www.volsu.ru

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2015.5.3

УДК 519.6
ББК 22.193

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЛАГРАНЖЕВО-ЭЙЛЕРОВОЙ СХЕМЫ LES-ASG [1]

Антон Владимирович Белоусов

Студент Института математики и информационных технологий,
Волгоградский государственный университет
anton.belousov.v@mail.ru, math@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Сергей Сергеевич Храпов

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры информационных систем и компьютерного моделирования,
Волгоградский государственный университет
xss-ip@mail.ru, infomod@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Приведены формулы для численного моделирования газодинамических течений на основе лагранжево-эйлеровой схемы LES-ASG в двумерном случае. Приводится объяснение отличительной особенности численной схемы LES-ASG от схемы cSPH-TVD [1; 2]. Подробно рассматривается как лагранжев, так и эйлеров этап. Рассмотрены условия устойчивости численной схемы. Проведен анализ и сравнение с численной схемой MUSCL в одномерном случае.

Ключевые слова: численные схемы, LES, ASG, cSPH-TVD, лагранжево-эйлерова схема.

Введение

В данной работе мы подробно рассмотрим все этапы и формулы численной схемы LES-ASG, которая является модификацией численной схемы cSPH-TVD. Проведем сравнение схемы LES-ASG и схемы MUSCL для одномерного случая. В дальнейшем данная схема будет использоваться в качестве основы для создания программного комплекса, направленного на моделирования газодинамических течений.

1. Основные уравнения

Будем исходить из интегральных законов сохранения массы для однородной несжимаемой жидкости, а также законов сохранения энергии и импульса для «жидкой частицы» с «объемом» $\Sigma(t)$, деформирующейся произвольным образом в процессе движения, в двумерном случае:

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{\Sigma(t)} \rho\, dxdy = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{\Sigma(t)} \rho u\, dxdy = -\iint\limits_{\Sigma(t)} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho f_x\right) dxdy, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{\Sigma(t)} \rho \upsilon\, dxdy = -\iint\limits_{\Sigma(t)} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho f_y\right) dxdy, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{\Sigma(t)} e\, dxdy = -\iint\limits_{\Sigma(t)} \left(\frac{\partial (up)}{\partial x} + \frac{\partial (\upsilon p)}{\partial y} - \rho u f_x - \rho \upsilon f_y\right) dxdy, \tag{4}$$

где ρ — плотность среды; u и υ — скорость газа вдоль ординат x и y соответственно; e — полная энергия единицы объема; p — изотропное давление; $f_x = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ и $f_y = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y}$ — удельная потенциальная внешняя сила; ψ — гравитационный потенциал. Система уравнений (1)–(4) замыкается уравнением состояния идеального газа $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$, где γ — показатель адиабаты, а ε — удельная внутренняя энергия.

Введем характерное значение плотности ρ_0, а также пространственную l_0, и временной t_0 масштабы задачи. Далее будем использовать только безразмерные величины $(\rho, u, \upsilon, p, e, \psi)$, переопределив их следующим образом

$$\rho = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad u = \frac{u t_0}{l_0}, \quad \upsilon = \frac{\upsilon t_0}{l_0}, \quad p = \frac{p t_0^2}{\rho_0 l_0^2}, \quad e = \frac{e t_0^2}{\rho_0 l_0^2},$$
$$\psi = \frac{\psi t_0^2}{l_0^2}.$$

2. Численная схема LES-ASG

Численная схема LES-ASG (лагранжево-эйлерова схема с антисимметричной сеткой) — это модифицированный cSPH-TVD подход [1; 2; 7]. Основной отличительной особенностью схемы LES-ASG от схемы cSPH-TVD является различие в расчете лагранжевого этапа. В cSPH-TVD методе на лагранжевом этапе для расчета каждой ячейки задействуются все близлежащие ячейки, как это показано на рисунке 1. Из-за этого возникают нежелательные осцилляции. А в схеме LES-ASG при расчетах не задействуются диагонально расположенные соседние ячейки, как это делается на эйлеровом этапе. Пример показан на рисунке 2.

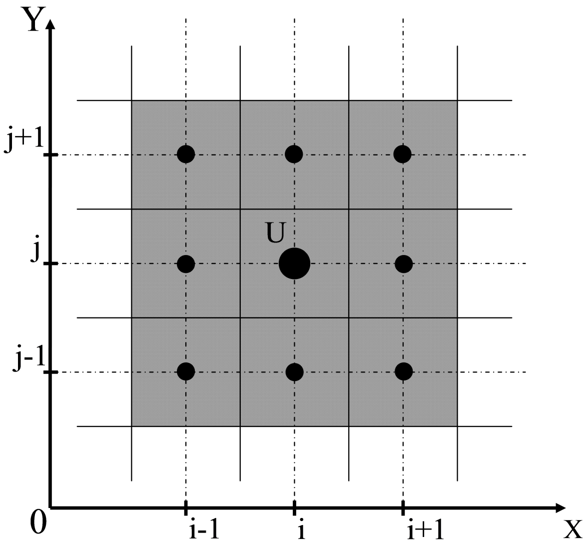

Рис. 1. Нахождение значений в ячейке на лагранжевом этапе с использованием cSPH-TVD схемы

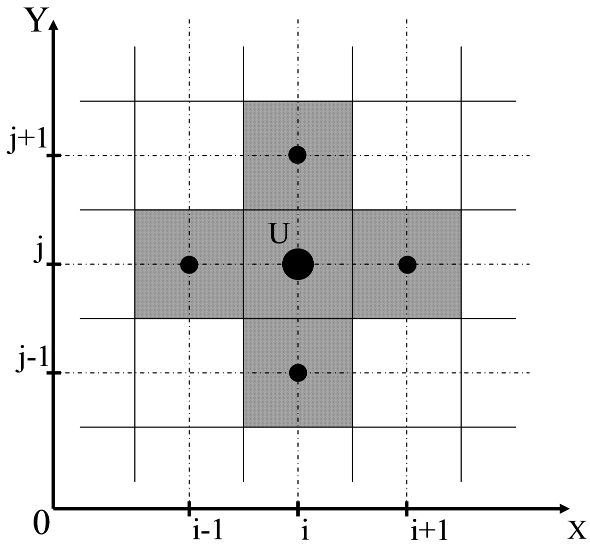

Рис. 2. Нахождение значений в ячейке на лагранжевом этапе с использованием LES-ASG схемы

Воспользуемся стандартными процедурами дискретизации сплошной среды, применяемыми в численных схемах, основанных на эйлеровом и лагранжевом подходах [3; 4]. Покроем расчетную область равномерной эйлеровой (неподвижной) сеткой с пространственным шагом h, где $h_{i,j} = h = \text{const}$ (i и j — пространственные индексы) и $x^0_{i+1} = x^0_i + h_i$, $y^0_{j+1} = y^0_j + h_j$. Совместим, в начальный момент времени, частицы с ячейками эйлеровой сетки. Число ячеек и частиц равно N.

