



DOI: <http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.1.5>

УДК 517.951, 519.632

ББК 22.161, 22.19

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕННОГО РАСТРОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ¹

Алексей Александрович Клячин

Доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
klyachin-aa@yandex.ru, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В работе содержится описание одного алгоритма восстановления поврежденного изображения, основанного на использовании максимального и минимального продолжения липшицевой функции, заданной в плоской области. Приводятся примеры работы данного алгоритма для изображений с разной степенью повреждений.

Ключевые слова: восстановление данных, импульсный шум, медианный фильтр, растровое изображение, условие Липшица.

Введение

Одной из задач применения методов обработки цифровых изображений является повышение качества изображения с целью улучшения его визуального восприятия человеком. Например, часто необходимо решить задачу устранения дефектов и помех в изображении, которые возникают на различных этапах его формирования и хранения (см., например, [4], а также недавние исследования [1–3; 6]). В работах [1; 2] представлены достаточно интересные и эффективные алгоритмы поиска поврежденных пикселей в изображении и их восстановления методами ассоциативных правил и анализа иерархий. Восстановлению изображений, содержащих различные исторические орнаменты и имеющих поврежденные области, посвящена работа [3]. В ней авторы описывают разработанный алгоритм, учитывающий особенности (наличие ритма и стиля) таких изображений. Отметим также работу [6], в которой кроме устранения импульсного шума

решается задача восстановления смазанных изображений с использованием традиционных методов (параметрическая фильтрация Винера, регуляризация Тихонова, медианная фильтрация) и анализа последовательности применения этих методов. Из всего перечисленного видно, что интерес к задачам улучшения изображений не ослабевает, и всегда находятся интересные и важные вопросы, которые привлекают внимание исследователей в данной области.

Отметим, что все множество методов, применяемых к улучшению изображения, распадается на две большие части. В первую входят методы, которые работают с данными изображения в пространственной области, то есть непосредственно со значениями уровней яркости точек изображения. Во вторую входят алгоритмы, которые оперируют с данными из частотной области, являющиеся результатом применения к изображению дискретного преобразования Фурье. Наиболее распространенными методами в пространственной области, применяемыми для удаления «шума» в изображении, являются линейная и медианная фильтрации изображения. Применение медианного фильтра особенно эффективно для устранения не только мелких дефектов, но и имеющих достаточно большие размеры в каком-то одном направлении, например, представляющих собой некоторые изогнутые линии. Однако, как мы увидим ниже, если площадь повреждений достаточно велика, то большую часть дефектов медианный фильтр оставляет в выходном изображении. Линейные же фильтры пригодны в основном для решения задачи сглаживания (расфокусировки) изображения. При этом оба эти подхода имеют тот недостаток, что они размывают изображение, сглаживая границы перехода цвета. Иногда этот побочный эффект является нежелательным.

В данной статье мы представляем новый алгоритм, выполняющий преобразования напрямую в пространственной области изображения и направленный на подавление нежелательных помех и дефектов в изображении. Наш подход основан на применении методов продолжения функций. В следующем разделе статьи мы даем некоторые теоретические пояснения работы алгоритма.

1. Продолжение липшицевых функций

Пусть K — некоторое ограниченное множество пространства \mathbf{R}^n . Предположим, что на этом множестве задана функция $f : K \rightarrow \mathbf{R}$. Рассмотрим на всем пространстве \mathbf{R}^n функцию, определенную равенством

$$F(x) = \inf_{\xi \in K} \{f(\xi) + L|x - \xi|\},$$

где L — некоторая постоянная. Отметим следующие свойства данной функции. Во-первых, функция $F(x)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L :

$$|F(x') - F(x'')| \leq L|x' - x''|, \quad x', x'' \in \mathbf{R}^n.$$

Во-вторых, если функция $f(x)$ удовлетворяет этому же условию Липшица (с той же или меньшей чем L постоянной), то можно показать, что $F(x) = f(x)$ при всех $x \in K$, то есть в этом случае функция $F(x)$ является продолжением на все пространство \mathbf{R}^n функции $f(x)$. Отметим также то, что приведенная выше функция $F(x)$ использовалась нами ранее для построения продолжения функций с ограничениями на градиент [5].

