI}{S - I}} P_n^k$$

должна тогда дать вероятность того, что совокупное изменение показателя Q за период $[T,\ 2T]$ окажется в полуинтервале $[nI,\ x)$. Известно, что должно выполняться равенство:

$$\sum_{k < \frac{x - nI}{S - I}} P_n^k = 1 - \sum_{k \geq \frac{x - nI}{S - I}} P_n^k, \tag{4}$$

что очевидно, поскольку сумма вероятностей всех несовместных событий по схеме Бернулли равна единице.

Значит, сумма

$$\sum_{k<\frac{x-nI}{S-I}} P_n^k$$

должна дать вероятность того, что совокупное изменение показателя Q за период $[T, 2T]$ окажется также в полуинтервале $[nI, x)$.

Введем обозначение:

$$F(x) = 0 \text{ при } x \in (-\infty, \quad nI],$$

$$F(x) = \sum_{k<\frac{x-nI}{S-I}} P_n^k \text{ при } x \in (nI, \quad nS],$$

$$F(x) = 1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot [P(r_n(n \cdot S))]^k \cdot [1 - P(r_n(n \cdot S))]^{n-k} \text{ при } x \in (nS, \quad +\infty).$$

Является ли функция F функцией распределения? Чтобы это было так, она должна удовлетворять четырем условиям:

1. Монотонность, то есть если $x1 < x2$, то

$$F(x1) \le F(x2),$$

$$\sum_{k<\frac{x1-nI}{S-I}} P_n^k \le \sum_{k<\frac{x2-nI}{S-I}} P_n^k \text{ при } x \in (nI, \quad nS].$$

2. Для любых $x \in (nI, \quad nS]$ должно быть выполнено

$$0 \le \sum_{k<\frac{x-nI}{S-I}} P_n^k \le 1.$$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

4. $\lim\limits_{x \to a-0} F(x) = F(a).$

В частности, при $x \in (nI, \quad nS]$ должно быть выполнено

$$\lim_{x \to a-0} \sum_{k<\frac{x-nI}{S-I}} P_n^k = \sum_{k<\frac{a-nI}{S-I}} P_n^k.$$

Поскольку функция $r(x, k_{\min})$ непрерывна по x слева на полуинтервале $(nI, nS]$, то в силу непрерывности функции $P(r)$ композиция функций $P(r(x, k_{\min}))$ также непрерывна слева на том же полуинтервале. Так как еще и суммирование происходит по строгому неравенству, то условие 4 выполнено.

Очевидно, что выполнено и условие 2, так как сумма вероятностей несовместных событий не может быть больше единицы.

Условие 3 также очевидно выполнено.

Достаточное условие монотонности функции $F(x)$

При прохождении на полуинтервале $(nI, nS]$ через определенные точки функция $F(x)$ меняет число слагаемых, из которых она состоит, так как меняется количество тех k, по которым происходит суммирование. Вид функции $F(x)$ (число слагаемых) остается постоянным на n полуинтервалах. Точки, которые разбивают полуинтервал $(nI, nS]$ на n полуинтервалов, получаются при решении уравнений, которые возникают, когда мы приравниваем правую часть неравенства (1) по очереди к каждому натуральному числу от 1 до $n - 1$. Это точки $nI + t(S - I)$, где $t = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Длина каждого из этих полуинтервалов равна $S - I$. Это те же полуинтервалы, упомянутые ранее: $(nI + (t-1)(S-I), nI + t(S-I)]$, где $t = 1, 2, ..., n$.

На полуинтервале с индексом t функция $F(x)$ выглядит следующим образом:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{t-1} C_n^k \cdot [P(r_t(x))]^k \cdot [1 - P(r_t(x))]^{n-k}.$$

Пусть x_t – это точка, при прохождении через которую происходит разрыв функции F. Это точки $nI + t(S-I)$, где $t = 0, 1, 2, ..., n$. В точках nI и nS соответственно при $t = 0$ и $t = n$ происходит скачок функции F соответственно на величины $\lim\limits_{x \to nI+0} C_n^0 [1 - P(r_1(x))]^n$ и $C_n^n [P(r_n(n \cdot S))]^n$.

При прохождении через точки x_t при $t = 1, 2, ..., n-1$ значение функции изменяется на величину:

$$\left[\lim_{x \to x_t+0} \sum_{k=0}^{t} C_n^k \cdot [P(r_{t+1}(x))]^k \cdot [1 - P(r_{t+1}(x))]^{n-k}\right] - \left[\sum_{k=0}^{t-1} C_n^k \cdot [P(r_t(x_t))]^k \cdot [1 - P(r_t(x_t))]^{n-k}\right],$$

где предел берется на полуинтервале $(nI + t(S-I), nI + (t+1)(S-I)]$.

