www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА

DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2015.6.1

УДК 517.95
ББК 22.161.6

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ НА РИМАНОВЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ [1]

Елена Алексеевна Мазепа

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
lmazepa@rambler.ru, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В данной работе исследуется асимптотическое поведение положительных решений некоторых квазилинейных эллиптических неравенств на искривленных римановых произведениях. В частности, найдены точные условия выполнения теорем типа Лиувилля об отсутствии нетривиальных решений, а также условия существования и мощность множества положительных решений изучаемых неравенств на рассматриваемых римановых многообразиях. Данные результаты обобщают аналогичные утверждения, полученные ранее в работах Naito. Y. и Usami H. для евклидова пространства $\mathbf{R}^n$, а также некоторые ранее полученные результаты работ А.Г. Лосева и Е.А. Мазепы для модельных многообразий.

Ключевые слова: квазилинейные эллиптические неравенства, асимптотическое поведение, теоремы типа Лиувилля, искривленные римановы произведения, мощность множества решений.

Введение

Данная работа посвящена исследованию асимптотического поведения решений неравенства

$$Lu \equiv \operatorname{div}(A(|\nabla u|)\nabla u) \geq f(x,u), \tag{1}$$

где функция $f(\cdot,u) \geq 0$ при $u \geq 0$ — непрерывна по обоим аргументам; $f \not\equiv 0$ и $f(\cdot,0) = 0$ на некомпактных римановых многообразиях специального вида.

Одним из источников изучения асимптотического поведения решений и субрешений эллиптических дифференциальных уравнений на некомпактных римановых многообразиях является классификационная теория римановых поверхностей и многообразий.

Отличительным свойством поверхностей и многообразий параболического типа является выполнение для них теоремы Лиувилля, утверждающей, что всякая положительная супергармоническая функция на данной поверхности (на данном многообразии) является тождественной постоянной. Поиски признаков параболичности типа римановых многообразий имеют большую историю. Общее представление о современных исследованиях в данном вопросе можно получить, например, из обзора [10].

За последние годы опубликован ряд работ (см., например, [2–10; 12; 13]), в которых изучаются вопросы существования целых решений различных линейных и квазилинейных уравнений и неравенств на некомпактных римановых многообразиях (в частности, на модельных многообразиях) и в евклидовом пространстве, а также их асимптотическое поведение.

Всюду далее будем считать, что функция A в неравенстве (1) удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{gathered} A \in C(0,\infty), \quad A(p) > 0 \quad \text{при} \;\; p > 0, \\ pA(|p|) \in C(\mathbf{R}) \cap C^1(0,\infty), \\ (pA(p))' > 0 \text{ для } p > 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Под *целым решением неравенства* (1) в $\mathbf{R}^n$ понимают функцию $u \in C^1(\mathbf{R}^n)$ такую, что $A(|\nabla u|)\nabla u \in C^1(\mathbf{R}^n)$, и удовлетворяющую неравенству (1) в каждой точке $x \in \mathbf{R}^n$.

В простейшем случае, когда $A(p) \equiv 1$ и $f(r,u) \equiv f(u)$, проблема существования целых решений неравенства (1) в $\mathbf{R}^n$ изучалась в ряде работ. В частности, если f — неубывающая функция, J. Keller и R. Osserman (см.: [11; 14]) показали, что неравенство $\Delta u \geq f(u)$ имеет положительные целые решения тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_a^\infty \left(\int\limits_a^s f(t)dt \right)^{-\frac{1}{2}} ds = \infty,$$

где a — произвольное положительное число. Y. Naito и H. Usami в работе [13] обобщили их результат и получили критерий существования целых нетривиальных неотрицательных решений неравенства (1) в $\mathbf{R}^n$.

Целью настоящей работы является получение аналогичных результатов на классе искривленных римановых произведений, подклассом которого являются, в частности, все модельные многообразия. Точные условия существования целых положительных решений неравенства (1) на модельных многообразиях были получены ранее А.Г. Лосевым и Е.А. Мазепой в работах [4; 7; 9].

Опишем искривленные римановы произведения подробнее.