Рассмотрим частный случай описанной ситуации. Именно, пусть задана некоторая ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, в которой определена функция $u = f(x, y)$. Например,

можно считать, что значение $f(x, y)$ есть уровень яркости точки (x, y) на некотором изображении, расположенном в области Ω . Для всяких положительных α и δ определим функцию

$$F_{\alpha}^{\delta}(x, y, z) = \inf_{(\xi, \eta) \in \bar{\Omega}} \{f(\xi, \eta) + \alpha \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2} : |\xi - x| \leq \delta, |\eta - y| \leq \delta\},$$

где $(x, y) \in \bar{\Omega}$ и $z > 0$. Введем в рассмотрение следующее множество

$$\Omega_{\delta}(x, y) = \{(\xi, \eta) \in \bar{\Omega} : |\xi - x| \leq \delta, |\eta - y| \leq \delta\}$$

и обозначим через $L_f(x, y)$ такую величину

$$L_f(x, y) = \sup_{(\xi, \eta) \in \Omega_{\delta}} \left\{ \frac{|f(x, y) - f(\xi, \eta)|}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \right\}.$$

Теорема 1. Для любых $z > 0$ и $(x, y) \in \Omega$ таких, что $L_f(x, y) \leq \alpha$, выполняется неравенство

$$|F_{\alpha}^{\delta}(x, y, z) - f(x, y)| \leq \alpha z.$$

Доказательство. Зафиксируем $(x, y) \in \Omega$ и $z > 0$. Так как $\bar{\Omega}$ компактно, то найдется точка $(\xi_1, \eta_1) \in \bar{\Omega}$, $|\xi_1 - x| \leq \delta$, $|\eta_1 - y| \leq \delta$, такая, что

$$F_{\alpha}^{\delta}(x, y, z) = f(\xi_1, \eta_1) + \alpha \sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2 + z^2}.$$

В силу определения функции $F_{\alpha}^{\delta}(x, y, z)$, полагая $\xi = x, \eta = y$, имеем

$$F_{\alpha}^{\delta}(x, y, z) \leq f(x, y) + \alpha z.$$

С другой стороны, применяя неравенство треугольника, получаем

$$\begin{aligned} F_{\alpha}^{\delta}(x, y, z) &= f(\xi_1, \eta_1) + \alpha \sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2 + z^2} \geq \\ &\geq f(x, y) - L_f(x, y) \sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2} + \alpha \sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2 + z^2} \geq \\ &\geq f(x, y) - \alpha \sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2} + \alpha \sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2 + z^2} \geq \\ &\geq f(x, y) - \alpha z. \end{aligned}$$

Из доказанной теоремы следует, что при $z \rightarrow +0$ семейство функций $F_{\alpha}^{\delta}(x, y, z)$ равномерно сходится к исходной функции $f(x, y)$ на множестве точек (x, y) , в которых $L_f(x, y) \leq \alpha$. Положим

$$\Omega_{\delta, \alpha} = \{(x, y) \in \bar{\Omega} : L_f(x, y) < \alpha\}.$$

Таким образом, для $(x, y) \in \Omega_{\delta, \alpha}$ выполнено $F_{\alpha}^{\delta}(x, y, 0) = f(x, y)$, то есть функция $F_{\alpha}^{\delta}(x, y, z)$ является продолжением функции $f(x, y)$. В остальных же точках $F_{\alpha}^{\delta}(x, y, 0)$ не совпадает, вообще говоря, с функцией $f(x, y)$. Что может происходить вне множества $\Omega_{\delta, \alpha}$, увидим из следующих иллюстрирующих примеров.

Пример 1. Предположим, что функция $f(x, y)$ определяется равенством

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \neq (x_0, y_0); \\ H, & (x, y) = (x_0, y_0), \end{cases}$$

где точка $(x_0, y_0) \in \Omega$ и $H > 0$. Не сложно убедиться в том, что $F_\alpha^\delta(x, y, z) = \alpha z$. Таким образом, имеющийся изолированный локальный максимум функции в точке (x_0, y_0) удаляется процедурой построения функции $F_\alpha^\delta(x, y, z)$, так как $F_\alpha^\delta(x, y, z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow +0$ (см. рис. 1).

