www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА

DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.3.1

УДК 517.953
ББК 22.161.6

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Бахром Юсупханович Иргашев

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры высшей математики,
Наманганский инженерно-педагогический институт
bahrom_irgashev@inbox.ru
просп. Дустлик, 12, 160103 г. Наманган, Республика Узбекистан

Аннотация. В данной работе спектральным методом изучается краевая задача в прямоугольной области для модельного уравнения высокого четного порядка. Решение получено в виде бесконечного ряда по собственным функциям одномерной спектральной задачи.

Ключевые слова: собственные значения, собственные функции, равномерная сходимость, функция Грина, неравенство Бесселя.

Введение

Одним из основных методов решения краевых или спектральных задач в прямоугольной области для модельных уравнений в частных производных, содержащих производную четного порядка, является метод разделения переменных (метод Фурье). Этим методом решены многие классические задачи для модельных уравнений 2-го порядка. В последнее время этим методом часто пользуются также для решений краевых задач и доказательств единственности для уравнений высоких четных порядков (см.: [2; 3] и др.). В данной работе метод Фурье используется для решения краевой задачи для модельного уравнения произвольного четного порядка.

Основные результаты

В области $\Omega = \{(x, y): 0 < x, y < 1\}$ для уравнения

$$L[u] = (-1)^n \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} + (-1)^m \frac{\partial^{2n} u}{\partial y^{2n}} = 0 \tag{1}$$

изучим следующую краевую задачу.

Задача Ω. Найти регулярное решение уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$D_y^s u(x,0)=\varphi_s(x),\ s=\overline{0,n-1},\ D_y^r u(x,1)=\psi_r(x),\ \ r=\overline{0,n-1},$$
$$D_x^k u(0,y)=\chi_k(y),\ k=\overline{0,m-1},\ D_x^l u(1,y)=\tau_l(y),\ \ l=\overline{0,m-1},$$

где

$\varphi_s,\psi_s\in C^{4m}\left[0;1\right]$,

$\varphi_s^{(k)}\left(0\right)=\varphi_s^{(k)}\left(1\right)=\psi_s^{(k)}\left(0\right)=\psi_s^{(k)}\left(1\right)=0,\ k=\overline{0,m-1},\ k=\overline{2m,3m-1},\ s=\overline{0,n-1}$,

$\chi_s,\tau_s\in C^{4n}\left[0;1\right]$,

$\chi_s^{(k)}\left(0\right)=\chi_s^{(k)}\left(1\right)=\tau_s^{(k)}\left(0\right)=\tau_s^{(k)}\left(1\right)=0, k=\overline{0,n-1}, k=\overline{2n,3n-1}, s=\overline{0,m-1}.$

Единственность решения поставленной задачи показывается методом интегралов энергии. Решение ищется в виде разложения в бесконечный ряд по собственным функциям одномерной спектральной задачи. Показывается равномерная сходимость полученного ряда и рядов, составленных из частных производных по обоим переменным до порядков, входящих в уравнение (1).

Перейдем к обоснованию полученных результатов. Покажем единственность решения поставленной задачи. В силу линейности уравнения достаточно показать, что однородная задача имеет только тривиальное решение. Действительно, пусть $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) с однородными граничными условиями. Рассмотрим тождество $uL[u] = 0$. Тогда имеем:

$$u\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\frac{\partial^{2m-1-i}u}{\partial x^{2m-1-i}}\right)+\left(-1\right)^m\left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)^2,$$

$$u\frac{\partial^{2n}u}{\partial y^{2n}}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\frac{\partial^{2n-1-i}u}{\partial y^{2n-1-i}}\right)+\left(-1\right)^n\left(\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right)^2,$$

$$uL\left[u\right]\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\frac{\partial^{2m-1-i}u}{\partial x^{2m-1-i}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial^i u}{\partial y^i}\frac{\partial^{2n-1-i}u}{\partial y^{2n-1-i}}\right)+$$

$$+\left(-1\right)^{n+m}\left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)^2+\left(-1\right)^{n+m}\left(\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right)^2=0.$$