Фиксируем начало координат $O \in \mathbf{R}^n$ и некоторые гладкие функции $q_i > 0$, $i = 1,\dots,k$ на интервале $(0,\infty)$. Определим искривленное риманово произведение M следующим образом:

1) множеством точек M является все $\mathbf{R}^n$;

2) в координатах $(r, \theta_1, \dots, \theta_k)$ (где $r \in (0,\infty)$ и $\theta_i \in S^{n_i}$) риманова метрика на $M \setminus \{O\}$ определяется как

$$ds^2 = dr^2 + q_1^2(r)d\theta_1^2 + \dots + q_k^2(r)d\theta_k^2, \tag{3}$$

где $d\theta_i$ — стандартная риманова метрика на сфере S^{n_i}, а $n = n_1 + \ldots n_k + 1$ — размерность многообразия M;

3) риманова метрика в точке O является гладким продолжением метрики (3).

Целым решением неравенства (1) на римановом многообразии M будем называть функцию $u \in C^1(M)$ такую, что $A(|\nabla u|)\nabla u \in C^1(M)$, и удовлетворяющую неравенству (1) в каждой точке $x \in M$.

Будем использовать также следующее предположение на функцию $f(x,u)$, где $x = (r, \theta) \in M$:

$$\text{(F)} \quad \begin{cases} \text{на } \mathrm{R}_+ \text{ существуют непрерывные функции } c(r) > 0 \text{ и } g(u) > 0 \text{ такие, что} \\ g'(u) \geq 0, \quad 0 < c(r)g(u) \leq f(x,u) \text{ при } u > 0,\ r > 0,\ \theta \in K,\ g(0) = 0. \end{cases}$$

Введем обозначения $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$, $K = S_1 \times S_2 \ldots \times S_k$, $q(r) = \prod\limits_{i=1}^{k} q_i^{n_i}(r)$,

$$I(r) = \frac{1}{q(r)} \int\limits_0^r c(s)q(s)\, ds.$$

Сначала рассмотрим случай, когда $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) < \infty$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнен следующий набор условий:*
1) $\lim\limits_{p\to+\infty} pA(p) < \infty$*;*
2) имеет место (F);
3) многообразие M *таково, что* $I(+0) = \lim\limits_{r\to+0} I(r) < \infty$ *и* $\limsup\limits_{r\to\infty} I(r) = \infty$.

Тогда на M *не существует целых положительных решений неравенства* (1).

Далее рассмотрим случай, когда $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) = \infty$. Определим непрерывную функцию $\Psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ в виде

$$\Psi(p) = p^2 A(p) - \int\limits_0^p tA(t)dt, \qquad p \geq 0.$$

Легко показать (см., например, [7]), что Ψ строго возрастающая и $\Psi(0) = 0$. Также заметим, что при $p \geq 1$ выполнено

$$\Psi(p) + \int\limits_0^1 tA(t)dt = p^2 A(p) - \int\limits_1^p tA(t)dt \geq pA(p),$$

откуда следует, что $\lim\limits_{p\to\infty} \Psi(p) = \infty$.

Таким образом, обратная к Ψ функция Φ определена на $[0,\infty)$. Ясно, что Φ строго возрастающая функция и $\lim\limits_{p\to\infty} \Phi(p) = \infty$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнен следующий набор условий:*
1) $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) = \infty$*;*

2) многообразие M таково, что $I'(r) \geq k > 0$;
3) имеет место (F) и

$$\int\limits_a^\infty \left(\Phi\left(k\int\limits_a^s g(t)dt\right)\right)^{-1} ds < \infty. \tag{4}$$

Тогда на M не существует целых положительных решений неравенства (1).

Всюду далее будем считать, что $f(x,\cdot) \equiv f(r,\cdot)$. Для всех $t > 0$ рассмотрим семейство функций $M_R(t) = \max_{r\in[0,R]} f(r,t)$, где $R > 0$, и сформулируем условия существования целых положительных решений неравенства (1).