Введем временные слои $t_{n+1} = t_n + \tau_n$ с неравномерным шагом τ_n. На первом лагранжевом этапе, используя модифицированный в работе [6] SPH-подход, рассчитываем изменения интегральных характеристик и положений частиц, обусловленные действием газодинамических и внешних сил.

Частицы будем характеризовать массой M, импульсом P и энергией E соответственно: $M_{i,j}(t) = \iint_{\Sigma_{i,j}(t)} \rho dxdy$; $P_{i,j}(t) = \iint_{\Sigma_{i,j}(t)} \rho uvdxdy$; $E_{i,j}(t) = \iint_{\Sigma_{i,j}(t)} edxdy$. После лагранжева этапа необходимо вернуть частицы в исходное состояние $\Delta x^{n+1}_i \to x^0_i$, $\Delta y^{n+1}_j \to y^0_j$, вычислив при этом изменение интегральных характеристик частиц ($M^{n+1}_{i,j}$, $P^{n+1}_{i,j}$, $E^{n+1}_{i,j}$), вызванное таким перемещением. Именно на эйлеровом этапе возникает нужда использования неподвижной сетки для расчета потоков массы, импульса и энергии на границах ячеек в момент времени $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$, обусловленных перетеканием вещества через границы ячеек. Соответствующее изменение интегральных характеристик частиц пропорционально разности втекающих и вытекающих в ячейку потоков. Для расчетов потоков применяется модифицированный в [6] TVD-подход и приближенное решение задачи Римана.

Обратим внимание, что при рассмотрении областей вакуума в соответствующие ячейки помещаются частицы с нулевыми: массой, импульсом и энергией (частицы вакуума). В данном случае для частиц вакуума лагранжев этап LES-ASG метода пропускается, а на эйлеровом этапе при наличии в соседних ячейках частиц с ненулевыми параметрами осуществляется вычисление вытекающих в соответствующую ячейку потоков и определяется изменение интегральных характеристик частиц вакуума. Таким образом, рассматриваемый метод позволяет осуществлять эффективный сквозной расчет в области течения нестационарных границ «вещество — вакуум».

2.1. Лагранжев этап

Введем дополнительную вспомогательную функцию φ, которая удовлетворяет соотношению $p = \varphi^2/2$. Посредством введенной функции преобразуем в уравнениях (2)–(4) величины:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial (up)}{\partial x} = \frac{u\varphi}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\varphi}{2}\frac{\partial (u\varphi)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial (\upsilon p)}{\partial y} = \frac{\upsilon\varphi}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\varphi}{2}\frac{\partial (\upsilon\varphi)}{\partial y}. \tag{5}$$

Необходимость перехода от лагранжева этапа к эйлеровому и обратно требует введения в численный алгоритм величин

$$A_{i,j}(t) = \frac{1}{2h}\left(\iint\limits_{\Sigma_{i,j}(t)} A(x,t)dxdy\right), \tag{6}$$

являющихся аналогом средних значений функции $A = (\rho, \rho u, \rho\upsilon, e, p, \varphi, \psi)$ в ячейках, при конечно-объемной аппроксимации на неподвижной сетке.

Подставляя в систему (1)–(4) соотношения (5) и учитывая (6), преобразовав при этом интегральные характеристики частиц с учетом (5), получим

$$\frac{d\mathbf{U}_{i,j}}{dt} = \mathbf{Q}_{i,j}, \tag{7}$$

где

$$\mathbf{U}_{i,j} = \begin{pmatrix} \rho_{i,j} \\ (\rho u)_{i,j} \\ (\rho\upsilon)_{i,j} \\ e_{i,j} \end{pmatrix}, \quad f^x_{i,j} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad f^y_{i,j} = -\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\mathbf{Q}_{i,j} = -\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{i,j}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \rho_{i,j} f^x_{i,j} \\ \varphi_{i,j}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_i} - \rho_{i,j} f^y_{i,j} \\ \dfrac{\varphi_{i,j}}{2}\left(u_{i,j}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \dfrac{\partial (u\varphi)}{\partial x_i} + \upsilon_{i,j}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \dfrac{\partial (\upsilon\varphi)}{\partial y_i}\right) - \\ -(\rho u)_{i,j} f^x_{i,j} - (\rho\upsilon)_{i,j} f^y_{i,j} \end{pmatrix},$$

$u_{i,j} = \dfrac{(\rho u)_{i,j}}{\rho_{i,j}}$ и $\upsilon_{i,j} = \dfrac{(\rho\upsilon)_{i,j}}{\rho_{i,j}}$ — скорости центра масс частиц. Значение величины $\varphi_{i,j}$ можно выразить через компоненты вектора консервативных переменных $\mathbf{U}_{i,j}$ в виде

$$\varphi_{i,j} = \sqrt{2p_{i,j}}, \tag{8}$$

где

$$p_{i,j} = (\gamma - 1)\left(e_{i,j} - \frac{u^2_{i,j}\rho_{i,j}}{2} - \frac{\upsilon^2_{i,j}\rho_{i,j}}{2}\right). \tag{9}$$

Для аппроксимации пространственных производных, входящих в уравнение (7), будем использовать модифицированный SPH-подход со сглаживающим ядром $\overline{W}$ [17; 18]. В качестве сглаживающего ядра будем использовать кубический сплайн Монагана:

$$\overline{W}(q) = \frac{2}{3}\begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3, & 0 \le q \le 1; \\ \frac{1}{4}(2-q)^3, & 1 \le q \le 2; \\ 0, & 2 \le q. \end{cases} \tag{10}$$

$$\overline{W}'(q) = \frac{2}{3}\begin{cases} -3q + \frac{9}{4}q^2, & 0 \le q \le 1; \\ -\frac{3}{4}(2-q)^2, & 1 \le q \le 2; \\ 0, & 2 \le q, \end{cases} \tag{11}$$

где q можно представить как $q_x = \dfrac{|x_i - x_k|}{h}$ или $q_y = \dfrac{|y_i - y_k|}{h}$. Исходя из соотношения (10) и (11), следует, что

$$\frac{\partial \overline{W}_{i,k}}{\partial x_i} = \frac{\partial \overline{W}(q)}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = \overline{W}'(q)\frac{sign(x_i - x_k)}{h}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \overline{W}_{j,k}}{\partial y_j} = \frac{\partial \overline{W}(q)}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = \overline{W}'(q)\frac{sign(y_j - y_k)}{h}, \tag{13}$$