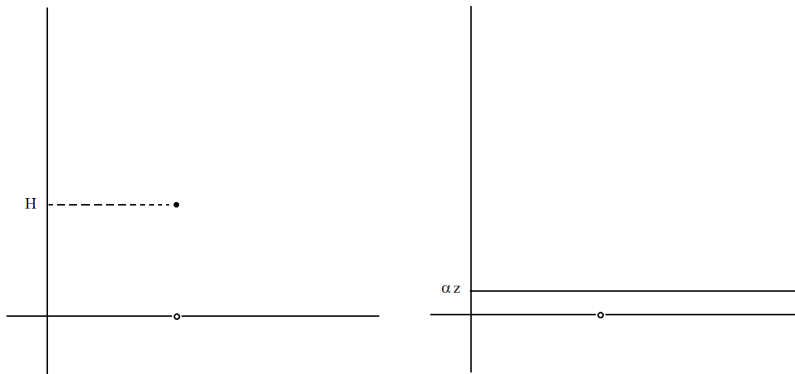


Рис. 1. Удаление локального максимума

В то же время, если исходная функция имеет изолированный локальный минимум, то он сохраняется в функции $F_\alpha^\delta(x, y, z)$. Это поясняется следующим примером.

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) = (x_0, y_0); \\ H, & (x, y) \neq (x_0, y_0), \end{cases}$$

для которой

$$F_\alpha^\delta(x, y, z) = \begin{cases} \min \left(H + \alpha z, \alpha \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2} \right), & (x, y) \neq (x_0, y_0), \\ \alpha z, & (x, y) = (x_0, y_0). \end{cases}$$

Легко видеть, что $F_\alpha^\delta(x, y, z)$ при $z \rightarrow +0$ сходится к функции

$$F_\alpha^\delta(x, y, +0) = \begin{cases} \min \left(H, \alpha \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right), & (x, y) \neq (x_0, y_0), \\ 0, & (x, y) = (x_0, y_0). \end{cases}$$

Данная ситуация поясняется еще и следующим рисунком 2, на котором слева показан график функции f , а справа — функции F_α^δ для случая одной переменной.

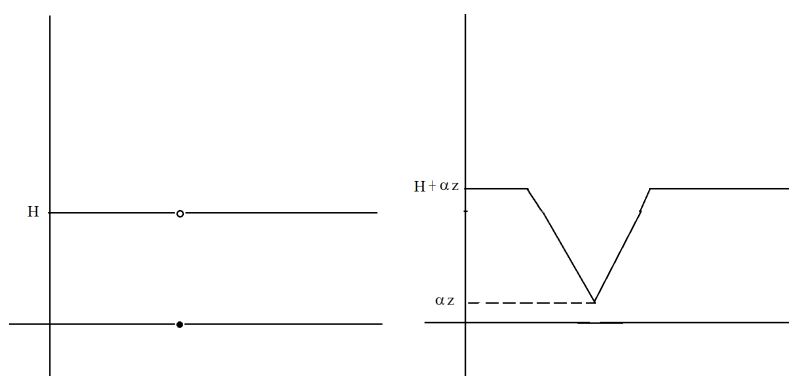


Рис. 2. Сохранение локального минимума

Из приведенных примеров мы можем заключить, что построенная функция при $(x, y) \in \Omega_\delta^\alpha$ и $z = 0$ совпадает с $f(x, y)$. В других же точках такого совпадения, вообще говоря, не происходит. Более того, первый пример показывает, что изолированные локальные максимумы функции $f(x, y)$ построенная функция $F_{\alpha, \delta}(x, y, z)$ удаляет, а изолированные локальные минимумы оставляет. Отметим, что ситуация будет противоположной, если использовать функцию

$$G_\alpha^\delta = \sup_{(\xi, \eta) \in \bar{\Omega}} \{f(\xi, \eta) - \alpha \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2} : |\xi - x| \leq \delta, |\eta - y| \leq \delta\}.$$

2. Описание алгоритма и результатов его работы

Будем считать, что изображение задается функцией $u = f(x, y)$, где $x = 0, \dots, M$, $y = 0, \dots, N$, а ее значение представляет собой уровень яркости точки (x, y) , который меняется в диапазоне $u = 0, \dots, U$. Рассматривается текущее окно размером $(2n + 1) \times (2n + 1)$ с центром в точке (x, y) , где $n = 1, 2, \dots$. В качестве выходного значения яркости точки, отвечающей центру окна, возьмем величину

$$F_\alpha^n(x, y, z) = \min\{f(i, j) + \alpha \sqrt{(x - i)^2 + (y - j)^2 + z^2} : |x - i| \leq n, |y - j| \leq n\},$$