Теорема 3. *Пусть выполнен следующий набор условий:*
1) $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) = \infty$;
2) многообразие M таково, что $q'(r) \geq 0$;
3) для любого $R > 0$

$$\int\limits_a^\infty \left(\Phi\left(\int\limits_a^s M_R(t)dt\right)\right)^{-1} ds = \infty. \tag{5}$$

Тогда неравенство (1) *на M имеет континуум положительных целых решений.*

1. Радиальные решения

Основой доказываемых утверждений является изучение радиально-симметричных решений $v(r)$ рассматриваемых неравенств. Несложно показать, что на искривленном римановом произведении M выполнено

$$Lv(r) \equiv \operatorname{div}(A(|\nabla v(r)|)\nabla v(r)) = q^{-1}(r)\Big(q(r)A(|v'(r)|)v'(r)\Big)'.$$

Далее рассмотрим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\Big(q(r)A(|v'(r)|)v'(r)\Big)' = c(r)q(r)g(v(r)), \quad r \geq 0, \tag{6}$$

где g — непрерывная положительная неубывающая на $(0,\infty)$ функция из условия *(F)*. Будем называть данное уравнение *спектральным для неравенства* (1).

Пусть $v(r)$ — решение уравнения (6) с начальными данными $v(0) > 0$ и $v'(0) = 0$. Как и в работе [7], легко показать, что если $v(r)$ определена для $0 \leq r < R \leq \infty$, то $v'(r) > 0$ для $0 < r < R$. Действительно, проинтегрировав равенство (6) по отрезку $[0,r], r < R$, получим

$$A(|v'(r)|)v'(r) = q^{-1}(r)\int\limits_0^r c(s)q(s)g(v(s))ds, \qquad 0 < r < R. \tag{7}$$

Следовательно, $A(|v'(r)|)v'(r) > 0$ для $0 < r < R$, откуда вытекает, что $v'(r) > 0$ для $0 < r < R$.

Лемма 1. *Если неравенство* (1) *имеет положительное целое решение $u(r,\theta)$ на M, то на $[0,\infty)$ существует положительное решение $v(r)$ спектрального уравнения* (6) *с условиями $v(0) > 0$ и $v'(0) = 0$.*

Доказательство. Предположим противное, то есть указанного в формулировке леммы решения уравнения (6) $v(r)$ не существует, но при этом существует положительное целое решение $u(r,\theta)$ неравенства (1). Из положительности решения неравенства, в частности, следует, что $u(O) > 0$. Пусть $a \in (0, u(O))$, а $[0, R)$ — максимальный промежуток существования решения v уравнения (6), с условиями $v(0) = a$ и $v'(0) = 0$. В силу предположения выполнено $R < \infty$. Выше мы показали, что $v'(r) > 0$ для $0 < r < R$. Тогда мы имеем либо $v(r) \to \infty$ при $r \to R$, либо $v'(r) \to \infty$ при $r \to R$.

В случае $v(r) \to \infty$ при $r \to R$ выберем $R_1 \in (0, R)$ так, чтобы

$$v(R_1) > \max_{\Omega} u(r,\theta), \tag{8}$$

где $\Omega = \{(r,\theta):\ r \in [0, R_1],\ \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in K\}$, а $K = S_1 \times S_2 \ldots \times S_k$. Тогда $Lv = c(r)g(v)$ в Ω и $v \geq u$ на $\partial\Omega$. Следовательно, применяя принцип сравнения для квазилинейных операторов в дивергентной форме (см., например, [1, с. 248]), получаем $u \leq v$ в Ω, что противоречит условию $v(0) = a < u(O)$.

Далее рассмотрим случай, когда $v'(r) \to \infty$ при $r \to R$. Если при этом найдется $R_1 \in (0, R)$ такое, что будет выполнено неравенство (8), мы получаем противоречие, аналогичное указанному выше. Пусть $v(r) \leq \max\limits_{\theta \in K} u(r,\theta)$ для всех $0 < r < R$. Выберем $R_1 \in (0, R)$ так, чтобы

$$v'(R_1) > \max_{\Omega} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) \right\}. \tag{9}$$

Обозначим $\delta = \max\limits_{\theta \in K}(u(R_1,\theta) - v(R_1)) > 0$ и пусть $w(r) = v(r) + \delta$. Тогда $w(R_1) \geq$ $\geq u(R_1,\theta)$ для всех $\theta \in K$ и $w(R_1) = u(R_1,\theta^*)$ для некоторого $\theta^* = (\theta_1^*, \ldots, \theta_k^*) \in K$. Тогда $Lw \leq c(r)g(w)$ в области Ω, $w \geq u$ на границе $\partial\Omega$ и по лемме получаем $w \geq u$ в Ω.

