DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.2.2

УДК 517.968
ББК 22.161

СМЕШАННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА БУССИНЕСКА

Турсун Камалдинович Юлдашев

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики,
Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнева
tursun.k.yuldashev@gmail.com
просп. им. газеты «Красноярский рабочий», 31, 660014 г. Красноярск, Российская Федерация

Аннотация. Рассмотрены вопросы разрешимости и построения решения нелокальной смешанной задачи для однородного смешанного дифференциального уравнения типа Буссинеска. Использован спектральный метод, основанный на разделение переменных. Решение поставленной задачи представляется в виде ряда Фурье с разделенными переменными. Установлен критерий единственности решения. При выполнении этого критерия доказана однозначная разрешимость задачи. Когда нарушается критерий единственности, решение данной задачи при определенных условиях представляется в виде суммы рядов Фурье.

Ключевые слова: смешанная задача, дифференциальное уравнение смешанного типа, уравнение типа Буссинеска, нелокальное условие, спектральный метод, однозначная разрешимость.

1. Постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению смешанных и обратных задач для уравнений в частных производных. Теория смешанных и краевых задач в силу ее прикладной важности в настоящее время является одной из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений (см., например: [3; 18; 30]).

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы. Часто изучение задач моделирования фильтрации жидкости в пористых средах сводится к рассмотрению дифференциальных уравнений третьего порядка [24]. К дифференциальным уравнениям в частных производных третьего порядка также сводятся задачи изучения распространения волн в слабодиспергирующих средах, в холодной плазме и магнитной гидродинамике и т. д.

Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения четвертого порядка (см., например: [2; 23]). Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1; 8]. Дифференциальные уравнения в частных производных типа Буссинеска имеют много приложений в математической физике (см., например: [19]).

Изучению прямых и обратных задач для уравнений в частных производных третьего и четвертого порядков посвящено большое количество работ (см., например: [4; 9; 20; 25–29]).

В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме (см.: [6; 11]).

Задачи, где меняется тип дифференциального уравнения в рассматриваемой области, имеют важные приложения (см., например: [5; 21; 22]). Дифференциальные уравнения смешанного типа изучались в работах многих авторов, в частности [7; 10; 12–17].

В настоящей работе изучается нелокальная смешанная задача для смешанного дифференциального уравнения типа Буссинеска. Итак, в прямоугольной области $\Omega=\{(x,t)|0<x<1,\ -\alpha<t<\beta\}$ рассматривается смешанное уравнение вида

$$\Im U\equiv\begin{cases}U_t-U_{txx}-U_{xx}+\nu^2U=0, & t>0,\\ U_{tt}-U_{ttxx}-U_{xx}+\nu^2U=0, & t<0,\end{cases}\tag{1}$$

где ν, α и β – заданные положительные действительные числа.

Задача. Найти в области Ω функцию $U(x, t)$, удовлетворяющую условиям:

$$U(x,t)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega\cup\{x=0\}\cup\{x=1\})\cap C^2(\Omega_-)\cap C^{2,1}_{x,t}(\Omega_+\cup\{t=\beta\}),\tag{2}$$

$$\Im U(x,t)\equiv 0,\ (x,t)\in\Omega_-\cup\Omega_+\cup\{t=\beta\},\tag{3}$$

$$U(0,t)=U(1,t),\quad -\alpha\le t\le\beta,\tag{4}$$

$$U_x(0,t)=U_x(1,t),\quad -\alpha\le t\le\beta,\tag{5}$$

$$\int_{-\alpha}^{0}U(x,t)\,dt=\psi(x),\quad 0\le x\le 1,\tag{6}$$

где $\psi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция; $\psi(0)=\psi(1)$, $\psi'(0)=\psi'(1)$.

2. Поиск частных решений

Нетривиальные частные решения уравнения (1) в области Ω будем искать в виде $U(x,t)=X(x)\cdot T(t)$. Тогда из этого уравнения (1) получаем:

$$\begin{cases}X(x)\cdot T'(t)-X''(x)\cdot T'(t)+\nu^2X(x)\cdot T(t)=X''(x)\cdot T(t), & t>0,\\ X(x)\cdot T''(t)-X''(x)\cdot T''(t)+\nu^2X(x)\cdot T(t)=X''(x)\cdot T(t), & t<0.\end{cases}$$

Здесь почленно разделим на $X(x)\cdot T(t)$:

$$\frac{T'(t)}{T(t)}-\frac{X''(x)}{X(x)}\cdot\frac{T'(t)}{T(t)}+\nu^2=\frac{X''(x)}{X(x)},\ \text{при } t>0,$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)}-\frac{X''(x)}{X(x)}\cdot\frac{T''(t)}{T(t)}+\nu^2=\frac{X''(x)}{X(x)},\ \text{при } t<0,$$

то есть справедливы соотношения:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\mu^2,\ 0<\mu,$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} + \nu^2 = -\mu^2, \text{ при } t > 0,$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} + \nu^2 = -\mu^2, \text{ при } t < 0,$$

где μ^2 – постоянная разделения.