где $x = n, \dots, M - n$, $y = n, \dots, N - n$. Как было замечено в предыдущем разделе, данное преобразование будет устранять локальные максимумы яркости, однако оставляет и несколько увеличивает в размере локальные минимумы. Для их подавления можно воспользоваться двойственной функцией, которая выглядит следующим образом

$$G_\alpha^n(x, y, z) = \max\{f(i, j) - \alpha \sqrt{(x - i)^2 + (y - j)^2 + z^2} : |x - i| \leq n, |y - j| \leq n\}.$$

При этом необходимо для каждой текущей точки (x, y) определить, какую из данных функций нужно применить. Для этого мы поступаем следующим образом. За один проход по всем точкам (x, y) изображения определяются точки локального максимума и локального минимума. При повторном проходе данная информация учитывается для определения используемой функции. Иными словами, отклик фильтра $H(x, y, z)$ вычисляется по следующему правилу

$$H(x, y, z) = \begin{cases} F_{\alpha, n}(x, y, z), & \text{если в } (x, y) \text{ локальный максимум,} \\ G_{\alpha, n}(x, y, z), & \text{если в } (x, y) \text{ локальный минимум,} \\ f(x, y), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Результаты работы описанного алгоритма будем сравнивать с результатами работы медианного фильтра. Итак, на рисунке 3 показаны исходное изображение и то же изображение с нанесенным на него дефектом.

На рисунке 4 представлены выходные изображения после обработки испорченного изображения медианным фильтром (слева) и описанным выше алгоритмом (справа). Можно видеть, что медианный фильтр заметно больше оставляет поврежденных точек без изменения.

На следующих рисунках показан результат работы нашего алгоритма в случае, когда на изображении имеется случайный импульсный шум, равномерно распределенный по всему изображению и занимающий 20%, 50% и 75% его площади.



Рис. 3. Исходное изображение и испорченное изображение с дефектами



Рис. 4. Восстановленное изображение медианным фильтром и описанным выше алгоритмом



Рис. 5. Восстановление изображения с наличием 20% повреждений



Рис. 6. Восстановление изображения с наличием 50% повреждений



Рис. 7. Восстановление изображения с наличием 75% повреждений

Вывод. Представленный в статье алгоритм достаточно хорошо восстанавливает изображения с различными типами повреждений: как носящие случайный характер с равномерным распределением по всему изображению (импульсный шум), так и сосредоточенные на отдельных участках. Даже в случае больших потерь алгоритм выдает на выходе изображение, хотя и не полностью восстановленное, но все-таки позволяющее рассмотреть на нем достаточно крупные детали, плохо видимые на входном изображении.

ПРИМЕЧАНИЕ

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-41-02517-р_волжье_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белим, С. В. Алгоритм восстановления поврежденных пикселей на зашумленных изображениях на основе метода анализа иерархий / С. В. Белим, С. А. Селиверстов // Наука и образование (МГТУ им. Н.Э. Баумана). — 2014. — № 11. — С. 521–534.
2. Белим, С. В. Алгоритм поиска поврежденных пикселей и удаления импульсного шума на изображениях с использованием метода ассоциативных правил / С. В. Белим, А. О. Майоров-Зильбернагель // Наука и образование (МГТУ им. Н.Э. Баумана). — 2014. — № 12. — С. 716–737.
3. Восстановление двумерных изображений с дефектами / В. Ю. Зиняков, А. Е. Городецкий, А. Ю. Кучмин, Е. И. Зеленев, Н. В. Алферова // Информационно-управляющие системы. — 2013. — № 3. — С. 8–15.
4. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. — М. : Техносфера, 2005. — 1071 с.
5. Клячин, А. А. Следы функций с пространственно-подобными графиками и задача о продолжении при ограничениях на градиент / А. А. Клячин, В. М. Миклюков // Математический сборник. — 1992. — № 7 (183). — С. 49–64.
6. Сизиков, В. С. Последовательность операций при фильтрации шумов на искаженных изображениях / В. С. Сизиков, Р. А. Экземпляров // Оптический журнал. — 2013. — № 1 (80). — С. 39–48.