Вернемся к функции $P(r)$. Это убывающая функция, принимающая значения от 1 до 0. При $r = I$ $P(r) = 1$, а при $r = S$ $P(r) = 0$. $P(r)$ – это непрерывная функция, линейная на отрезках $[I, 0]$ и $[0, S]$ с соответствующими отрицательными производными $\dfrac{P(\Delta_i \in [I, 0))}{I}$ и $-\dfrac{P(\Delta_i \in [0, S])}{S}$.

Рассмотрим производную функции $F(x)$ на коком-то полуинтервале с индексом t. Пусть M – производная функции $P(r)$. Мы предполагаем, что на всем полуинтервале с индексом t производная кусочно-линейной функции $P(r)$ остается постоянной. Если это не так, то, заметив, что точка, в которой $P(r)$ меняет коэффициент, единственна на всем полуинтервале $(nI, nS]$, разделим полуинтервал $(nI + (t-1)(S-I), nI + t(S-I)]$ соответственно на 2 меньших полуинтервала, и тогда рассмотрим их по отдельности. Итак, производная функции $F(x)$ на каком-то полуинтервале с индексом t будет выглядеть следующим образом:

$$F'(x) = \sum_{k=0}^{t-1} C_n^k (-M) \cdot r_t'(x) \left[P(r_t(x))\right]^{k-1} \left[1 - P(r_t(x))\right]^{n-k-1} \cdot [-k[1 - P(r_t(x))] + (n-k) P(r_t(x))].$$

На знак этой производной влияют только выражения $[-k[1 - P(r_t(x))] + (n-k)P(r_t(x))]$ при $k = 0, ..., t-1$.

Если одновременно выполнены неравенства:

$$n - k \geq k, \qquad k = 0, ..., t-1;$$
$$P(r_t(x)) \geq (1 - P(r_t(x))),$$

то $F'(x) \geq 0$, и тогда функция $F(x)$ не убывает, но функция $P(r)$ убывающая, и при возрастании $r(x, k_{\min})$ убывает от 1 до 0, а значит, в каких-то первых полуинтервалах вида $(nI + (t-1)(S-I), nI + t(S-I)]$ сохраняется неравенство $P(r_t(x)) \geq (1 - P(r_t(x)))$. Также очевидно и то, что неравенство $n - k \geq k$ для слагаемых нашей производной сохраняется в первых $\left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$ полуинтервалах (здесь квадратные скобки обозначают целую часть). Следовательно, в каких-то первых полуинтервалах вида $(nI + (t-1)(S-I), nI + t(S-I)]$ функция $F(x)$ не убывает, и количество этих полуинтервалов не превышает $\left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$.

Теперь возьмем производную от суммы, дополняющей функцию $F(x)$ до 1 на полуинтервале с индексом t.

$$\left(\sum_{k=t}^{n} C_n^k [P(r_t(x))]^k [1 - P(r_t(x))]^{n-k}\right)' = (1 - F(x))' =$$

$$= \sum_{k=t}^{n} C_n^k (-M) r_t'(x) \left[P(r_t(x))\right]^{k-1} \left[1 - P(r_t(x))\right]^{n-k-1} \cdot \left[-k\left[1 - P(r_t(x))\right] + (n-k) P(r_t(x))\right].$$

На знак этой производной также влияют только выражения $[-k[1-P(r_t(x))]+(n-k)P(r_t(x))]$ при $k = t, \ldots, n$.

Если одновременно выполнены неравенства:

$$n-k \le k, \qquad k = t, \ldots, n;$$
$$P(r_t(x)) \le (1-P(r_t(x))),$$

то $(1-F(x))' \le 0$, и тогда функция $F(x)$ не убывает, но функция $P(r)$ – убывающая, и при возрастании $r(x, k_{\min})$ убывает от 1 до 0, а значит, в каких-то последних полуинтервалах вида $(nI+(t-1)(S-I), nI+t(S-I)]$ сохраняется неравенство $P(r_t(x)) \le (1-P(r_t(x)))$. Также очевидно и то, что неравенство $n-k \le k$ для слагаемых нашей производной сохраняется в последних $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ полуинтервалах (квадратные скобки обозначают целую часть). Следовательно, в каких-то последних полуинтервалах вида $(nI+(t-1)(S-I), nI+t(S-I)]$ функция $F(x)$ не убывает, и количество этих полуинтервалов опять не превышает $\left[\frac{n}{2}\right]+1$.