где

$$\overline{W}_{i,k} = \overline{W}(|x_i - x_k|, h) \quad : \quad \overline{W}^0_{i,k} = \overline{W}(|x^0_i - x^0_k|, h), \tag{14}$$

$$\overline{W}_{k,j} = \overline{W}(|y_j - y_k|, h) \quad : \quad \overline{W}^0_{j,k} = \overline{W}(|y^0_j - y^0_k|, h). \tag{15}$$

Заменяя входящие в уравнение (7) пространственные производные конечными суммами, содержащими аналитически вычисляемые производные от сглаживающего ядра $\overline{W}$, получим

$$\mathbf{Q}_{i,j} = -\left[\begin{array}{c} 0 \\ \varphi_{i,j}\sum\limits_{k=i-1}^{i+1}\left\{\varphi_{k,j}\frac{\partial \overline{W}_{i,k}}{\partial x_i} + \frac{\rho_{i,j}}{\varphi_{i,j}}\psi_{k,j}\frac{\partial \overline{W}^0_{i,k}}{\partial x_i}\right\} \\ \varphi_{i,j}\sum\limits_{k=j-1}^{j+1}\left\{\varphi_{i,k}\frac{\partial \overline{W}_{j,k}}{\partial y_j} + \frac{\rho_{i,j}}{\varphi_{i,j}}\psi_{i,k}\frac{\partial \overline{W}^0_{j,k}}{\partial y_j}\right\} \\ \varphi_{i,j}\sum\limits_{k=i-1}^{i+1}\left\{\varphi_{k,j}\frac{u_{i,j}+u_{k,j}}{2}\frac{\partial \overline{W}_{i,k}}{\partial x_i} + \frac{(\rho u)_{i,j}}{\varphi_{i,j}}\psi_{k,j}\frac{\partial \overline{W}^0_{i,k}}{\partial x_i}\right\} + \\ +\varphi_{i,j}\sum\limits_{k=j-1}^{j+1}\left\{\varphi_{i,k}\frac{\upsilon_{i,j}+\upsilon_{i,k}}{2}\frac{\partial \overline{W}_{j,k}}{\partial y_i} + \frac{(\rho\upsilon)_{i,j}}{\varphi_{i,j}}\psi_{i,k}\frac{\partial \overline{W}^0_{j,k}}{\partial y_i}\right\} \end{array}\right]. \tag{16}$$

На шаге «предиктор» находим методом ломаных промежуточные значения $\widetilde{\mathbf{U}}^*_{i,j}$ в момент времени $t_{n+1} = t_n + \tau_n$

$$\widetilde{\mathbf{U}}^{*}_{i,j} = \mathbf{U}^n_{i,j} + \frac{\tau_n}{2h} \begin{pmatrix} 0 \\ -\varphi_{i,j}(\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}) - \rho_{i,j}(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) \\ -\varphi_{i,j}(\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}) - \rho_{i,j}(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) \\ \varphi_{i,j}\left(\varphi_{i+1,j}\dfrac{u_{i,j}+u_{i+1,j}}{2} - \varphi_{i-1,j}\dfrac{u_{i,j}+u_{i-1,j}}{2}\right) - \\ -\varphi_{i,j}\left(\varphi_{i,j+1}\dfrac{\upsilon_{i,j}+\upsilon_{i,j+1}}{2} - \varphi_{i,j-1}\dfrac{\upsilon_{i,j}+\upsilon_{i,j-1}}{2}\right) - \\ -(\rho u)_{i,j}(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) - (\rho \upsilon)_{i,j}(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

знак «$\sim$» над вектором консервативных переменных $\mathbf{U}_{i,j}$ означает, что центр масс частиц смещен относительно исходного положения. На шаге «корректор» по наклону интегральной кривой в точке $\widetilde{\mathbf{U}}_{i,j}$ и вычисляем приращение значений $\mathbf{U}_{i,j}$ и на временном слое $t_{n+1} = t_n + \tau_n$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{U}}^{n+1}_{i,j} = \frac{\mathbf{U}^n_{i,j} + \widetilde{\mathbf{U}}^{*}_{i,j}}{2} + \frac{\tau_n}{2}\mathbf{Q}_{i,j}(\widetilde{\mathbf{U}}^{*}_k, x^*_k, y^*_k), \\ \Delta x^*_{i,j} = \tau_n \frac{u^n_{i,j} + u^*_{i,j}}{2}, \\ \Delta y^*_{i,j} = \tau_n \frac{\upsilon^n_{i,j} + \upsilon^*_{i,j}}{2}. \end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, рекуррентные соотношения (17) и (18) позволяют для момента времени t_{n+1} вычислить интегральные характеристики частиц, движущихся под действием газодинамических и внешних сил.

2.2. Эйлеров этап

На эйлеровом этапе вычисляются потоки массы, импульса и энергии, обусловленные перемещением жидкости через границы ячеек, в момент времени $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$. На данном этапе находится приближенное решение задачи Римана. Разность втекающих и вытекающих в ячейки потоков позволяет определить изменения характеристических «жидких» частиц, рассчитанных на предыдущем этапе в момент времени $t_{n+1} = t_n + \tau_n$ [14]. Представляя (1)–(4) в дифференциальной форме, а затем в консервативной эйлеровой форме при отсутствии сил газодинамического давления, получим:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0. \tag{19}$$

Применив стандартную процедуру конечно-разностной аппроксимации к уравнению (19), для i,j-й ячейки получим соотношение:

$$\mathbf{U}^{n+1}_{i,j} = \widetilde{\mathbf{U}}^{n+1}_{i,j} - \frac{\tau_n}{h}\left(\mathbf{F}^{n+1/2}_{i+1/2} - \mathbf{F}^{n+1/2}_{i-1/2}\right) - \frac{\tau_n}{h}\left(\mathbf{G}^{n+1/2}_{j+1/2} - \mathbf{G}^{n+1/2}_{j-1/2}\right), \tag{20}$$

где значения $\widetilde{\mathbf{U}}^{n+1}_{i,j}$ вычисляются на лагранжевом этапе по формуле (17), а значения потоков на границах ячеек $\mathbf{F}^{n+1/2}_{i\pm1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{U}^{n+1/2}_{i\pm1/2,j})$ и $\mathbf{G}^{n+1/2}_{j\pm1/2} = \mathbf{G}(\mathbf{U}^{n+1/2}_{i,j\pm1/2})$ находятся из приближенных решений задачи Римана. Для подавления нефизических осцилляций и обеспечения монотонности профилей сеточных величин на потоках накладывается функция-ограничитель.

Задача Римана решается отдельно для каждой из границ эйлеровых ячеек. При этом в качестве начальных условий необходимо задать слева (L) и справа (R) от рассматриваемой границы значения параметров потока, которые определяют величину скачка и могут быть получены на основе кусочно-полиноминальной реконструкции функции $\mathbf{U}(x, y, t)$. От порядка реконструкции зависит точность численного алгоритма. В настоящей работе ограничимся рассмотрением случая кусочно-линейной реконструкции, обеспечивающей численной схеме второй порядок точности по пространству.