Проинтегрируем последнее выражение по области Ω, применяя формулу Грина и учитывая нулевые граничные условия, получим

$$\int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)^2 dxdy+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right)^2 dxdy=0,$$

отсюда вытекает, что $u\left(x,y\right)\equiv 0$. Решение задачи Ω будем искать в виде:

$$u\left(x,y\right)=v\left(x,y\right)+w\left(x,y\right),$$

где

$$\begin{cases} L[v]=0, \\ D_y^s v(x,0)=\chi_s(x),\ s=\overline{0,n-1}, \\ D_y^r v(x,1)=\tau_r(x),\ r=\overline{0,n-1}, \\ D_x^k v(0,y)=0,\ k=\overline{0,m-1}, \\ D_x^l v(1,y)=0,\ l=\overline{0,m-1}, \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} L[w]=0, \\ D_y^s w(x,0)=0,\ s=\overline{0,n-1}, \\ D_y^r w(x,1)=0,\ r=\overline{0,n-1}, \\ D_x^k w(0,y)=\varphi_k(y),\ k=\overline{0,m-1}, \\ D_x^l w(1,y)=\psi_l(y),\ l=\overline{0,m-1}. \end{cases} \qquad (3)$$

Задачи (2) и (3) решаются одинаковым методом, поэтому достаточно решить одну из них, например задачу (2). Будем решать задачу (2) методом разделения переменных.

$$v(x,y)=X(x)Y(y).$$

Подставляя в (2), имеем

$$(-1)^{m+1}\frac{X^{(2m)}}{X}=(-1)^n\frac{Y^{(2n)}}{Y}=\lambda>0,$$

отсюда получим следующую задачу Штурма – Лиувилля для нахождения собственного значения и собственной функции по переменной y:

$$\begin{cases} Y^{(2n)}(y)=(-1)^n\lambda Y(y),\lambda>0, \\ Y^{(k)}(0)=Y^{(k)}(1)=0,\ k=\overline{0,n-1}. \end{cases} \qquad (4)$$

Теорема 1. Для собственных значений задачи (4), при $k\to+\infty$ имеем следующее соотношение:

$$\lambda_k\approx\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^{2n}, \text{ если } n \text{ – четно; } \lambda_k\approx(\pi k)^{2n}, \text{ если } n \text{ – нечетно.}$$

Доказательство. Изучим сначала случай, когда n четно ($n = 2m$). Имеем следующую задачу:

$$\begin{cases} Y^{(4m)}(y)=\lambda Y(y),\lambda>0, \\ Y^{(k)}(0)=Y^{(k)}(1)=0, k=\overline{0,2m-1}. \end{cases} \qquad (5)$$

Характеристическое уравнение $\mu^{4m}=\lambda$ имеет ровно $4m$ различных корней, они имеют вид:

$$\mu_k=\sqrt[4m]{\lambda}\left(\alpha_k+i\beta_k\right),\ \alpha_k=\cos\theta_k,\ \beta_k=\sin\theta_k,\ \theta_k=\frac{\pi k}{2m},\ k=\overline{0,4m-1},$$

$$\mu_0=\sqrt[4m]{\lambda},\ \mu_n=i\sqrt[4m]{\lambda},\ \alpha_k>0,\ k=\overline{0,m-1}.$$

Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$Y(x)=Y_1(y)+Y_2(y),$$

где

$$Y_1(y)=c_1^0 e^{\sqrt[4m]{\lambda}y}+\sum_{k=1}^{m-1} e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_k y}\left(c_1^k\cos\sqrt[4m]{\lambda}\beta_k y+c_2^k\sin\sqrt[4m]{\lambda}\beta_k y\right)+c_3\cos\sqrt[4m]{\lambda}y,$$

$$Y_2(y)=c_4^0 e^{-\sqrt[4m]{\lambda}y}+\sum_{k=m+1}^{2m-1} e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_k y}\left(c_4^k\cos\sqrt[4m]{\lambda}\beta_k y+c_5^k\sin\sqrt[4m]{\lambda}\beta_k y\right)+c_6\sin\sqrt[4m]{\lambda}y,$$

c_i^k – произвольные постоянные. Для производных порядка p имеем формулу

$$Y_1^{(p)}=\lambda^{\frac{p}{4m}}\left\{c_1^0 e^{\sqrt[4m]{\lambda}y}+\sum_{k=1}^{m-1} e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_k y}\left[c_1^k\cos\left(\sqrt[4m]{\lambda}\beta_k y+p\theta_k\right)+c_2^k\sin\left(\sqrt[4m]{\lambda}\beta_k y+p\theta_k\right)\right]\right\}+$$

$$+\lambda^{\frac{p}{4m}}\cos\left(\sqrt[4m]{\lambda}y+\frac{\pi}{2}p\right),$$

$$Y_2^{(p)}=\lambda^{\frac{p}{4m}}\left\{(-1)^p c_4^0 e^{-\sqrt[4m]{\lambda}y}+\sum_{k=m+1}^{2m-1} e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_k y}\left[c_4^k\cos\left(\sqrt[4m]{\lambda}\beta_k y+p\theta_k\right)+c_5^k\sin\left(\sqrt[4m]{\lambda}\beta_k y+p\theta_k\right)\right]\right\}+$$

$$+\lambda^{\frac{p}{4m}}\sin\left(\sqrt[4m]{\lambda}y+\frac{\pi}{2}p\right).$$

Удовлетворив граничным условиям, получим систему уравнений для нахождения c_i^k, основной определитель системы имеет вид:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ C & D\end{vmatrix},$$

где

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & 1 & 0 & . & . & 1 \\ 1 & \cos\theta_1 & . & \cos\theta_{m-1} & \sin\theta_1 & . & . & \cos\theta_m \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & \cos(2m-1)\theta_1 & . & \cos(2m-1)\theta_{m-1} & \sin(2m-1)\theta_1 & . & . & \cos(2m-1)\theta_m \end{vmatrix},$$

$$B=\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & 1 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & \cos\theta_{m+1} & . & \cos\theta_{2m-1} & \sin\theta_{m+1} & . & . & \sin\theta_m \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ (-1)^{2m-1} & \cos(2m-1)\theta_{m+1} & . & \cos(2m-1)\theta_{2m-1} & \sin(2m-1)\theta_{m+1} & . & . & \sin(2m-1)\theta_m \end{vmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} C_1 & C_2\end{pmatrix},$$

где

$$C_1=\begin{pmatrix} e^{\sqrt[4m]{\lambda}} & e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_1}\cos\sigma_{1,0} & . & e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_{m-1}}\cos\sigma_{m-1,0} \\ e^{\sqrt[4m]{\lambda}} & e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_1}\cos\sigma_{1,1} & . & e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_{m-1}}\cos\sigma_{m-1,1} \\ . & . & . & . \\ e^{\sqrt[4m]{\lambda}} & e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_1}\cos\sigma_{1,2m-1} & . & e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_{m-1}}\cos\sigma_{m-1,2m-1} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{k,p}=\sqrt[4m]{\lambda}\beta_k+p\theta_k,$$

$$C_2=\begin{pmatrix} e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_1}\sin\sigma_{1,0} & . & e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_{m-1}}\sin\sigma_{m-1,0} & \cos\sigma_{m,0}\\ e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_1}\sin\sigma_{1,1} & . & e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_{m-1}}\sin\sigma_{m-1,1} & \cos\sigma_{m,1}\\ . & . & . & .\\ e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_1}\sin\sigma_{1,2m-1} & . & e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_{m-1}}\sin\sigma_{m-1,2m-1} & \cos\sigma_{m,2m-1}\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}D_1 & D_2\end{pmatrix},$$