Из данных рассуждений следует теорема:

Теорема 1. *Если n – четное (нечетное), а также решение уравнения $P(r(x, k_{\min})) = 0.5$ находится в полуинтервалах (полуинтервале) вида $(nI+(t-1)(S-I), nI+t(S-I)]$ с индексами $t=\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1$ (индексом $t=\left[\frac{n}{2}\right]+1$), то $F(x)$ – неубывающая функция на всех полуинтервалах вида $(nI+(t-1)(S-I), nI+t(S-I)]$ при $t = 1, \ldots, n$.*

Теперь применим недавние рассуждения к функции $F(x)$, предполагая, что аргументом является функция $r(x, k_{\min})$. На образе полуинтервала с индексом t функция $F(r)$ будет выглядеть следующим образом:

$$F(r)=\sum_{k=0}^{t-1} C_n^k [P(r)]^k [1-P(r)]^{n-k}.$$

Производная есть выражение

$$F'(r)=\sum_{k=0}^{t-1} C_n^k (-M)\big[P(r)\big]^{k-1}\big[1-P(r)\big]^{n-k-1}\cdot\big[-k\big[1-P(r)\big]+(n-k)\big[P(r)\big]\big].$$

Знак производной также зависит только от выражений $[-k[1-P(r)]+(n-k)[P(r)]]$ при $k = 0, \ldots, t-1$.

Далее, применяя рассуждения, аналогичные предыдущим, относительно производной функции $F(r)$ и производной от суммы, дополняющей $F(r)$ до 1, получим:

Следствие 1. *Если n – четное (нечетное), а также решение уравнения $P(r) = 0.5$ принадлежит образу полуинтервалов (полуинтервала) с индексами $t=\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1$ (индексом $t=\left[\frac{n}{2}\right]+1$), где отображение полуинтервалов (полуинтервала) происходит под действием функции $r(x, k_{\min})$, то $F(r)$ – неубывающая функция.*

Из следствия 1 теоремы 1 следует

Следствие 2. *Если функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то значения $\operatorname*{Lim}_{x\to x_t+0} r_{t+1}(x)$, $r_t(x_t)$ для $t = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ могут браться какими угодно, лишь бы не нарушалась неубываемость функции $r(x, k_{min})$ и условия теоремы 1, и тогда разности*

$$\left[\sum_{k=0}^{t} C_n^k [P(\operatorname*{Lim}_{x\to x_t+0} r_{t+1}(x))]^k [1-P(\operatorname*{Lim}_{x\to x_t+0} r_{t+1}(x))]^{n-k}\right]-\left[\sum_{k=0}^{t-1} C_n^k [P(r_t(x_t))]^k [1-P(r_t(x_t))]^{n-k}\right]$$

будут положительны.

Из теоремы 1 и следствия 2 следует

Теорема 2. *Если n – четное (нечетное), а также решение уравнения $P(r(x, k_{\min})) = 0.5$ находится в полуинтервалах (полуинтервале) с индексами $t = \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1$ (индексом $t = \left[\frac{n}{2}\right]+1$), то $F(x)$ – неубывающая функция на всем полуинтервале $(nI, nS]$.*

Таким образом, теорема 2 задает условия, достаточные для того, чтобы функция $F(x)$ была функцией распределения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биномиальная модель Кокса – Росса – Рубинштейна / ЗАО «Инвестиционная компания “Ай Ти Инвест”». – Электрон. текстовые дан. – Режим доступа: http://www.itinvest.ru/editorfiles/File/options/Lection7.pdf. – Загл. с экрана.
2. Веденяпин, А. Д. Применение схемы Бернулли для построения функции распределения абсолютного изменения цены актива / А. Д. Веденяпин, С. А. Митасов // Анализ, моделирование и прогнозирование экономических процессов : материалы V Междунар. науч.-практ. Интернет-конф., 15 дек. 2013 г. – 15 февр. 2014 г. / под ред. Л. Ю. Богачковой, В. В. Давниса ; Волгоград. гос. ун-т, Воронеж. гос. ун-т. – Волгоград : Консалт, 2014. – С. 55–59.
3. Cox, J. C. Option Pricing: a Simplified Approach / John C. Cox, Stephen A. Ross, M. Rubinstein // Journal of Financial Economics. – 1979. – № 7. – P. 229–263.
4. Penati, A. The Cox-Ross-Rubinstein Option Pricing Model / A. Penati, G. Penacchi. – Electronic text data. – Mode of access: http://home.cerge-ei.cz/petrz/FM/f400n10.pdf, free. – Title from screen.