Запишем выражения для $\mathbf{U}(x, y, t)$ слева (L) и справа (R) от границы $x^0_{i+1/2,j}$ и $y^0_{i,j+1/2}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^L_{i+1/2,j} &= \tilde{\mathbf{U}}^{n+1/2}_{i,j} + \left(\frac{h}{2} - \frac{\Delta x^{n+1}_{i,j}}{2}\right) \mathbf{\Theta}^n_{x\,i,j}, \\ \mathbf{U}^R_{i+1/2,j} &= \tilde{\mathbf{U}}^{n+1/2}_{i+1,j} - \left(\frac{h}{2} + \frac{\Delta x^{n+1}_{i,j}}{2}\right) \mathbf{\Theta}^n_{x\,i,j+1}, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^L_{i,j+1/2} &= \tilde{\mathbf{U}}^{n+1/2}_{i,j} + \left(\frac{h}{2} - \frac{\Delta y^{n+1}_{i,j}}{2}\right) \mathbf{\Theta}^n_{y\,i,j}, \\ \mathbf{U}^R_{i,j+1/2} &= \tilde{\mathbf{U}}^{n+1/2}_{i,j+1} - \left(\frac{h}{2} + \frac{\Delta y^{n+1}_{i,j}}{2}\right) \mathbf{\Theta}^n_{y\,i,j+1}, \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta x^{n+1}_{i,j} &= \frac{\Delta x^*_{i,j}}{2} + \frac{\tau_n}{2} \frac{u^n_i + \tilde{u}^{n+1}_i}{2}, \\ \Delta y^{n+1}_{i,j} &= \frac{\Delta y^*_{i,j}}{2} + \frac{\tau_n}{2} \frac{\upsilon^n_j + \tilde{\upsilon}^{n+1}_j}{2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Наклоны кусочно-линейного распределения (21) и (22) должны удовлетворять TVD-условию [12]. Для этого воспользуемся функцией-ограничителем [20]

$$\mathbf{\Theta}^n_{x\,i,j} = \mathcal{L}\left(\frac{\mathbf{U}^n_{i+1,j} - \mathbf{U}^n_{i,j}}{h}, \frac{\mathbf{U}^n_{i,j} - \mathbf{U}_{i-1,j}}{h}\right), \tag{24}$$

$$\mathbf{\Theta}^n_{y\,i,j} = \mathcal{L}\left(\frac{\mathbf{U}^n_{i,j+1} - \mathbf{U}^n_{i,j}}{h}, \frac{\mathbf{U}^n_{i,j} - \mathbf{U}_{i,j-1}}{h}\right). \tag{25}$$

В качестве функции ограничителя, подавляющего нефизические осцилляции вблизи разрывов, могут применяться, например, ограничитель $minmod$ [19]

$$\mathcal{L}(a, b) = \frac{1}{2}[\mathrm{sign}(a) + \mathrm{sign}(b)] \min(|a|, |b|), \tag{26}$$

ограничитель ван Лира [15; 16]

$$\mathcal{L}(a, b) = \begin{cases} \dfrac{2ab}{a+b}, & ab > 0, \\ 0, & ab \le 0, \end{cases} \tag{27}$$

ограничитель ван Альбады [8]

$$\mathcal{L}(a,b) = \frac{(a^2+\zeta)b + (b^2+\zeta)a}{a^2+b^2+2\zeta}, \tag{28}$$

функция *superbee*

$$\begin{gathered} \mathcal{L}(a,b) = \max(a,b)\max[\min(1,2\kappa), \operatorname{fmin}(2,\kappa)], \\ \kappa = \frac{\min(a,b)}{\max(a,b)}, \end{gathered} \tag{29}$$

где a и b — вектора наклонов $\mathbf{Q}$ распределения величины $\mathbf{U}$ внутри ячейки; ζ — малая константа. Перечисленные ограничители (26)–(29) удовлетворяют TVD-условию, ограничитель minmod (26), кроме того, сохраняет монотонность реконструируемой функции.

С учетом (21), (22) и методов приближенного решения задачи Римана (LF, HLL, HLLC) [21], можно вычислить значения потоков $\mathbf{F}^{n+1/2}_{i\pm1/2}$ и $\mathbf{G}^{n+1/2}_{j\pm1/2}$, входящих в уравнение (20). Рассмотрим значение потоков $\mathbf{F}^{n+1/2}_{i\pm1/2}$, введем следующие обозначения

$$\mathbf{U}_{L,R} = \mathbf{U}^{L,R}_{i\pm1/2}, \quad \mathbf{F}_{L,R} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{L,R}),$$

тогда для потоков на границах ячеек, используя метод Лакса — Фридрихса (LF), имеем [9]:

$$\mathbf{F}^{n+1/2}_{i\pm1/2} = \frac{\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R}{2} + S_* \frac{\mathbf{U}_L - \mathbf{U}_R}{2}, \tag{30}$$

где

$$\mathbf{F}_{L,R} = \begin{pmatrix} \rho_{L,R} u_{L,R} \\ \rho_{L,R} u^2_{L,R} + p_{L,R} \\ \rho_{L,R} u_{L,R} \upsilon_{L,R} \\ u_{L,R}(e_{L,R} + p_{L,R}) \end{pmatrix},$$

$S_* = \max(|S_L|, |S_R|)$ — скорость распространения единственного разрыва, разделяющего две области с постоянными значениями $\mathbf{U}_L$, $\mathbf{U}_R$. Для минимальной S_L и максимальной S_R скоростей распространения волн внутри ячейки справедливы оценки [10; 11]

$$S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R), \quad S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R),$$

где $u_{L,R} = \dfrac{(\rho u)_{L,R}}{\rho_{L,R}}$, $c_{L,R} = \sqrt{\dfrac{\gamma p_{L,R}}{\rho_{L,R}}}$ — адиабатическая скорость звука в газе; $p_{L,R} = (\gamma - 1)\left(e_{L,R} - \dfrac{u^2_{L,R}\rho_{L,R}}{2} - \dfrac{\upsilon^2_{L,R}\rho_{L,R}}{2}\right)$. Аналогично находим значения потоков $\mathbf{G}^{n+1/2}_{j\pm1/2}$, используя вместо основного пространственного индекса i индекс j.

В методе HLL значения потоков для уравнения (20) определяются по системе, представленной ниже [13]

$$\mathbf{F}^{n+1/2}_{i\pm1/2} = \begin{cases} \mathbf{F}_L, & 0 < S_L; \\ \dfrac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R + S_L S_R (\mathbf{U}_L - \mathbf{U}_R)}{S_R - S_L}, & S_L \le 0 \le S_R; \\ \mathbf{F}_R, & 0 > S_R. \end{cases} \tag{31}$$

Значения S_L и S_R вычисляются аналогично методу LF.