Отсюда с учетом граничных условий (4) и (5) получаем:

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0,\ 0 < x < 1, \tag{7}$$

$$X(0) = X(1),\quad X'(0) = X'(1), \tag{8}$$

$$T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0,\ 0 < t < \beta, \tag{9}$$

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0,\ -\alpha < t < 0, \tag{10}$$

где

$$\lambda^2 = \frac{\nu^2 + \mu^2}{1 + \mu^2}.$$

Спектральная задача (7) и (8) имеет решение

$$X_0(x) = 1,\ X_n(x) = \{\cos \mu_n x, \sin \mu_n x\},\ \mu_n = 2\pi n,\ \ n = 1, 2, \dots . \tag{11}$$

Тогда общие решения дифференциальных уравнений (9) и (10) имеют вид

$$T_n(t) = \begin{cases} c_n e^{-\lambda_n^2 t}, & t > 0, \\ a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t, & t < 0, \end{cases} \tag{12}$$

где a_n, b_n и c_n – произвольные постоянные.

Поскольку решения $U_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$ должны удовлетворять условию (2), то постоянные a_n, b_n и c_n подберем так, чтобы выполнялись условия:

$$T_n(0+0) = T_n(0-0),\ \ T_n'(0+0) = T_n'(0-0). \tag{13}$$

Из (12) с учетом условий (13) получаем, что $a_n = c_n$ и $b_n = -c_n \lambda_n$. Тогда функции (12) принимают вид

$$T_n(t) = \begin{cases} c_n e^{-\lambda_n^2 t}, & t > 0, \\ c_n \cos \lambda_n t - c_n \lambda_n \sin \lambda_n t, & t < 0. \end{cases} \tag{14}$$

3. Единственность решения

Пусть задача (2)–(6) в области Ω имеет единственное решение $U(x, t)$. Тогда с учетом функций (11) это решение согласно методу Фурье разделения переменных представляем в виде

$$U(x,t) = \frac{\vartheta_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\vartheta_n(t) \cos \mu_n x + u_n(t) \sin \mu_n x \right],$$

где
$$u_n(t) = 2\int_0^1 U(x,t)\,\sin\mu_n x\,dx,\ \ n = 1, 2, \ldots\ , \tag{15}$$

$$\vartheta_n(t) = 2\int_0^1 U(x,t)\,\cos\mu_n x\,dx,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots\ . \tag{16}$$

Покажем, что эти функции удовлетворяют уравнениям (9), (10) в соответствующих интервалах и условию (13). Дифференцируя по t равенства (15) и (16) при $t > 0$ один раз, а при $t < 0$ – два раза и учитывая уравнение (1), получим

$$u'_n(t) = 2\int_0^1 U_t\,\sin\mu_n x\,dx = 2\int_0^1 (U_{txx} + U_{xx} - \nu^2 U)\,\sin\mu_n x\,dx =$$
$$= -\nu^2 u_n(t) + 2\int_0^1 (U_{txx} + U_{xx})\,\sin\mu_n x\,dx, \tag{17}$$

$$u''_n(t) = 2\int_0^1 U_{tt}\,\sin\mu_n x\,dx = 2\int_0^1 (U_{ttxx} + U_{xx} - \nu^2 U)\,\sin\mu_n x\,dx =$$
$$= -\nu^2 u_n(t) + 2\int_0^1 (U_{ttxx} + U_{xx})\,\sin\mu_n x\,dx, \tag{18}$$

$$\vartheta'_n(t) = 2\int_0^1 U_t\,\cos\mu_n x\,dx = 2\int_0^1 (U_{txx} + U_{xx} - \nu^2 U)\,\cos\mu_n x\,dx =$$
$$= -\nu^2 \vartheta_n(t) + 2\int_0^1 (U_{txx} + U_{xx})\,\cos\mu_n x\,dx, \tag{19}$$

$$\vartheta''_n(t) = 2\int_0^1 U_{tt}\,\cos\mu_n x\,dx = 2\int_0^1 (U_{ttxx} + U_{xx} - \nu^2 U)\,\cos\mu_n x\,dx =$$
$$= -\nu^2 \vartheta_n(t) + 2\int_0^1 (U_{ttxx} + U_{xx})\cos\mu_n x\,dx. \tag{20}$$

Интегрируя два раза по частям в интегралах (17)–(20), с учетом условий (4) и (5) получаем следующие уравнения:

$$u'_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = 0,\ \ t > 0, \tag{21}$$

$$u''_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = 0,\ \ t < 0, \tag{22}$$

$$\vartheta'_n(t) + \lambda_n^2\,\vartheta_n(t) = 0,\ \ t > 0, \tag{23}$$

$$\vartheta''_n(t) + \lambda_n^2\,\vartheta_n(t) = 0,\ \ t < 0, \tag{24}$$

где
$$\lambda_n^2 = \frac{\nu^2 + \mu_n^2}{1 + \mu_n^2}.$$

Дифференциальные уравнения (21) и (22), (23) и (24) при $\lambda = \lambda_n$ совпадают соответственно с уравнениями (9) и (10). Далее с учетом условий (2) из (15) и (16) получаем:

$$u_n(0+0) = 2\int_0^1 U(x,0+0)\,\sin\mu_n x\,dx = 2\int_0^1 U(x,0-0)\,\sin\mu_n x\,dx = u_n(0-0), \tag{25}$$

$$\vartheta_n(0+0)=2\int_0^1 U(x,0+0)\cos\mu_n x\,dx=2\int_0^1 U(x,0-0)\cos\mu_n x\,dx=\vartheta_n(0-0). \qquad (26)$$

Дифференцируя функций (15) и (16) один раз по t, в силу условий (2) имеем:

$$u'_n(0+0)=2\int_0^1 U_t(x,0+0)\sin\mu_n x\,dx=2\int_0^1 U_t(x,0-0)\sin\mu_n x\,dx=u'_n(0-0), \qquad (27)$$

$$\vartheta'_n(0+0)=2\int_0^1 U_t(x,0+0)\cos\mu_n x\,dx=2\int_0^1 U_t(x,0-0)\cos\mu_n x\,dx=\vartheta'_n(0-0). \qquad (28)$$