где

$$D_1=\begin{pmatrix} e^{-\sqrt[4m]{\lambda}} & e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_{m+1}}\cos\sigma_{m+1,0} & . & e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_{2m-1}}\cos\sigma_{2m-1,0}\\ -e^{-\sqrt[4m]{\lambda}} & e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_{m+1}}\cos\sigma_{1,1} & . & e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_{2m-1}}\cos\sigma_{2m-1,1}\\ . & . & . & .\\ (-1)^{2m-1}e^{-\sqrt[4m]{\lambda}} & e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_{m+1}}\cos\sigma_{m+1,2m-1} & . & e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_{2m-1}}\cos\sigma_{2m-1,2m-1}\end{pmatrix},$$

$$D_2=\begin{pmatrix} e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_{m+1}}\sin\sigma_{m+1,0} & . & e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_{2m-1}}\sin\sigma_{2m-1,0} & \sin\sigma_{m,0}\\ e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_{m+1}}\sin\sigma_{m+1,1} & . & e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_{2m-1}}\sin\sigma_{2m-1,1} & \sin\sigma_{m,1}\\ . & . & . & .\\ e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_{m+1}}\sin\sigma_{m+1,2m-1} & . & e^{\sqrt[4m]{\lambda}\alpha_{2m-1}}\sin\sigma_{2m-1,2m-1} & \sin\sigma_{m,2m-1}\end{pmatrix},$$

Найдем выражение, содержащее самую большую положительную степень экспоненты, при вычислении детерминанты Δ оно имеет вид

$$N_1 e^{\sqrt[4m]{\lambda}\left(1+2\sum_{p=1}^{m-1}\alpha_p\right)}\cos\sqrt[4m]{\lambda},$$

ãäå N_1 – некоторая постоянная, не зависящая от λ, тогда сам определитель Δ выглядит так:

$$\Delta(\lambda)=N_1 e^{\sqrt[4m]{\lambda}\left(1+2\sum_{p=1}^{m-1}\alpha_p\right)}\cos\sqrt[4m]{\lambda}+O\left(e^{\sqrt[4m]{\lambda}\left(1+2\sum_{p=1}^{m-1}\alpha_p-\alpha_{m-1}\right)}\right),\text{ при }\lambda\to\infty. \qquad (7)$$

Так как собственные значения задачи (5) суть нули определителя $\Delta(\lambda)$ системы, то, учитывая (7), имеем следующую асимптотику собственных значений λ_k

$$\sqrt[4m]{\lambda_k}\approx\frac{\pi}{2}+\pi k\text{ при }k\to+\infty.$$

При n нечетном ($n = 2m + 1$), сделав аналогичные вычисления и выкладки, будем иметь

$$\sqrt[4m+2]{\lambda_k}\approx\pi k\text{ при }k\to+\infty.$$

Теорема доказана.

Задача (4) эквивалентна следующему интегральному уравнению

$$Y_k(y)=(-1)^n\lambda_k\int_0^1 G(y,\xi)Y_k(\xi)d\xi, \qquad (8)$$

где $G(y,\xi)$ – функция Грина, которая удовлетворяет следующим условиям:

1. При $y \neq \xi$ является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{2n} G}{\partial y^{2n}} = 0 \\ \dfrac{\partial^{s} G}{\partial y^{s}}(0,\xi) = \dfrac{\partial^{s} G}{\partial y^{s}}(1,\xi) = 0, s = \overline{0,n-1} \end{cases}.$$

2. Непрерывна вплоть до производной $(2n-2)$-го порядка.

3. $\dfrac{\partial^{2n-1} G}{\partial y^{2n-1}}(+\xi,\xi) - \dfrac{\partial^{2n-1} G}{\partial y^{2n-1}}(-\xi,\xi) = 1$.