Метод HLLC предпологает расчет потоков исходя из системы

$$\mathbf{F}_{i\pm1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} \mathbf{F}_L, & S_L > 0; \\ \mathbf{F}_R, & S_R < 0; \\ \Omega\left(\mathbf{F}_{i\pm1/2}^{n+1/2}\right), & S_C \geq 0; \\ \widetilde{\Omega}\left(\mathbf{F}_{i\pm1/2}^{n+1/2}\right), & S_C < 0. \end{cases} \tag{32}$$

Значение $\Omega\left(\mathbf{F}_{i\pm1/2}^{n+1/2}\right)$ находим через

$$\Omega\left(\mathbf{F}_{i\pm1/2}^{n+1/2}\right) = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где

$$B_1 = \frac{S_C(S_L\rho_L - \mathbf{F}_L)}{S_L - S_C}, \quad B_3 = \frac{S_C(S_L(\rho v)_L - \mathbf{F}_L)}{S_L - S_C},$$
$$B_2 = \frac{S_C(S_L(\rho u)_L - \mathbf{F}_L) + S_L(p_L + \rho_L(S_L - u_L)(S_C - u_L))}{S_L - S_C},$$
$$B_4 = \frac{S_C(S_L e_L - \mathbf{F}_L) + S_L(p_L + \rho_L(S_L - u_L)(S_C - u_L))S_C}{S_L - S_C}.$$

Значение $\widetilde{\Omega}\left(\mathbf{F}_{i\pm1/2}^{n+1/2}\right)$ находим через

$$\widetilde{\Omega}\left(\mathbf{F}_{i\pm1/2}^{n+1/2}\right) = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix}, \tag{34}$$

где

$$D_1 = \frac{S_C(S_R\rho_R - \mathbf{F}_R)}{S_R - S_C}, \quad D_3 = \frac{S_C(S_R(\rho v)_R - \mathbf{F}_R)}{S_R - S_C},$$
$$D_2 = \frac{S_C(S_R(\rho u)_R - \mathbf{F}_R) + S_R(p_R + \rho_R(S_R - u_R)(S_C - u_R))}{S_R - S_C},$$
$$D_4 = \frac{S_C(S_R e_R - \mathbf{F}_R) + S_R(p_R + \rho_R(S_R - u_R)(S_C - u_R))S_C}{S_R - S_C}.$$

В отличие от HLL нам потребуется еще найти S_C

$$S_C = \frac{p_R - p_L + \rho_L u_L(S_L - u_L) - \rho_R u_R(S_R - u_R)}{\rho(S_L - u_L) - \rho_R(S_R - u_R)}, \tag{35}$$

где S_L и S_R вычисляются по формулам

$$\begin{gathered} S_L = u_L - c_L\alpha(p_L, p_C), \\ S_R = u_R - c_R\alpha(p_R, p_C), \\ \alpha(a,b) = \begin{cases} 1, & b \leq a; \\ \sqrt{1 + \dfrac{1+\gamma}{2\gamma}\left(\dfrac{b}{a} - 1\right)}, & b > a. \end{cases} \end{gathered} \tag{36}$$

Акустическое приближение давления p_C находится как

$$p_C = \max\left(0, \frac{1}{2}\left(p_L + p_R - \frac{1}{4}(u_R - u_L)(\rho_L + \rho_R)(c_L + c_R)\right)\right). \tag{37}$$

2.3. Условия устойчивости

Для устойчивости численной схемы LES-ASG необходимо, чтобы за время интегрирования τ_n:

1) на лагранжевом этапе центр масс частиц смещался на расстояние, не превышающее $h/2$ относительно начального положения;

2) на эйлеровом этапе возмещения распространялись на расстояние, меньшее размера ячейки h.

С учетом этих условий, временной шаг τ_n для алгоритма LES-ASG должен определяться из условий:

$$\tau_n = K \min_{i,j}\left(\frac{h}{|u_{i,j}| + c_{i,j}}, \frac{h}{|\upsilon_{i,j}| + c_{i,j}}\right), \tag{38}$$

где $0 < K < 1$ — число Куранта; c — адиабатическая скорость звука в газе.

3. Проведение вычислительных экспериментов

Проведем несколько различных тестов. В качестве ограничителя используем *minmod*, а для приближенного решения задачи Римана будем использовать метод LF.

Рассмотрим тест (A) для сгустка плотности в виде окружности на квадратной расчетной области с размерностью $N = 10^2$. В качестве начальных значений: показатель адиабаты $\gamma = 1,4$; в областях задается однородная плотность $\rho(x,y) = 1$; $u(x,y) = 0$; $\upsilon(x,y) = 0$; x и $y \in [0,1]$, а энергия:

$$e(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{10\gamma}, & R^2 < \dfrac{N}{5}; \\ \dfrac{\rho}{\gamma}, & R^2 \geq \dfrac{N}{5}, \end{cases}$$

где R — это радиус отклонения от центра расчетной области. На рисунках 3–8 представлены результаты эксперимента.

Рассмотрим тест (B) о взаимодействии двух взрывных волн, который был применен Вудвартом [22] и Колеллой для изучения свойств численной схемы PPMLR годуновского типа, реализующий счет давления на лагранжевом этапе [22]. Начальное состояние состоит из трех областей, с показателем адиабаты $\gamma = 1,4$ и ограниченных твердыми стенками. В областях задается однородная плотность $\rho(x,y) = 1$, $u(x,y) = 0$, $\upsilon(x,y) = 0$, x и $y \in [0,1]$, а разрыв по давлению:

$$p(x,y) = \begin{cases} 1000, & 0 \leq q \leq 1; \\ 0,01, & 0,1 \leq x \leq 0,9; \\ 100, & 0,9 < x \leq 1. \end{cases}$$

В результате формируются две сильные сходящиеся ударные волны. На рисунке 9 показана динамика взаимодействия двух взрывных волн для расчетной области $N = 400$.