Условия (25), (26) и (27), (28) совпадают с условиями (13). Тогда для задач (21)–(28) аналогично формулы (14) имеем:

$$u_n(t)=\begin{cases} c_n e^{-\lambda_n^2 t}, & t>0,\\ c_n\cos\lambda_n t-c_n\lambda_n\sin\lambda_n t, & t<0, \end{cases} \qquad (29)$$

$$\vartheta_n(t)=\begin{cases} \tilde{c}_n e^{-\lambda_n^2 t}, & t>0,\\ \tilde{c}_n\cos\lambda_n t-\tilde{c}_n\lambda_n\sin\lambda_n t, & t<0. \end{cases} \qquad (30)$$

Для нахождения постоянных c_n и $\tilde{c}_n$ воспользуемся интегральным условием (6) и формулами (15) и (16):

$$\int_{-\alpha}^0 u_n(t)\,dt=2\int_0^1\int_{-\alpha}^0 U(x,t)\,dt\sin\mu_n x\,dx=2\int_0^1\psi(x)\sin\mu_n x\,dx=\psi_n, \qquad (31)$$

$$\int_{-\alpha}^0 \vartheta_n(t)\,dt=2\int_0^1\int_{-\alpha}^0 U(x,t)\,dt\cos\mu_n x\,dx=2\int_0^1\psi(x)\cos\mu_n x\,dx=\tilde{\psi}_k. \qquad (32)$$

Тогда при $t<0$ из (29) и (31) получаем:

$$\psi_n=\int_{-\alpha}^0 u_n(t)\,dt=c_n\int_{-\alpha}^0\left(\cos\lambda_n t-\lambda_n\sin\lambda_n t\right)dt=$$

$$=c_n\left(\frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n t+\cos\lambda_n t\right)\Bigg|_{-\alpha}^0=c_n\left(1-\cos\lambda_n\alpha+\frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n\alpha\right),$$

то есть
$$c_n\Delta_n(\alpha)=\psi_n, \qquad (33)$$

где
$$\Delta_n(\alpha)=1-\cos\lambda_n\alpha+\frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n\alpha.$$

Аналогично из (30) и (32) получаем, что

$$\tilde{c}_n\Delta_n(\alpha)=\tilde{\psi}_n. \qquad (34)$$

Отсюда при выполнении условия

$$\Delta_n(\alpha)\neq 0 \qquad (35)$$

найдем, что $c_n = \dfrac{\psi_n}{\Delta_n(\alpha)}$, $\tilde{c}_n = \dfrac{\tilde{\psi}_n}{\Delta_n(\alpha)}$.

Подставляя c_n и $\tilde{c}_n$ в формулы (29) и (30), получим:

$$u_n(t) = \begin{cases} A_n \psi_n e^{-\lambda_n^2 t}, & t > 0, \\ A_n(\cos\lambda_n t - \lambda_n \sin\lambda_n t)\psi_n, & t < 0, \end{cases} \tag{36}$$

$$\vartheta_n(t) = \begin{cases} A_n \tilde{\psi}_n e^{-\lambda_n^2 t}, & t > 0, \\ A_n(\cos\lambda_n t - \lambda_n \sin\lambda_n t)\tilde{\psi}_n, & t < 0, \end{cases} \tag{37}$$

где $A_n = \dfrac{1}{\Delta_n(\alpha)}$.

Теперь предположим, что $\psi(x) \equiv 0$. Тогда $\psi_n = \tilde{\psi}_n \equiv 0$ и из формул (15), (16) и (36), (37) следует, что

$$\int_0^1 U(x,t)\sin\mu_n x\,dx = 0, \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

$$\int_0^1 U(x,t)\cos\mu_n x\,dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Отсюда в силу полноты системы собственных функций $\{1, \cos\mu_n x, \sin\mu_n x\}$ в $L_2[0,1]$ заключаем, что $U(x,t) \equiv 0$ для всех $x \in [0,1]$ и $t \in [-\alpha, \beta]$.

Итак, нами доказано, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если существует решение $U(x, t)$ задачи (2)–(6) в области Ω, то оно единственно только тогда, когда выполнены условия (35).

Теперь рассмотрим случай, когда нарушается условие (35). Пусть $\Delta_n(\alpha) = 0$ при некоторых α и $n = m$, тогда однородная задача (2)–(6) при $\psi(x) \equiv 0$ имеет нетривиальное решение

$$U_m(x,t) = X_m(x) \cdot T_m(t), \tag{38}$$

где $X_m(x)$: $\{1, \cos\mu_m x, \sin\mu_m x\}$, $T_m(t) = \begin{cases} e^{-\lambda_m^2 t}, & t > 0, \\ \cos\lambda_m t - \lambda_m \sin\lambda_m t, & t < 0. \end{cases}$

Условие $\Delta_n(\alpha) = 0$ эквивалентно равенству $\lambda_n = \lambda_n \cos\lambda_n\alpha - \sin\lambda_n\alpha$,

где $\lambda_n = \sqrt{\dfrac{\nu^2 + \mu_n^2}{1 + \mu_n^2}}$, $\mu_n = 2\pi n$. Здесь $\lambda_n \to 1$ при $n \to \infty$.