4. $G(y,\xi) = G(\xi,y)$.

Теорема 2. Функция Грина имеет вид

$$G(y,\xi) = -\frac{1}{(2n-1)!}\begin{cases} G_1(y,\xi), & 0 \le y \le \xi \\ G_2(y,\xi), & \xi \le y \le 1 \end{cases},$$

где

$$G_1(y,\xi) = (1-\xi)^n y^n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} (-1)^k C_{2n-1}^k C_{n-1+j}^j y^{n-k-1} \xi^{j+k},$$

$$G_2(y,\xi) = (1-y)^n \xi^n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} (-1)^k C_{2n-1}^k C_{n-1+j}^j \xi^{n-k-1} y^{j+k}.$$

Доказательство. Будем искать функции $G_1(y,\xi)$, $G_2(y,\xi)$ в виде

$$G_1(y,\xi) = (1-\xi)^n y^n \left(y^{n-1} P_0(\xi) + y^{n-2} P_1(\xi) + \ldots + y P_{n-2}(\xi) + P_{n-1}(\xi)\right),$$

$$G_2(y,\xi) = (1-y)^n \xi^n \left(\xi^{n-1} P_0(y) + \xi^{n-2} P_1(y) + \ldots + \xi P_{n-2}(y) + P_{n-1}(y)\right),$$

где

$$P_k(y) = \sum_{j=0}^{n-k-1} a_{k+j}^k y^{k+j}.$$

Выполнение условий 1 и 4 очевидно, для выполнения условий 2, 3 подберем $P_i(y)$ так, чтобы выполнялось тождество

$$G_1(y,\xi) - G_2(y,\xi) = (y-\xi)^{2n-1}. \tag{9}$$

В тождестве (9) рассмотрим производные по ξ до порядка $(n-1)$ включительно, в точке $\xi = 0$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях y.

$$\frac{\partial^p G_2}{\partial \xi^p}(y,0) = 0, \text{ для } p = \overline{0,n-1},$$

$$\frac{\partial^p (y-\xi)^{2n-1}}{\partial \xi^p}(y,0) = (-1)^p \frac{(2n-1)!}{(2n-1-p)!} y^{2n-1-p}. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$F_0(y,\xi)=y^{2n-1}(1-\xi)^n P_0(\xi),\ \frac{\partial^p F_0}{\partial\xi^p}=y^{2n-1}\sum_{j=0}^{p}\left((1-\xi)^n\right)^{(j)}P_0^{(p-j)}(\xi)C_p^j,$$

$$\left((1-\xi)^n\right)^{(j)}=(-1)^j\frac{n!}{(n-j)!}(1-\xi)^{n-j},\ \left((1-\xi)^n\right)^{(j)}_{\xi=0}=(-1)^j\frac{n!}{(n-j)!},\ P_0^{(p-j)}(0)=(p-j)!a_{p-j}^0,$$

$$\frac{\partial^p F_0}{\partial\xi^p}(y,0)=y^{2n-1}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\frac{p!}{j!(p-j)!}\frac{n!}{(n-k)!}(p-j)!a_{p-k}^0=$$

$$=y^{2n-1}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\frac{p!n!}{j!(n-j)!}a_{p-j}^0=y^{2n-1}p!\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_n^j a_{p-j}^0. \tag{11}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях y в соотношениях (10) и (11), получим систему уравнений для нахождения коэффициентов $a_j^0,\ j=\overline{0,n-1}$

$$\begin{cases} a_0^0C_n^0=1\\ (-1)^1a_0^0C_n^1+(-1)^0a_1^0C_n^0=0\\ (-1)^2a_0^0C_n^2+(-1)^1a_1^0C_n^1+(-1)^0a_2^0C_n^0=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (-1)^{n-1}a_0^0C_n^{n-1}+(-1)^{n-2}a_1^0C_n^{n-2}+\ldots+(-1)^0a_{n-1}^0C_n^0=0 \end{cases},$$