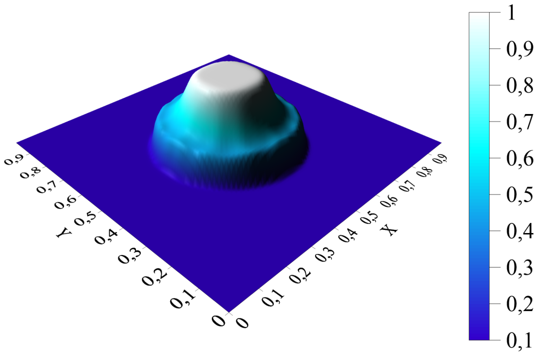

Рис. 3. Тест А, распределение давления после 10-й расчетной итерации

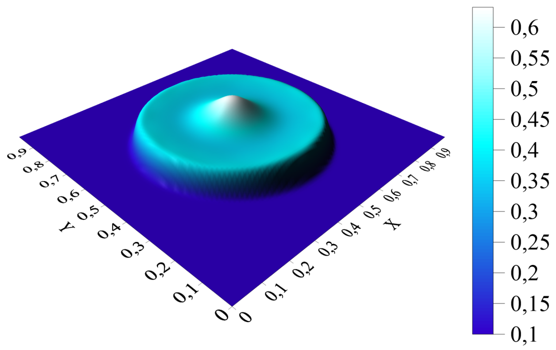

Рис. 4. Тест А, распределение давления после 30-й расчетной итерации

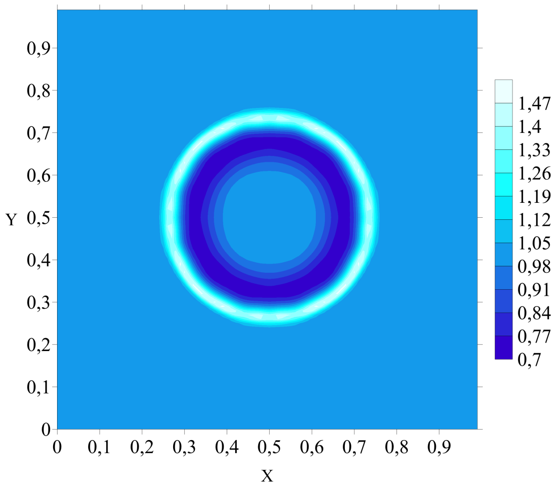

Рис. 5. Тест А, распределение плотности после 10-й расчетной итерации

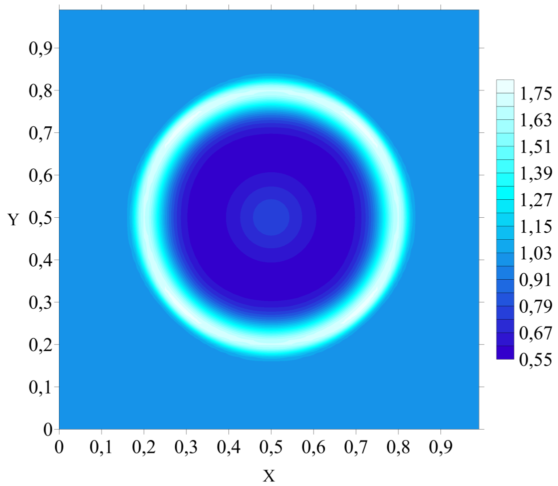

Рис. 6. Тест А, распределение плотности после 30-й расчетной итерации

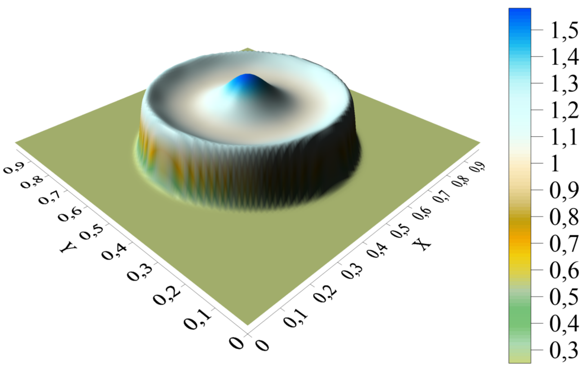

Рис. 7. Тест А, распределение энергии после 30-й расчетной итерации

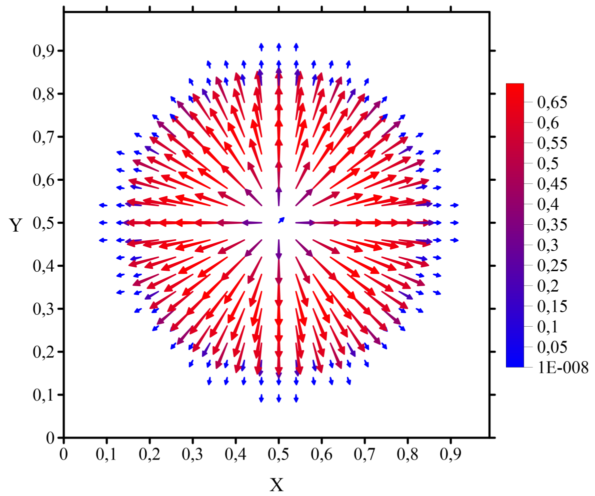

Рис. 8. Тест А, поле скоростей после 30-й расчетной итерации

Рассмотрим тест (С), в котором смоделируем задачу Римана о распаде произвольного разрыва. Зададим начальные условия для квадратной расчетной области размером

$N = 10^3$, с левой границы от разрыва $\rho_L = 1$, $p_L = 1$ и с правой границы от разрыва $\rho_R = 1$, $p_R = 0,1$, распределение скоростей u и v нулевые на всей расчетной области. Показатель адиабаты $\gamma = 1,4$. Данный тест применяется для оценки устойчивости численной схемы при моделировании сильных ударных волн. Решение состоит из сильной ударной волны, контактной волны и левой волны разряжения. На рисунках 10 и 11 представлены профильные разрезы давления и плотности. Функция-ограничитель $minmod$ позволяет получить профиль наиболее приближенным к монотонному, при этом масштабы численной размазки получаются более существенными.

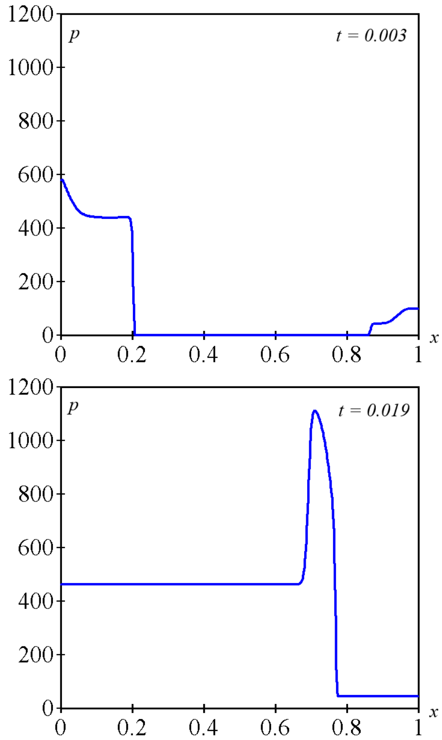

Рис. 9. Тест B, динамика взаимодействия двух взрывных волн для $N = 400$: графики распределения давления $p(x, N/2)$ в разрезе по центру расчетной области, вдоль движения волн