Далее, учитывая условия $w(R_1) = u(R_1,\theta^*)$, $w(r) \geq u(r,\theta)$ при $(r,\theta) \in \Omega$, получаем

$$v'(R_1) = w'(R_1) \leq \frac{\partial u}{\partial r}(R_1,\theta^*),$$

что противоречит (9). Лемма доказана.

2. Доказательство теорем

Доказательства теорем 1 и 2 почти дословно совпадают с доказательством аналогичных утверждений в работах [7] и [9]. Приведем кратко основные идеи доказательства теоремы 1.

Доказательство. Предположим, что неравенство (1) имеет целое решение $u(r,\theta) > 0$. Тогда из леммы следует существование положительного решения $v(r)$ спектрального уравнения (6) с начальными данными $v(0) > 0$ и $v'(0) = 0$ на луче $[0, \infty)$.

Далее, как и в [7], доказываем, что имеет место следующее неравенство

$$A(|v'(r)|)v'(r) \leq g(v(r))I(r), \tag{10}$$

так как $g(v)$ и $v(r)$ — неубывающие функции.

Кроме того, спектральное уравнение (6) может быть представлено в виде

$$(A(|v'(r)|)v'(r))' + \frac{q'(r)}{q(r)}A(|v'(r)|)v'(r) = c(r)g(v(r)). \tag{11}$$

Объединяя (10) и (11), получаем

$$(A(|v'|)v')' \geq g(v(r)) \left[c(r) - \frac{q'(r)}{q(r)} I(r) \right] = g(v(r)) I'(r). \tag{12}$$

Учитывая, что $I(0) = 0$, и интегрируя неравенство (12) по отрезку $[0, r]$, получим

$$A(|v'(r)|)v'(r) \geq \int\limits_0^r g(v(s)) I'(s)\, ds \geq g(v(0))(I(r) - I(+0)). \tag{13}$$

Из неравенства (13) и условий на функцию A следует, что

$$g(v(0)) I(r) \leq A(|v'(r)|)v'(r) \leq \lim_{p \to \infty} pA(p) < \infty, \quad r > 0.$$

Устремляя $r \to \infty$ и переходя в левой части неравенства к верхнему пределу, получаем противоречие с условием теоремы.

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Доказательство. Предположим, что неравенство (1) имеет целое решение $u(r, \theta) > 0$. Тогда из леммы 1 следует, что на $[0, \infty)$ существует решение $v(r)$ спектрального уравнения (6) с начальными условиями $v(0) > 0$ и $v'(0) = 0$. Из (13) и условий теоремы 2 следует, что при $r \to \infty$ справедливо $\lim\limits_{r \to \infty} v'(r) = \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{r \to \infty} v(r) = \infty$. Умножая неравенство (12) на $v' > 0$ и интегрируя по отрезку $[0, r]$, получим

$$\int\limits_0^r (A(|v'|)v')'v'\, ds \geq \int\limits_0^r g(v(s)) I'(s) v'(s) ds \geq k \int\limits_0^r g(v(s)) v'(s) ds = k \int\limits_{v(0)}^{v(r)} g(t) dt.$$

С другой стороны, применяя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\int\limits_0^r (A(|v'|)v')'v'\, ds = \int\limits_0^r v'\, d(A(|v'|)v') = (v'(r))^2 A(|v'(r)|) - \int\limits_0^{v'(r)} A(t) t\, dt = \Psi(v'(r)).$$

Следовательно,

$$\Psi(v'(r)) \geq k \int\limits_{v(0)}^{v(r)} g(t)\, dt.$$

Далее, переходя в последнем неравенстве к обратной функции Φ и интегрируя его по отрезку $[0, r]$, получаем

$$\int\limits_{v(0)}^{v(r)} \left(\Phi \left(k \int\limits_{v(0)}^{s} g(t) dt \right) \right)^{-1} ds \geq r. \tag{14}$$

Затем в (14) переходим к пределу при $r \to \infty$

$$\int\limits_{v(0)}^{\infty} \left(\Phi \left(k \int\limits_{v(0)}^{s} g(t)dt \right) \right)^{-1} ds = \infty$$

и получаем противоречие с условием (4). Теорема 2 доказана.