Из уравнения $\lambda_n = \lambda_n \cos\lambda_n\alpha - \sin\lambda_n\alpha$ получаем

$$\cos(\lambda_n\alpha + \varphi_n) = \frac{\lambda_n}{\sqrt{1+\lambda_n^2}},$$

где $\varphi_n = \arccos\dfrac{\lambda_n}{\sqrt{1+\lambda_n^2}}$. Так как $0 < \dfrac{\lambda_n}{\sqrt{1+\lambda_n^2}} < 1$, то $0 < \varphi_n < \dfrac{\pi}{2}$ и данное уравнение имеет решение. Здесь получаем две серии решений:

1) $\alpha_k = \frac{2\pi k}{\lambda_n}$, $k \in N$;

2) $\alpha_k = -\frac{2\varphi_n}{\lambda_n} + \frac{2\pi k}{\lambda_n}$, $k \in N$.

Первая серия решений $\alpha_k = \frac{2\pi k}{\lambda_n}$ удовлетворяет уравнению $\Delta_n(\alpha_k) = 0$. Нетрудно проверить, что и вторая серия решений $\alpha_k = -\frac{2\varphi_n}{\lambda_n} + \frac{2\pi k}{\lambda_n}$ удовлетворяет уравнению $\Delta_n(\alpha_k) = 0$.

Другие значения α, для которых условие (35) выполняется, называются регулярными. Отметим, что существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что при достаточно больших n справедлива оценка

$$\inf_n \left|\Delta_n(\alpha)\right| \geq C_0 > 0. \tag{39}$$

4. Существование решения

Для регулярных значений α имеют место формулы (36) и (37). Поэтому при выполнении условий (35) и (39) с учетом частных решений (11), (36) и (37) решение задачи (2)–(6) в области Ω можно представить в виде ряда

$$U(x,t) = \frac{\vartheta_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\vartheta_n(t)\cos\mu_n x + u_n(t)\sin\mu_n x\right]. \tag{40}$$

Покажем, что при определенных условиях относительно функции $\psi(x)$ сумма $U(x, t)$ ряда (40) удовлетворяет условиям (2).

Нетрудно убедиться, что при достаточно больших n справедливы оценки:

$$\left|u_n(t)\right| \leq C_1 \left|\psi_n\right|, \left|\vartheta_n(t)\right| \leq C_1 \left|\tilde{\psi}_n\right|, \tag{41}$$

$$\left|u'_n(t)\right| \leq C_2 \left|\psi_n\right|, \left|\vartheta'_k(y)\right| \leq C_2 \left|\tilde{\psi}_n\right|, \tag{42}$$

$$\left|u''_n(t)\right| \leq C_3 \left|\psi_n\right|, \left|\vartheta''_n(t)\right| \leq C_3 \left|\tilde{\psi}_n\right|, \tag{43}$$

где $C_i = \text{const}$, $i = 1,3$.

Действительно, на основании формул (36) и (37) с учетом оценки (39) найдем:

$$\left|u_n(t)\right| \leq \begin{cases} \frac{1}{C_0}\left|\psi_n\right|, & t > 0, \\ \frac{1+\lambda_n}{C_0}\left|\psi_n\right|, & t < 0, \end{cases} \quad \left|\vartheta_n(t)\right| \leq \begin{cases} \frac{1}{C_0}\left|\tilde{\psi}_n\right|, & t > 0, \\ \frac{1+\lambda_n}{C_0}\left|\tilde{\psi}_n\right|, & t < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует оценка (41), где $C_1 = \frac{1+\lambda_n}{C_0}$, $\lambda_n = \sqrt{\frac{\nu^2+\mu_n^2}{1+\mu_n^2}} < \infty$.

Дифференцируя выражения (36) и (37), получаем

$$\left|u'_n(t)\right| \leq \begin{cases} \frac{\lambda_n^2}{C_0}\left|\psi_n\right|, & t > 0, \\ \frac{\lambda_n(1+\lambda_n)}{C_0}\left|\psi_n\right|, & t < 0, \end{cases} \quad \left|\vartheta'_n(t)\right| \leq \begin{cases} \frac{\lambda_n^2}{C_0}\left|\tilde{\psi}_n\right|, & t > 0, \\ \frac{\lambda_n(1+\lambda_n)}{C_0}\left|\tilde{\psi}_n\right|, & t < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует оценка (42), где $C_2 = \dfrac{\lambda_n(1+\lambda_n)}{C_0}$.

Дифференцируя выражения (36) и (37) два раза при $t<0$, получаем

$$\left|u_n''(t)\right| \le \frac{\lambda_n^2(1+\lambda_n)}{C_0}\left|\psi_n\right|, \ \left|\vartheta_n''(t)\right| \le \frac{\lambda_n^2(1+\lambda_n)}{C_0}\left|\tilde{\psi}_n\right|.$$

Отсюда следует оценка (43), где $C_3 = \dfrac{\lambda_n^2(1+\lambda_n)}{C_0}$.

Так как $\psi(x) \in C^3[0;1]$ и на сегменте [0; 1] имеет кусочно-непрерывную производную четвертого порядка и $\psi(0)=\psi(1)$, $\psi'(0)=\psi'(1)$, $\psi''(0)=\psi''(1)$, $\psi'''(0)=\psi'''(1)$, то справедливы оценки:

$$\psi_n = -\left(\frac{1}{\pi}\right)^4 \frac{p_n}{n^4} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 \le 4\int_0^1 \left[\psi^{IV}(x)\right]^2 dx,$$

$$\tilde{\psi}_n = -\left(\frac{1}{\pi}\right)^4 \frac{q_n}{n^4} \text{ и } \sum_{n=1}^{+\infty} q_n^2 \le 4\int_0^1 \left[\psi^{IV}(x)\right]^2 dx.$$

С помощью этих оценок нетрудно убедиться, что ряд (40) и ряды из производных первого порядка членов этого ряда равномерно сходятся в области $\overline{\Omega}$.