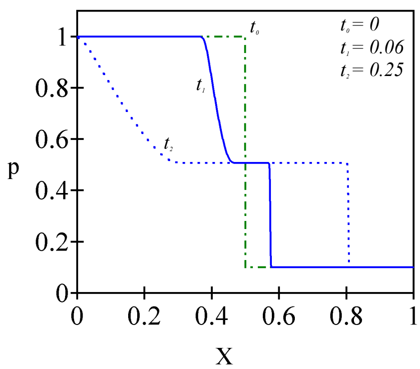

Рис. 10. Тест C, распределение давления при моделировании распада произвольного разрыва

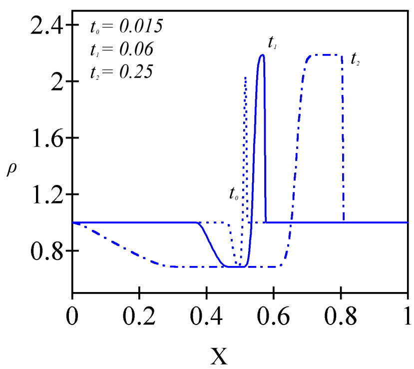

Рис. 11. Тест C, распределение плотности при моделировании распада произвольного разрыва

В работе [1] проводилось сравнение погрешностей численных схем LES-ASG и MUSCL с использованием кусочно-линейной и кусочно-постоянной реконструкции. В качестве основного теста рассматривалось решение уравнения переноса с неоднородным распределением скорости. В таблице приведены результаты эксперимента.

Погрешность вычислений схем MUSCL и LES-ASG [1]

N	Кусочно-постоянная реконструкция		Кусочно-линейная реконструкция	
	MUSCL	LES	MUSCL	LES
300	$7{,}5455 \times 10^{-2}$	$7{,}5451 \times 10^{-2}$	$2{,}0163 \times 10^{-2}$	$1{,}0191 \times 10^{-2}$
600	$4{,}2171 \times 10^{-2}$	$4{,}2169 \times 10^{-2}$	$5{,}7162 \times 10^{-3}$	$5{,}7275 \times 10^{-3}$
1200	$2{,}2633 \times 10^{-2}$	$2{,}2633 \times 10^{-2}$	$2{,}6335 \times 10^{-3}$	$2{,}6309 \times 10^{-3}$
2400	$1{,}1818 \times 10^{-2}$	$1{,}1818 \times 10^{-2}$	$1{,}2402 \times 10^{-3}$	$1{,}2411 \times 10^{-3}$
4800	$6{,}0794 \times 10^{-3}$	$6{,}0794 \times 10^{-3}$	$5{,}9244 \times 10^{-4}$	$5{,}9223 \times 10^{-4}$
9600	$3{,}0903 \times 10^{-3}$	$3{,}0903 \times 10^{-3}$	$2{,}7158 \times 10^{-4}$	$2{,}7163 \times 10^{-4}$

Заключение

По результатам численных экспериментов с использованием схемы LES-ASG, для моделирования газодинамических течений, можно сделать вывод, что модификация схемы cSPH-TVD проведена успешно. Возмущения, которые возникали в угловых ячейках при использовании cSPH-TVD-метода, значительно уменьшены и профиль сечения имеет более гладкое распределение. Сравнивая результаты вычислений с использованием метода LES-ASG и MUSCL, можно с уверенностью говорить о схожести точности численных схем [1]. В дальнейшем численная схема LES-ASG будет использована для создания программного комплекса, нацеленного на моделирование газодинамических течений, который в будущем можно задействовать как основу для развития и создания более сложных и точных модулей, нацеленных на моделирование газодинамических течений.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 15-45-02655, № 15-47-02642, № 15-02-06204, № 14-07-97030.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоусов, А. В. Разработка программы для численного газодинамического моделирования на основе лагранжево-эйлеровой схемы LES–ASG / А. В. Белоусов, С. С. Храпов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2015. — № 1 (26). — С. 30–39.

2. Жумалиев, А. Г. Численная схема cSPH–TVD: моделирование фронта ударной волны / А. Г. Жумалиев, С. С. Храпов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2012. — № 16. — С. 24–27.

3. Еремин, М. А. Конечно-объемная схема интегрирования уравнений гидродинамики / М. А. Еремин, А. В. Хоперсков, С. А. Хоперсков // Изв. Волгогр. гос. техн. ун-та. —

2010. — № 6:8. — С. 24–27.

4. Кузьмин, Н. М. Численное моделирование эволюции неустойчивых мод джетов, выходящих из молодых звездных объектов / Н. М. Кузьмин, В. В. Мусцевой, С. С. Храпов // Астрон. журн. — 2007. — № 84:12. — С. 1089–1098.

5. Куликовский, А. Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 656 с.

6. Численная схема для моделирования динамики поверхностных вод на основе комбинированного SPH-TVD-подхода / С. С. Храпов, А. В. Хоперсков, Н. М. Кузьмин, А. В. Писарев, И. А. Кобелев // Вычислительные методы и программирование. — 2011. — Т. 12, № 1. — С. 282–297.

7. Численная схема CSPH–TVD: исследование влияния ограничителей наклонов / Н. М. Кузьмин, А. В. Белоусов, Т. С. Шушкевич, С. С. Храпов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2014. — № 1 (20). — С. 22–34.

8. Albada, G. D. van. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics / G. D. van Albada, B. van Leer, W. W. Roberts // Astron. Astrophys. — 1982. — P. 76–84.

9. Courant, R. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences / R. Courant, E. Isaacson, M. Rees // Comm. Pure. — 1952. — P. 243–255.

10. Davis, S. F. Simplified Second-Order Godunov-Type Methods / S. F. Davis // SIAM J. Sci. Stat. Comput. — 1988. — P. 445–473.

11. Einfeldt, B. On Godunov-Type Methods for Gas Dynamics / B. Einfeldt // SIAM J. Numer. Anal. — 1988. — P. 294–318.

12. Harten, A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws / A. Harten // J. Comput. Phys. — 1983. — P. 357–393.

13. Harten, A. On upstream differencing and Godunov type methods for hyperbolic conservation laws / A. Harten, P. Lax, B. van Leer // SIAM review. — 1983. — P. 35–61.

14. Hudson, J. Numerical techniques for conservation laws with source terms / J. Hudson // PhD Thesis. — Reading : University of Reading, 1998. — P. 1–118.

15. Leer, B. van. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme II. Monotonicity and Conservation Combined in a Second Order Scheme / B. van Leer // J. Comput. Phys. — 1974. — P. 361–370.

16. Leer, B. van. Towards the Ultimate Conservation Difference Scheme V. A Second Order Sequel to Godunov's Method / B. van Leer // J. Comput. Phys. — 1979. — P. 110–136.