Докажем третью теорему.

Доказательство. Для доказательства нам достаточно показать существование положительного решения $v(r)$ уравнения

$$(q(r)A(|v'(r)|)v'(r))' = q(r)f(r, v(r)), \tag{15}$$

с начальными данными $v(0) > 0$ и $v'(0) = 0$ на интервале $[0, \infty)$, поскольку функция $v(r)$ является радиально-симметричным положительным целым решением неравенства (1).

Выберем $a > 0$ такое, что $f(a) > 0$, и пусть $v(r)$ — решение (15) с начальными условиями $v(0) = a$ и $v'(0) = 0$. Интегрируя равенство (15) по отрезку $[0, r]$, $r < R$, получим

$$A(|v'(r)|)v'(r) = \frac{1}{q(r)} \int\limits_{0}^{r} q(s)f(s, v(s))ds, \quad 0 < r < R. \tag{16}$$

Тогда $v'(r) \geq 0$ для $0 \leq r < R$, так как $A(v'(r))v'(r) \geq 0$. Покажем, что решение $v(r)$ существует на $[0, \infty)$. Предположим противное, что решение $v(r)$ определено на конечном интервале $[0, R)$, $R < \infty$. Легко показать так же (см., например, [7; 9]), что в этом случае выполнено $v(R - 0) = \infty$.

Далее представим (15) в следующем виде

$$(A(|v'(r)|)v'(r))' + \frac{q'(r)}{q(r)} A(|v'(r)|)v'(r) = f(r, v(r)).$$

Так как $v'(r) \geq 0$ при $0 \leq r < R$ и $q'(r) \geq 0$, то

$$(A(|v'(r)|)v'(r))' \leq f(r, v(r)) \leq M_R(v(r)),$$

где $M_R(t) = \max_{r \in [0,R]} f(r, t)$ для любого $t > 0$. Умножая последнее неравенство на $v'(r)$ и интегрируя его по отрезку $[0, r]$ при $r < R$, получим

$$\Psi(v'(r)) \leq \int\limits_{v(0)}^{v(r)} M_R(s)ds.$$

В этом неравенстве переходим к обратной функции, интегрируем еще раз по отрезку $[0, r]$ при $r < R$ и устремляем $r \to R$. В итоге получаем

$$\int\limits_{v(0)}^{\infty} \left(\Phi \left(\int\limits_{v(0)}^{s} M_R(t)dt \right) \right)^{-1} ds \leq R < \infty,$$

что противоречит (5). Следовательно, решение v уравнения (15) с начальными данными $v(0) = a$ и $v'(0) = 0$ существует на луче $[0, \infty)$. В силу произвольности выбора значения $a > 0$ получаем континуум различных положительных решений уравнения (15), и следовательно, неравенства (1). Теорема 3 доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 15-41-02479 р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, М. Трудингер. — М. : Наука, 2007. — 464 с.

2. Лосев, А. Г. О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев // Сиб. мат. журнал. — 1998. — Т. 39, № 1. — С. 87–93.

3. Лосев, А. Г. О положительных решениях квазилинейных эллиптических неравенств на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Ю. С. Федоренко // Мат. заметки. — 2007. — Т. 81, № 6. — С. 867–878.

4. Лосев, А. Г. Об асимптотическом поведении положительных решений некоторых квазилинейных неравенств на модельных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Уфимский математический журнал. — 2013. — Т. 5, № 1. — С. 83–89.

5. Лосев, А. Г. Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 6 (445). — С. 41–49.

6. Лосев, А. Г. Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Алгебра и анализ. — 2001. — Т. 13, № 1. — С. 84–110.