Пусть $\Delta_n(\alpha)=0$ при некоторых α и $n=k_1,\dots,k_s$, где $1 \le k_1 < k_2 < \dots < k_s$, s – фиксированное натуральное число. Тогда для разрешимости уравнений (33) и (34) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия ортогональности:

$$\psi_n = 2\int_0^1 \psi(x)\sin 2\pi n x\, dx = 0,\ n=k_1,\dots,k_s, \tag{44}$$

$$\tilde{\psi}_n = 2\int_0^1 \psi(x)\cos 2\pi n x\, dx = 0,\ n=k_1,\dots,k_s. \tag{45}$$

В этом случае решение задачи (2)–(6) определяется в виде суммы ряда:

$$U(x,t) = \frac{\vartheta_0(t)}{2} + \left(\sum_{n=1}^{k_1-1} + \sum_{n=k_1+1}^{k_2-1} + \dots + \sum_{n=k_s+1}^{\infty}\right) u_n(t)\sin\mu_n x +$$

$$+\left(\sum_{n=1}^{k_1-1} + \sum_{n=k_1+1}^{k_2-1} + \dots + \sum_{n=k_s+1}^{\infty}\right)\vartheta_n(t)\cos\mu_n x + \sum_m C_m U_m(x,t), \tag{46}$$

где в последней сумме m принимает значения k, k_1, ..., k_s, C_m – произвольные постоянные; функции $U_m(x, t)$ определяются из формулы (38). Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $\psi(x) \in C^3[0;1]$ и на [0; 1] имеет кусочно-непрерывную производную четвертого порядка и $\psi(0)=\psi(1)$, $\psi'(0)=\psi'(1)$, $\psi''(0)=\psi''(1)$, $\psi'''(0)=\psi'''(1)$. Тогда задача (2)–(6) в области Ω однозначно разрешима только тогда, когда выполняются условия (35) и (39). Это решение определяется рядом (40). Если $\Delta_n(\alpha)=0$ при некоторых α и $n=k_1,\dots,k_s$ и выполнено условие (39), то задача (2)–(6) разрешима только тогда, когда выполняются условия ортогональности (44) и (45). При этом это решение определяется рядом (46).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгазин, С. Д. Флаттер пластин и оболочек / С. Д. Алгазин, И. А. Кийко. – М. : Наука, 2006. – 248 с.
2. Ахтямов, А. М. О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне / А. М. Ахтямов, А. Р. Аюпова // Журнал Средневолжского математического общества. – 2010. – Т. 12, № 3. – С. 37–42.
3. Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 1. – С. 50–55.
4. Бештоков, М. Х. Численный метод решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа / М. Х. Бештоков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 9. – С. 1497–1514.
5. Гельфанд, И. М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд // УМН. – 1959. – Т. 14, № 3. – С. 3–19.
6. Гордезиани, Д. Г. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды / Д. Г. Гордезиани, Г. А. Авалишвили // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12, № 1. – С. 94–103.
7. Джураев, Т. Д. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа / Т. Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов. – Ташкент : Фан, 1986. – 220 с.
8. Замышляева, А. А. Математические модели соболевского типа высокого порядка / А. А. Замышляева // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 5–28.
9. Зикиров, О. С. О задаче Дирихле для гиперболических уравнений третьего порядка / О. С. Зикиров // Известия вузов. Математика. – 2014. – № 7. – С. 63–71.
10. Моисеев, Е. И. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи / Е. И. Моисеев // Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т. 37, № 11. – С. 1565–1567.
11. Пулькина, Л. С. Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями 1-го рода с ядрами, зависящими от времени / Л. С. Пулькина // Известия вузов. Математика. – 2012. – № 10. – С. 32–44.
12. Рахманова, Л. Х. Решение нелокальной задачи спектральным методом для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области / Л. Х. Рахманова // Известия вузов. Математика. – 2007. – № 11. – С. 36–40.
13. Репин, О. А. Аналог задачи Нахушева для уравнения Бицадзе-Лыкова / О. А. Репин // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 10. – С. 1412–1417.
14. Сабитов, К. Б. К теории уравнений смешанного типа / К. Б. Сабитов. – М. : Физматлит, 2014. – 301 с.
15. Сабитова, Ю. К. Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии / Ю. К. Сабитова // Математические заметки. – 2015. – Т. 98, № 3. – С. 393–406.
16. Салахитдинов, М. С. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром / М. С. Салахитдинов, А. К. Уринов. – Ташкент : Фан, 1997. – 165 с.
17. Сопуев, А. Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка / А. Сопуев, Н. К. Аркабаев // Вестник Томского государственного университета. Математика. Механика. – 2013. – Т. 21, № 1. – С. 16–23.
18. Турбин, М. В. Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель-Балкли / М. В. Турбин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 2. – С. 246–257.
19. Уизем, Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М. : Мир, 1977. – 622 с.
20. Уткина, Е. А. Об уравнениях третьего порядка с псевдопараболическим оператором и смещением аргументов искомой функции / Е. А. Уткина // Известия вузов. Математика. – 2015. – № 5. – С. 62–68.
21. Уфлянд, Я. С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях / Я. С. Уфлянд // Инженерно-физический журнал. – 1964. – Т. 7, № 1. – С. 89–92.
22. Франкль, Ф. И. Избранные труды в газовой динамике / Ф. И. Франкль. – М. : Наука, 1973. – 711 с.
23. Шабров, С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С. А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 2. – С. 168–179.
24. Шхануков, М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах / М. Х. Шхануков // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18, № 4. – С. 689–699.