где

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!},$$

используя формулу из [3]

$$C_n^0C_{n+m-1}^m-C_n^1C_{n+m-2}^{m-1}+\ldots+(-1)^mC_{n-1}^0C_n^m=0, \tag{12}$$

получим решение системы в виде

$$a_j^0=C_{n+j-1}^j.$$

Итак,

$$P_0(\xi)=\sum_{j=0}^{n-1}C_{n+j-1}^j\xi^j.$$

Аналогичным образом находятся другие неизвестные полиномы $P_k(\xi)$.

Теорема доказана.

Пусть $G_{11}(y,\xi)=(-1)^nG(y,\xi)$, тогда из (8) имеем

$$\frac{Y_k(y)}{\lambda_k}=\int_0^1 G_{11}(y,\xi)Y_k(\xi)d\xi.$$

По неравенству Бесселя получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{Y_k(y)}{\lambda_k}\right)^2 \le \int_0^1 \left(G_{11}(y,\xi)\right)^2 d\xi < \infty. \qquad (13)$$

Расположим собственные значения λ_k в порядке их возрастания $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$. Зафиксируем λ_k и рассмотрим относительно переменной x следующую задачу

$$\begin{cases} X_k^{(2m)}(x) + (-1)^m \lambda_k X_k(x) = 0 \\ X_k^{(s)}(0) = \chi_{sk},\ s = \overline{0, m-1} \\ X_k^{(s)}(1) = \tau_{sk},\ s = \overline{0, m-1} \end{cases}, \qquad (14)$$

где

$$\chi_{sk} = \int_0^1 \chi_s(y) Y_k(y) dy,\ \tau_{sk} = \int_0^1 \tau_s(y) Y_k(y) dy.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Для решения задачи (14) справедлива оценка

$$\left|X_k(x)\right| \le M\left(\sum_{s=0}^{m-1}\left(\left|\chi_{sk}\right| + \left|\tau_{sk}\right|\right)\right), \qquad (15)$$

где M – некоторая положительная константа.

Доказательство. Характеристическое уравнение задачи (14) имеет вид

$$\mu_k^{2m} + (-1)^m \lambda_k = 0,$$

для решения задачи (15) рассмотрим два случая.

1-й случай. Пусть m – четное, то есть $m = 2p$, тогда

$$\mu_{kl} = \lambda_k^{\frac{1}{4p}}\left(\alpha_l + i\beta_l\right),$$

где

$$\alpha_l = \cos\theta_l,\ \beta_l = \sin\theta_l,\ \theta_l = \frac{1+2l}{4p}\pi,\ l = \overline{0, 4p-1},$$

причем $\alpha_l > 0,\ l = \overline{0, p-1}$. Общее решение имеет вид

$$X_k(x) = X_{1k}(x) + X_{2k}(x),$$

где

$$X_{1k}(x) = \sum_{l=0}^{p-1} e^{\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\alpha_l x}\left(c_{1l}\cos\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\beta_l x + c_{2l}\sin\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\beta_l x\right),$$

$$X_{2k}(x) = \sum_{l=0}^{p-1} e^{-\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\alpha_l x}\left(c_{3l}\cos\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\beta_l x + c_{4l}\sin\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\beta_l x\right).$$

Имеем следующие формулы, которые легко выводятся:

$$X_{1k}^{(j)}(x) = \lambda_k^{\frac{j}{4p}} \sum_{l=0}^{p-1} e^{\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\alpha_l x}\left(c_{1l}\cos\left(\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\beta_l x + j\theta_l\right) + c_{2l}\sin\left(\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\beta_l x + j\theta_l\right)\right),\ j = \overline{0, 2p-1},$$

$$X_{2k}^{(j)}(x)=(-1)^j\lambda_k^{\frac{j}{4p}}\sum_{l=0}^{p-1}e^{-\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\alpha_l x}\left(c_{3l}\cos\left(\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\beta_l x-j\theta_l\right)+c_{4l}\sin\left(\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\beta_l x-j\theta_l\right)\right),\ j=\overline{0,2p-1},$$