7. Лосев, А. Г. Положительные решения квазилинейных неравенств на модельных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2013. — № 1. — С. 59–69.

8. Мазепа, Е. А. О существовании целых решений одного полулинейного эллиптического уравнения на некомпактных римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Мат. заметки. — 2007. — Т. 81, № 1. — С. 153–156.

9. Мазепа, Е. А. Положительные решения квазилинейных эллиптических неравенств на модельных римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Изв. вузов. Математика. — 2015. — № 9. — С. 22–30.

10. Grigor'yan, A. Analitic and geometric background of recurence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. Grigor'yan // Bull. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 36. — P. 135–249.

11. Keller, J. B. On solutions of $\Delta u = f(u)$ / J. B. Keller // Commun. Pure Appl. Math. — 1957. — № 10. — P. 503–510.

12. Kusano, T. Radial entire solutions of a class of quasilinear elliptic equations / T. Kusano, C. A. Swanson // Journal of diff. equation. — 1990. — № 83. — P. 379–399.

13. Naito, Y. Entire solutions of the inequality $\mathrm{div}(A(|Du|)Du) \geq f(u)$ / Y. Naito, H. Usami // Math. Z. — 1997. — Vol. 225. — P. 167–175.

14. Osserman, R. On the inequality $\Delta u \geq f(u)$ / R. Osserman // Pack. J. Math. — 1957. — № 7. — P. 1641–1647.

REFERENCES

1. Gilbarg D., Trudinger M. *Ellipticheskie differentsialnye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Elliptic Partial Differential Equations of Second Order]. Moscow, Nauka Publ., 2007. 464 p.

2. Losev A.G. O nekotorykh liuvillevykh teoremakh na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Some Liouville Theorems on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Sib. mat. zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1998, vol. 39, no. 1, pp. 87-93.

3. Losev A.G., Fedorenko Yu.S. O polozhitelnykh resheniyakh kvazilineynykh ellipticheskikh neravenstv na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Positive Solutions of Quasilinear Elliptic Inequalities on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 2007, vol. 81, no. 6, pp. 867-878.

4. Losev A.G., Mazepa E.A. Ob asimptoticheskom povedenii polozhitelnykh resheniy nekotorykh kvazilineynykh neravenstv na modelnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Asymptotic Behavior of Positive Solutions of Some Quasilinear Inequalities on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal* [Ufa Mathematical Journal], 2013, vol. 5, no. 1, pp. 83-89.

5. Losev A.G., Mazepa E.A. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy nekotorykh uravneniy ellipticheskogo tipa na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Asymptotic Behavior of Solutions of Certain Equations Elliptic Type on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1999, no. 6 (445), pp. 41-49.

6. Losev A.G., Mazepa E.A. Ogranichennye resheniya uravneniya Shredingera na rimanovykh proizvedeniyakh [Bounded Solutions of the Schrödinger Equation on Riemannian Products]. *Algebra i analiz* [St. Petersburg Mathematical Journal], 2001, vol. 13, no. 1, pp. 84-110.

7. Losev A.G., Mazepa E.A. Polozhitelnye resheniya kvazilineynykh neravenstv na modelnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [The Positive Solutions of Quasilinear Inequalities on Model Riemannian Manifolds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2013, no. 1, pp. 59-69.

8. Mazepa E.A. O sushchestvovanii tselykh resheniy odnogo polulineynogo ellipticheskogo uravneniya na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Existence of Entire Solutions of a Semilinear Elliptic Equation on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 2007, vol. 81, no. 1, pp. 153-156.

9. Mazepa E.A. Polozhitelnye resheniya kvazilineynykh ellipticheskikh neravenstv na modelnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [The Positive Solutions of Quasilinear Elliptic Inequalities on Model Riemannian Manifolds]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2015, no. 9, pp. 22-30.

10. Grigor'yan A. Analitic and Geometric Background of Recurence and Non-Explosion of the Brownian Motion on Riemannian Manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1999, vol. 36, pp. 135-249.

11. Keller J.B. On Solutions of $\Delta u = f(U)$. *Commun. Pure Appl. Math.*, 1957, no. 10, pp. 503-510.

12. Kusano T., Swanson C.A. Radial Entire Solutions of a Class of Quasilinear Elliptic Equations. *Journal of diff. equation.*, 1990, no. 83, pp. 379-399.