25. Юлдашев, Т. К. Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение псевдопараболического типа с нелокальным интегральным условием / Т. К. Юлдашев // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. – 2016. – № 1 (32). – С. 11–23.

26. Юлдашев, Т. К. Об одной обратной задаче для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка / Т. К. Юлдашев // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 2. – С. 180–189.

27. Юлдашев, Т. К. Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка / Т. К. Юлдашев // Известия вузов. Математика. – 2015. – № 9. – С. 74–79.

28. Юлдашев, Т. К. Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма четвертого порядка с вырожденным ядром / Т. К. Юлдашев // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физ.-мат. науки». – 2015. – Т. 19, № 4. – С. 736–749.

29. Юлдашев, Т. К. Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка / Т. К. Юлдашев // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физ.-мат. науки. – 2014. – Т. 34, № 1. – С. 56–65. – DOI: 10.14498/vsgtu1299.

30. Benney, D. J. Interactions of permanent waves of finite amplitude / D. J. Benney, J. C. Luke // Journ. Math. Phys. – 1964. – Vol. 43. – P. 309–313.

REFERENCES

1. Algazin S.D., Kiyko I.A. *Flatter plastin i obolochek* [Flutter of Plates and Shells]. Moscow, Nauka Publ., 2006. 248 p.

2. Akhtyamov A.M., Ayupova A.R. O reshenii zadachi diagnostirovaniya defektov v vide maloy polosti v sterzhne [On the Solution of the Problem of Diagnosing Defects in the Form of a Small Cavity in the Rod]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshestva*, 2010, vol. 12, no. 3, pp. 37-42.

3. Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon. O edinstvennosti resheniya matematicheskoy modeli vynuzhdennykh kolebaniy struny s osobennostyami [On Uniqueness of Solution of the Mathematical Model of Forced String Oscillation Singularities]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, 2014, no. 1, pp. 50-55.

4. Beshtokov M.Kh. Chislennyy metod resheniya odnoy nelokalnoy kraevoy zadachi dlya uravneniya tretyego poryadka giperbolicheskogo tipa [A Numerical Method for Solving One Nonlocal Boundary-Value Problem for a Third-Order Hyperbolic Equation]. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2014, vol. 54, no. 9, pp. 1497-1514.

5. Gelfand I.M. Nekotorye voprosy analiza i differentsialnykh uravneniy [Some Questions of Analyses and Differential Equations]. *Uspekhi matematicheskih nauk*, 1959, vol. 14, no. 3, pp. 3-19.

6. Gordeziani D.G., Avilishbili G.A. Resheniya nelokalnykh zadach dlya odnomernykh kolebaniy sredy [Solving the Nonlocal Problems for One-Dimensional Medium Oscillation]. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94-103.

7. Dzhuraev T.D., Sopuev A., Mamazhanov M. *Kraevye zadachi dlya uravneniy parabolo-giperbolicheskogo tipa* [Boundary-Value Problems for the Equations of Parabolic-Hyperbolic Type]. Tashkent, Fan Publ., 1986. 220 p.

8. Zamyshlyaeva A.A. Matematicheskie modeli sobolevskogo tipa vysokogo poryadka [Sobolev-Type Mathematical Models of Higher Order]. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 5-28.

9. Zikirov O.S. O zadache Dirikhle dlya giperbolicheskikh uravneniy tretyego poryadka [On Dirichlet Problem for Third-Order Hyperbolic Equations]. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2014, vol. 58, no. 7, pp. 63-71.

10. Moiseev E.I. O razreshimosti odnoy nelokalnoy kraevoy zadachi [Solvability of a Nonlocal Boundary Value Problem]. *Differentsialnye uravneniya*, 2001, vol. 37, no. 11, pp. 1565-1567.

11. Pulkina L.S. Nelokalnaya zadacha dlya giperbolicheskogo uravneniya s integralnymi usloviyami 1-go roda s yadrami, zavisyashchimi ot vremeni [A Nonlocal Problem for a Hyperbolic Equation With Integral Conditions of the 1st Kind With Time-Dependent Kernels]. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2012, vol. 56, no. 10, pp. 32-44.

12. Rakhmanova L.Kh. Reshenie nelokalnoy zadachi spektralnym metodom dlya uravneniya smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo tipa v pryamougolnoy oblasti [Solution of a Nonlocal Problem for a Mixed-Type Parabolic-Hyperbolic Equation in a Rectangular Domain by the Spectral Method]. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2007, no. 11, pp. 36-40.

13. Repin O.A. Analog zadachi Nakhusheva dlya uravneniya Bitsadze-Lykova [An Analogue of the Nakhushev Problem for the Bitsadze-Lykov Equation]. *Differentsialnye uravneniya*, 2002, vol. 38, no. 10, pp. 1412-1417.

14. Sabitov K.B. *K teorii uravneniy smeshannogo tipa* [On the Theory of Mixed-Type Equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014. 301 p.

15. Sabitova Yu.K. Kraevaya zadacha s nelokalnym integralnym usloviem dlya uravneniy smeshannogo tipa s vyrozhdeniem na perekhodnoy linii [Boundary-Value Problem With Nonlocal Integral Condition for Mixed-Type Equations With Degeneracy on the Transition Line]. *Matematicheskie zametki*, 2015, vol. 98, no. 3, pp. 393-406.

16. Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. *Kraevye zadachi dlya uravneniy smeshannogo tipa so spektralnym parametrom* [Boundary-Value Problems for the Mixed-Type Equations With Spectral Parameter]. Tashkent, Fan Publ., 1997. 165 p.

17. Sopuev A., Arkabaev N.K. Zadachi sopryazheniya dlya lineynykh psevdoparabolicheskikh uravneniy tretyego poryadka [Conjugation Problems for Linear Pseudoparabolic Equations of Third Order]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Mekhanika*, 2013, vol. 21, no. 1, pp. 16-23.

18. Turbin M.V. Issledovanie nachalno-kraevoy zadachi dlya modeli dvizheniya zhidkosti Gershel-Balkli [Investigation of Initial-Boundary Value Problem for the Herschel-Bulkley Mathematical Fluid Model]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, 2013, no. 2, pp. 246-257.

19. Whitham G.B. *Lineynye i nelineynye volny* [Linear and Nonlinear Waves]. Moscow, Mir Publ., 1977. 622 p.

20. Utkina E.A. Ob uravneniyakh tretyego poryadka s psevdoparabolicheskim operatorom i smeshcheniem argumentov iskomoy funktsii [On Third Order Equations With Pseudoparabolic Operator and With Shift of Arguments of Initial Function]. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2015, no. 5, pp. 62-68.

21. Uflyand Ya.S. K voprosu o rasprostranenii kolebaniy v sostavnykh elektricheskikh liniyakh [On the Question of the Distribution of Fluctuations in the Composite Electrical Lines]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 1964, vol. 7, no. 1, pp. 89-92.

22. Frankl F.I. *Izbrannye trudy v gazovoy dinamike* [Selected Works in Gas Dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 711 p.

23. Shabrov S.A. Ob otsenkakh funktsii vliyaniya odnoy matematicheskoy modeli chetvertogo poryadka [On Estimates of the Impact of a Mathematical Function of the Fourth-Order Model]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, 2015, no. 2, pp. 168-179.

24. Shkhanukov M.Kh. O nekotorykh kraevykh zadachakh dlya uravneniya tretyego poryadka, voznikayushchikh pri modelirovanii filtratsii zhidkosti v poristykh sredakh [Some Boundary-Value Problems for a Third-Order Equation Arising in the Simulation of Fluid Flow in Porous Media]. *Differentsialnye uravneniya*, 1982, vol. 18, no. 4, pp. 689-699.

25. Yuldashev T.K. Nelineynoe integro-differentsialnoe uravnenie psevdoparabolicheskogo tipa s nelokalnym integralnym usloviem [Nonlinear Integro-Differential Equation of Pseudoparabolic Type With Nonlocal Integral Condition]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2016, no. 1 (32), pp. 11-23.

26. Yuldashev T.K. Ob odnoy obratnoy zadache dlya lineynogo integro-differentsialnogo uravneniya Fredgolma v chastnykh proizvodnykh chetvertogo poryadka [On an Inverse Problem for a Partial Linear Fredholm Integro-Differential Equation]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, 2015, no. 2, pp. 180-189.

27. Yuldashev T.K. Ob odnom integro-differentsialnom uravnenii Fredgolma v chastnykh proizvodnykh tretyego poryadka [On a Certain Fredholm Partial Integro-Differential Equation of the Third Order]. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2015, vol. 9, no. 9, pp. 74-79.

28. Yuldashev T.K. Obratnaya zadacha dlya nelineynogo integro-differentialnogo uravneniya Fredgolma chetvertogo poryadka s vyrozhdennym yadrom [Inverse Problem for Nonlinear Fredholm Integro-Differential Equation of Fourth Order With Degenerate Kernel]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seria "Fiziko-matematicheskie nauki"*, 2015, vol. 19, no. 4, pp. 736-749. DOI: 10.14498/vsgtu1434.

29. Yuldashev T.K. Obratnaya zadacha dlya odnogo integro-differentsialnogo uravneniya Fredgolma v chastnykh proizvodnykh tretyego poryadka [Inverse Problem for a Partial Fredholm Integro-Differential Equation of Third Order]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seria "Fiziko-matematicheskie nauki"*, 2014, vol. 34, no. 1, pp. 56-65. DOI: 10.14498/vsgtu1299.

30. Benney D.J., Luke J.C. Interactions of Permanent Waves of Finite Amplitude. *Journ. Math. Phys.*, 1964, vol. 43, pp. 309-313.

MIXED BOUSSINESQ-TYPE DIFFERENTIAL EQUATION

Tursun Kamaldinovich Yuldashev
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Higher Mathematics,
Siberian State Aerospace University named after Academician M.F. Reshetnev
tursun.k.yuldashev@gmail.com
Prosp. im. gazety “Krasnoyarskiy rabochiy”, 31, 660014 Krasnoyarsk, Russian Federation

Abstract. Mathematical modeling of many processes occurring in the real world leads to the study of direct and inverse problems for equations of mathematical physics. Mixed and boundary value problems for partial differential and integro-differential equations by virtue of their importance in the application are one of the most important parts of the theory of differential equations. In the case, when the boundary of the flow of physical process not applicable for measurements, as an additional information can be used at nonlocal conditions in the integral form.

We propose a method of studying the one-value solvability of the nonlocal problem for a mixed Boussinesq-type differential equation. Such type of differential equations models many natural phenomena and appears in many fields of sciences. For this reason, a great importance in the works of many researchers was given to this type of equations.

We use the spectral method based on Fourier method of separation of variables. Application of this method of separation of variables can improve the quality of formulation of the considered problem and facilitate the processing procedure.