REFERENCES

1. *Binomialnaya model Coxa-Rossa-Rubinshteina* [Binomial Model of the Cox-Ross-Rubinstein]. Available at: http://www.itinvest.ru/editorfiles/File/options/Lection7.pdf.
2. Vedenyapin A.D., Mitasov S.A. Primenenie skhemy Bernulli dlya postroeniya funktsii raspredeleniya absolyutnogo izmeneniya tseny aktiva [Applying Bernoulli Scheme for Constructing the Distribution Function of the Absolute Change in Price of an Asset]. Bogachkova L.Yu., Davnis V.V., eds. *Analiz, modelirovanie i prognozirovanie economicheskikh protsessov: materialy V Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy Internet-konferentsii, 15 dekabrya 2013 g. - 15 fevralya 2014 g.* [Analysis, Modeling and Forecasting of Economic Processes: Data of the V International Scientific and Practical Internet Conference. December 15, 2013 - February 15, 2014]. Volgograd, Konsalt Publ., 2014, pp. 55-59.
3. Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M. Option Pricing: a Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 1979, no. 7, pp. 229-263.
4. Penati A., Penacchi G. *The Cox-Ross-Rubinstein Option Pricing Model*. Available at: http://home.cerge-ei.cz/petrz/FM/f400n10.pdf.

SUFFICIENT CONDITION FOR MONOTONICITY IN CONSTRUCTING THE DISTRIBUTION FUNCTION WITH BERNOULLI SCHEME

Aleksandr Dmitrievich Vedenyapin

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
yktis@mail.ru, matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Sergey Aleksandrovich Mitasov

Master Student,
Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
mitasovsergey@mail.ru, matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. This paper is the construction of the distribution function using the Bernoulli scheme, and is also designed to correct some of the mistakes that were made in the article [2]. Namely, a function built in [2] need not be monotonous, and some formulas need to be adjusted.

The idea of building as well as in [2], is based on the model of Cox-Ross-Rubinstein "binary market". The essence of the model was to divide time into N steps, and assuming that the price of an asset at each step can move either up to a certain value with probability p, or down also by some certain value with probability $q = 1 - p$. Prices in step N can take only a finite number of values. "Success" or "failure" was the changing price for some fixed value in the model of Cox-Ross-Rubinstein. Here as a "success" or "failure" at every step we consider the affiliation of changing the index value to the section $[r, S]$ either to the interval $[I, r)$.

Further a function $P(r)$ was introduced, which at any step gives us the probability of "success".

The maximum index value increase for the all period of time $[T, 2T]$ will be equal nS, and the maximum possible reduction will be equal nI. Then let $x \in [nI, \ nS]$. This segment will reflect every possible total variation that we can get at the end of a period of time $[T, 2T]$.

The further introduced inequality $k \geq \frac{x - nI}{S - I}$ gives us the minimum number of successes that needed for total changing could be in the section $[x, nS]$ if was $n - k$ reductions with the index value to I. Then was introduced the function $r(x, k_{\min})$ which is defined on the interval $(nI, nS]$ and provided us some assurance that the total index changing could be in the section $[x, nS]$ if successful interval is $[r(x, k_{\min}), S]$ and the amount of success is satisfying to our inequality.

The probability of k "successes" and $n - k$ "failures" is calculated according to the formula of Bernoulli, where the probability of "success" is determined by the function $P(r)$, and r is determined by the function $r(x, k_{\min})$:

$$P_n^k = C_n^k [P(r(x, k_{\min}))]^k [1 - P(r(x, k_{\min}))]^{n-k}.$$

We defined the probability that the total index change will be in the section $[x, nS]$ as the sum of the probabilities of incompatible events, for which the number of successes satisfies to entered inequality. Then obviously we defined the probability that the total index changing will be in the interval $[nI, x)$.

Then the function $F(x)$ was introduced, defined on the whole line, which is identical to the amount (probability that the total index changing will be in the interval) in the interval $(nI, nS]$, and is identical to zero and one in the additions. Some properties of the distribution function $F(x)$ are satisfied automatically. A sufficient condition for the monotonicity is presented in the form of Theorem 2.

Key words: binary market, Bernoulli scheme, distribution function, probability, test-step, mathematical model.

.