REFERENCES

1. Belim S.V., Seliverstov S.A. Algoritm vosstanovleniya povrezhdennykh pikseley na zashumlennykh izobrazheniyakh na osnove metoda analiza ierarkhiy [The Analytic Hierarchy Method-Based Algorithm for Restoring Broken Pixels on the Noisy Images]. *Nauka i obrazovanie (MGTU im. N.E. Bauman)*, 2014, no. 11, pp. 521-534.
2. Belim S.V., Mayorov-Zilbernegel A.O. Algoritm poiska povrezhdennykh pikseley i udaleniya impulsnogo shuma na izobrazheniyakh s ispolzovaniem metoda assotsiativnykh pravil [Algorithm for Searching the Broken Pixels and Eliminating Impulse Noise in Images Using a Method of Association Rules]. *Nauka i obrazovanie (MGTU im. N.E. Bauman)*, 2014, no. 12, pp. 716-737.
3. Zinyakov V.Yu., Gorodetskiy A.E., Kuchmin A.Yu., Zelenev E.I., Alferova N.V. Vosstanovlenie dvumernykh izobrazheniy s defektami [Reconstructing Two-Dimensional Images with Defects]. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy*, 2013, no. 3, pp. 8-15.
4. Gonsales R., Vuds R. *Tsifrovaya obrabotka izobrazheniy* [Digital Image Processing]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2005. 1071 p.
5. Klyachin A.A., Miklyukov V.M. Sledy funktsiy s prostranstvenno-podobnymi grafikami i zadacha o prodolzhenii pri ogranicheniyakh na gradient [Traces of Functions with Spacelike

Graphs, and the Extension Problem under Restrictions on the Gradient]. *Matematicheskii sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1992, no. 7 (183), pp. 49-64.

6. Sizikov V.S., Ekzemplaryarov R.A. Posledovatel'nost operatsiy pri filtratsii shumov na iskazhennykh izobrazheniyakh [Operating Sequence When Noise Is Being Filtered on Distorted Images]. *Opticheskii zhurnal* [Journal of Optical Technology], 2013, no. 1 (80), pp. 39-48.

MATHEMATICAL MODEL FOR RECONSTRUCTING A DAMAGED BITMAP

Aleksey Aleksandrovich Klyachin

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
 Head of Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
 Volgograd State University
 klyachin-aa@yandex.ru, matf@volsu.ru
 Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. The paper describes an algorithm for restoring a damaged image, based on the use of maximum and minimum Lipschitz function defined in a flat area. Namely, we will assume that the image is given by the function $u = f(x, y)$, where $x = 0, \dots, M$, $y = 0, \dots, N$, and its value is a brightness level of point (x, y) , which varies in the range of $u = 0, \dots, U$. We consider the current window of the size $(2n + 1) \times (2n + 1)$ with center at the point (x, y) , where $n = 1, 2, \dots$. As the output luminance of the point corresponding to the center of the window, take the value

$$F_{\alpha}^n(x, y, z) = \min\{f(i, j) + \alpha\sqrt{(x-i)^2 + (y-j)^2 + z^2} : |x-i| \leq n, |y-j| \leq n\},$$

where $x = n, \dots, M - n$, $y = n, \dots, N - n$. To suppress the local minima we can use the dual function that looks like this

$$G_{\alpha}^n(x, y, z) = \max\{f(i, j) - \alpha\sqrt{(x-i)^2 + (y-j)^2 + z^2} : |x-i| \leq n, |y-j| \leq n\}.$$

Next, it is necessary to define for each current point (x, y) which of these functions must be applied. To do this, we proceed as follows. In one pass through all the points (x, y) are determined by the image of a local maximum and local minimum points. Repeated passage of this information is taken into account for the determination of the function used. Response $H(x, y, z)$ of our filter is calculated according to the rule

$$H(x, y, z) = \begin{cases} F_{\alpha, n}(x, y, z), & \text{if } (x, y) \text{ is point of local maximum,} \\ G_{\alpha, n}(x, y, z), & \text{if } (x, y) \text{ is point of local minimum,} \\ f(x, y), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We show examples of operation of this algorithm for images with varying degrees of damage. We consider images having 20 % - 75 % of the defects. Presented algorithm quite well restores the image with different types of lesions: how random nature with a uniform distribution over the entire image (impulse noise), and concentrated in certain areas.

Key words: data recovery, impulse noise, median filter, bitmap, Lipschitz condition.