So in this article we consider in the rectangular area $D=\{(x,t)|0<x<1, -\alpha<t<\beta\}$ a nonlocal mixed problem for a mixed Boussinesq-type differential equation

$$\Im U \equiv \begin{cases} U_t - U_{txx} - U_{xx} + \nu^2 U = 0, & t>0, \\ U_{tt} - U_{ttxx} - U_{xx} + \nu^2 U = 0, & t<0, \end{cases} \tag{1}$$

where ν, α and β are real positive numbers.

We study the problem: Find in the domain D a function $U(x, t)$ satisfying the following conditions

$$U(x,t) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup \{x=0\} \cup \{x=1\}) \cap C^2(\Omega_-) \cap C^{2,1}_{x,t}(\Omega_+ \cup \{t=\beta\}), \tag{2}$$

$$\Im U(x,t) \equiv 0, \ (x,t) \in \Omega_- \cup \Omega_+ \cup \{t=\beta\}, \tag{3}$$

$$U(0,t) = U(1,t), \quad -\alpha \le t \le \beta, \tag{4}$$

$$U_x(0,t) = U_x(1,t), \quad -\alpha \le t \le \beta, \tag{5}$$

$$\int_{-\alpha}^{0} U(x,t)\,dt = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{6}$$

where $\psi(x)$ is given a sufficiently smooth function, $\psi(0)=\psi(1)$, $\psi'(0)=\psi'(1)$.

First we prove that, if there exists a solution $U(x, t)$ of the problem (2)-(6), then it is unique only when the following condition is fulfilled

$$\Delta_n(\alpha) = 1 - \cos\lambda_n\alpha + \frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n\alpha \ne 0, \tag{7}$$

where $\lambda_n = \sqrt{\dfrac{\nu^2+\mu_n^2}{1+\mu_n^2}}$,$\mu_n = 2\pi n$, $n = 1, 2, \dots$.

We consider the case, when the condition (7) is violated. We suppose that $\Delta_n(\alpha) = 0$ for some α and $n = m$, then homogeneous problem (2)-(6) in $\psi(x) \equiv 0$ has nontrivial solution

$$U_m(x,t) = X_m(x) \cdot T_m(t),$$

where $X_m(x)$: $\{1, \cos\mu_m x, \sin\mu_m x\}$, $T_m(t) = \begin{cases} e^{-\lambda_m^2 t}, & t > 0, \\ \cos\lambda_m t - \lambda_m \sin\lambda_m t, & t < 0. \end{cases}$

The condition $\Delta_n(\alpha) = 0$ is equivalent to the equality $\lambda_n = \lambda_n \cos\lambda_n \alpha - \sin\lambda_n \alpha$. Hence we see that the equality $\Delta_n(\alpha) = 0$ is possible only when

$$\alpha = \frac{2\pi k}{\lambda_n}, \quad k \in N.$$

For other values of α the condition (7) holds. We note that there is a constant $C_0 > 0$ such that for sufficiently large n holds the estimate

$$\inf_n \left| \Delta_\alpha(n) \right| \geq C_0 > 0. \tag{8}$$

If the conditions (7) and (8) are fulfilled, then the solution of problem (2)-(6) exists and it can be presented as the sum of series

$$U(x,t) = \frac{\vartheta_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(t) \cos\mu_n x + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\mu_n n x,$$

where

$$u_n(t) = \begin{cases} A_n \psi_n e^{-\lambda_n^2 t}, & t > 0, \\ A_n (\cos\lambda_n t - \lambda_n \sin\lambda_n t)\psi_n, & t < 0, \end{cases}$$

$$\vartheta_n(t) = \begin{cases} A_n \tilde{\psi}_n e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ A_n (\cos\lambda_n t - \lambda_n \sin\lambda_n t)\tilde{\psi}_n, & t < 0, \end{cases} \quad A_n = \frac{1}{\Delta_n(\alpha)}.$$

According to the problem: $\psi(x) \in C^3[0;1]$ and on the segment [0; 1] it has piecewise continuous derivative of fourth order and

$$\psi(0) = \psi(1), \ \psi'(0) = \psi'(1), \ \psi''(0) = \psi''(1), \ \psi'''(0) = \psi'''(1).$$

Further the theorem is held. We suppose $\Delta_n(\alpha) = 0$ for some α and $n = k_1, \dots, k_s$, where $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_s$, s is fixed natural number and there are orthogonality conditions

$$\psi_n = 2\int_0^1 \psi(x) \sin\mu_n x \, dx = 0, \ n = k_1, \dots, k_s,$$

$$\tilde{\psi}_n = 2\int_0^1 \psi(x)\cos\mu_n x\,dx = 0,\ n = k_1, \ldots, k_s.$$

Then the solution of the problem (2)-(6) exists, and it is defined as the sum of series

$$U(x,t) = \frac{\vartheta_0(t)}{2} + \left(\sum_{n=1}^{k_1-1} + \sum_{n=k_1+1}^{k_2-1} + \ldots + \sum_{n=k_s+1}^{\infty}\right) u_n(t)\sin\mu_n x +$$

$$+\left(\sum_{n=1}^{k_1-1} + \sum_{n=k_1+1}^{k_2-1} + \ldots + \sum_{n=k_s+1}^{\infty}\right)\vartheta_n(t)\cos\mu_n x + \sum_m C_m U_m(x,t),$$

where in the last sum m takes the values k, k_1, ..., k_s, C_m as arbitrary constants.

Key words: mixed-value problem, mixed-type differential equation, Boussinesq-type equation, nonlocal condition, spectral method, one-value solvability.