13. Naito Y., Usami H. Entire Solutions of the Inequality div(A(|Du|)Du) ≥ f(U). *Math. Z.*, 1997, vol. 225, pp. 167-175.

14. Osserman R. On the Inequality $\Delta u \geq f(U)$. *Pack. J. Math.*, 1957, no. 7, pp. 1641-1647.

THE POSITIVE SOLUTIONS OF QUASILINEAR ELLIPTIC INEQUALITIES ON RIEMANNIAN PRODUCTS

Elena Alekseevna Mazepa
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
lmazepa@rambler.ru, matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In this paper asymptotic behavior of positive solutions of quasilinear elliptic inequalities (1) on warped Riemannian products is researched. In particular, we find exact conditions under which Liouville theorems on no nontrivial solutions are satisfied, as well as the conditions of existence and cardinality of the set of positive solutions of the studied inequalities on the Riemannian manifolds. The results generalize similar results obtained previously by Naito. Y. and Usami H. for the Euclidean space $\mathbf{R}^n$ and results obtained previously by Losev A. and Mazepa E. on the model Riemannian manifolds.

We describe warped Riemannian products. Fix the origin $O \in \mathbf{R}^n$ and a smooth function $q_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$ in the interval $(0, \infty)$. We define a Riemannian manifold M as follows:

(1) the set of points M is all $\mathbf{R}^n$;

(2) in coordinates $(r, \theta_1, \ldots, \theta_k)$ (where $r \in (0, \infty)$ and $\theta_i \in S^{n_i}$) Riemannian metric on $M \setminus \{O\}$ defined as

$$ds^2 = dr^2 + q_1^2(r)d\theta_1^2 + \cdots + q_k^2(r)d\theta_k^2,$$

where $d\theta_i$ — the standard Riemannian metric on the sphere S^{n_i}, $n = n_1 + \ldots n_k + 1$ — the dimension of M;

(3) Riemannian metric at O is a smooth continuation of the metric.

We will further assume that the function A in the inequality (1) satisfies the following conditions:

$$\begin{cases} A \in C(0,\infty), \quad A(p) > 0 \quad \text{for} \ \ p > 0, \\ pA(|p|) \in C(\mathbf{R}) \cap C^1(0,\infty), \\ (pA(p))' > 0 \text{ for } p > 0, \end{cases}$$

$c(x) \equiv c(r)$ — continuous positive on R_+ function, and the function $f \not\equiv 0$ such that $f(x,u) \in C(M)$, where $x = (r, \theta)$, $f \not\equiv 0$ and $f(\cdot, 0) = 0$.

Introduce designations $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$, $K = S_1 \times S_2 \ldots \times S_k$, $q(r) = \prod_{i=1}^{k} q_i^{n_i}(r)$,

$$I(r) = \frac{1}{q(r)} \int\limits_0^r c(s)q(s)\, ds.$$

We also use the following assumption on the function f:

$$\text{(F)} \quad \begin{cases} \text{there are continuous functions } c(r) > 0 \text{ and } g(u) > 0 \text{ so that} \\ g'(u) \geq 0, \quad 0 < c(r)g(u) \leq f(x,u) \text{ for } u > 0,\ r > 0,\ \theta \in K,\ g(0) = 0. \end{cases}$$

First, consider the case where $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) < \infty$.

Theorem 1. *Let* $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) < \infty$ *and manifold* M *is such that* $I(+0) = \lim\limits_{r\to+0} I(r) < \infty$ *and* $\limsup\limits_{r\to\infty} I(r) = \infty$*. Then, if the condition* (F)*, then positive integer solutions of the inequality* (1) *on* M *does not exist.*

Next, consider the case where $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) = \infty$*. We prove a theorem on the non-existence of positive solutions of (1) and the conditions for the existence of a continuum of positive integer solutions of the inequality.*

Key words: quasilinear elliptic inequalities, asymptotic behavior, the theorem of Liouville type, warped Riemannian products, cardinality of the set of solutions.