17. Monaghan, J. J. Simulating free surface flows with SPH / J. J. Monaghan // Comput. Phys. — 1994. — P. 399–406.

18. Monaghan, J. J. Smoothed Particle Hydrodynamics / J. J. Monaghan // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. — 1992. — P. 543–574.

19. Roe, P. L. Some Contributions to the Modelling of Discontinuous Flows / P. L. Roe // Proceedings of the SIAM/AMS Seminar. — 1983. — P. 163–193.

20. Sweby, P. K. High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws / P. K. Sweby // SIAM J. — 1984. — P. 995–1011.

21. Toro, E. F. Restoration of the Contact Surface in the HLL / E. F. Toro, M. Spruce, W. Speares // Shock Waves. — 1994. — P. 25–34.

22. Woodward, P. The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks / P. Woodward, P. Colella // J. Comput. Phys. — 1984. — P. 115–173.

REFERENCES

1. Belousov A.V., Khrapov S.S. Razrabotka programmy dlya chislennogo gazodinamicheskogo modelirovaniya na osnove lagranzhevo-eylerovoy skhemy LES–ASG [Development of the Program for Numerical Gasdynamic Modeling on the Basis of Lagrange —

Euler Scheme the LES — ASG]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2015, no. 1 (26), pp. 30-39.

2. Zhumaliev A.G., Khrapov S.S. Chislennaya skhema cSPH–TVD: modelirovanie fronta udarnoy volny [A Numerical Scheme Based on the Combined SPH-TVD Approach: Simulation of the Shock Front]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2012, no. 16, pp. 24-27.

3. Eremin M.A., Khoperskov A.V., Khoperskov S.A. Konechno-obyemnaya skhema integrirovaniya uravneniy gidrodinamiki [Finite Volume Sheme of Integration for Hydrodynamics Equations]. *Izv. Volgogr. gos. tekhn. un-ta*, 2010, no. 6:8, pp. 24-27.

4. Kuzmin N.M., Mustsevoy V.V., Khrapov S.S. Chislennoe modelirovanie evolyutsii neustoychivykh mod dzhetov, vykhodyashchikh iz molodykh zvezdnykh obyektov [Numerical Modeling of the Evolution of Unstable Modes of Jets From Young Stellar Objects]. *Astron. zhurn.* [Astronomy Reports], 2007, no. 84:12, pp. 1089-1098.

5. Kulikovskiy A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. *Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravneniy* [Mathematical Problems in the Numerical Solution of Hyperbolic Systems]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2001. 656 p.

6. Khrapov C.C., Khoperskov A.V., Kuzmin N.M., Pisarev A.V., Kobelev I.A. Chislennaya skhema dlya modelirovaniya dinamiki poverkhnostnykh vod na osnove kombinirovannogo SPH-TVD-podkhoda [Numerical Scheme for Modeling the Dynamics of Surface Water Based on the Combined SPH-TVD-Approach]. *Vychislitelnye metody i programmirovanie*, 2011, vol. 12, no. 1, pp. 282-297.

7. Kuzmin N.M., Belousov A.V., Shushkevich T.S., Khrapov S.S. Chislennaya skhema CSPH–TVD: issledovanie vliyaniya ogranichiteley naklonov [Numerical Scheme CSPH — TVD: Investigation of Influence Slope Limiters]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2014, no. 1 (20), pp. 22-34.

8. Albada G.D. van., Leer B. van., Roberts W.W. A Comparative Study of Computational Methods in Cosmic Gas Dynamics. *Astron. Astrophys.*, 1982, pp. 76-84.

9. Courant R., Isaacson E., Rees M. On the Solution of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations By Finite Differences. *Comm. Pure.*, 1952, pp. 243-255.

10. Davis S.F. Simplified Second-Order Godunov-Type Methods. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 1988, pp. 445-473.

11. Einfeldt B. On Godunov-Type Methods for Gas Dynamics. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1988, pp. 294-318.

12. Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *J. Comput. Phys.*, 1983, pp. 357-393.

13. Harten A., Lax P., Leer B. van. On Upstream Differencing and Godunov Type Methods for Hyperbolic Conservation Laws. *SIAM review*, 1983, pp. 35-61.

14. Hudson J. Numerical techniques for conservation laws with source terms. *PhD Thesis*, Reading, University of Reading, 1998, pp. 1-118.

15. Leer B. van. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme II. Monotonicity and Conservation Combined in a Second Order Scheme. *J. Comput. Phys.*, 1974, pp. 361-370.

16. Leer B. van. Towards the Ultimate Conservation Difference Scheme V. A Second Order Sequel to Godunov's Method. *J. Comput. Phys.*, 1979, pp. 110-136.

17. Monaghan J.J. Simulating Free Surface Flows with SPH. *Comput. Phys.*, 1994, pp. 399-406.

18. Monaghan J.J. Smoothed Particle Hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 1992, pp. 543-574.

19. Roe P.L. Some Contributions to the Modelling of Discontinuous Flows. *Proceedings of the SIAM/AMS Seminar*, 1983, pp. 163-193.

20. Sweby P.K. High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws. *SIAM J.*, 1984, pp. 995-1011.

21. Toro E.F., Spruce M., Speares W. Restoration of the Contact Surface in the HLL. *Shock*

Waves, 1994, pp. 25-34.
22. Woodward P., Colella P. The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks. *J. Comput. Phys.*, 1984, pp. 115-173.

GASDYNAMIC MODELING ON THE BASIS OF THE LAGRANGIAN AND EULER SCHEME LES-ASG

Anton Vladimirovich Belousov

Student, Institute of Mathematics and IT,
Volgograd State University
anton.belousov.v@mail.ru, math@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Sergey Sergeevich Khrapov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Information Systems and Computer Simulation,
Volgograd State University
xss-ip@mail.ru, infomod@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In this work the numerical scheme LES-ASG which is modification of CSPH-TVD is considered in detail. Formulas of all stages of calculation with use of LF, HLL, HLLC methods for the solution of a task of Riemann are presented. Using LES-ASG it was succeeded to achieve more smooth distribution in comparison with CSPH-TVD. By results of comparison of LES-ASG and MUSCL it is possible to draw a conclusion on similarity of accuracy of numerical schemes. In this paper, compare the two types of solving the transport equation with inhomogeneous distribution of velocity, namely LES (Lagrange — Euler scheme) and MUSCL (Monotonic Upstream-Centered Scheme). According to the research we can assume that the scheme LES and MUSCL is equally well applicable for modeling the transport equation. The numerical scheme LES-ASG will be used as a basis for creation of the program complex aimed at modeling of gasdynamic currents with use of the OpenMP and CUDA technologies.

Key words: numerical schemes, LES, ASG, cSPH-TVD, MUSCL, Lagrangian and Euler scheme.