для нахождения неизвестных коэффициентов c_{ij} удовлетворим граничным условиям:

$$\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{p-1}\left(c_{1l}\cos j\theta_l+c_{2l}\sin j\theta_l\right)+(-1)^j\sum\limits_{l=0}^{p-1}\left(c_{3l}\cos j\theta_l+c_{4l}\sin j\theta_l\right)=\lambda_k^{-\frac{j}{4p}}\chi_{lk}\\ \sum\limits_{l=0}^{p-1}e^{\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\alpha_l}\left(c_{1l}\cos\left(\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\beta_l+j\theta_l\right)+c_{2l}\sin\left(\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\beta_l+j\theta_l\right)\right)+\\ +(-1)^j\sum\limits_{l=0}^{p-1}e^{-\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\alpha_l}\left(c_{3l}\cos\left(\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\beta_l-j\theta_l\right)+c_{4l}\sin\left(\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\beta_l-j\theta_l\right)\right)=\lambda_k^{-\frac{j}{4p}}\tau_{lk}\end{cases}\tag{16}$$

$$j=\overline{0,2p-1}.$$

В силу единственности решения задачи (14), детерминант системы (16) Δ_3 отличен от нуля и имеет вид

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix},$$

где

$$A=\begin{vmatrix}1 & . & 1 & 0 & . & 0\\ \cos\theta_0 & . & \cos\theta_{p-1} & \sin\theta_0 & . & \sin\theta_{p-1}\\ . & . & . & . & . & .\\ \cos(2p-1)\theta_0 & . & \cos(2p-1)\theta_{p-1} & \sin(2p-1)\theta_0 & . & \sin(2p-1)\theta_{p-1}\end{vmatrix}$$

$$B=\begin{vmatrix}1 & . & 1 & 0 & . & 0\\ -\cos\theta_0 & . & -\cos\theta_{p-1} & -\sin\theta_0 & . & -\sin\theta_{p-1}\\ . & . & . & . & . & .\\ (-1)^{2p-1}\cos(2p-1)\theta_0 & . & (-1)^{2p-1}\cos(2p-1)\theta_{p-1} & (-1)^{2p-1}\sin(2p-1)\theta_0 & . & (-1)^{2p-1}\sin(2p-1)\theta_{p-1}\end{vmatrix}$$

$$C=e^{2\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\sum\limits_{l=0}^{p-1}\alpha_l}\begin{vmatrix}\cos\sigma_0^0 & . & \cos\sigma_{p-1}^0 & \sin\sigma_0^0 & . & \sin\sigma_{p-1}^0\\ \cos\sigma_0^1 & . & \cos\sigma_{p-1}^1 & \sin\sigma_0^1 & . & \sin\sigma_{p-1}^1\\ . & . & . & . & . & .\\ \cos\sigma_0^{2p-1} & . & \cos\sigma_{p-1}^{2p-1} & \sin\sigma_0^{2p-1} & . & \sin\sigma_{p-1}^{2p-1}\end{vmatrix}$$

$$D=e^{-2\lambda_k^{\frac{1}{4p}}\sum\limits_{l=0}^{p-1}\alpha_l}\begin{vmatrix}\cos\sigma_0^0 & . & \cos\sigma_{p-1}^0 & \sin\sigma_0^0 & . & \sin\sigma_{p-1}^0\\ -\cos\sigma_0^1 & . & -\cos\sigma_{p-1}^1 & -\sin\sigma_0^1 & . & -\sin\sigma_{p-1}^1\\ . & . & . & . & . & .\\ (-1)^{2p-1}\cos\sigma_0^{2p-1} & . & (-1)^{2p-1}\cos\sigma_{p-1}^{2p-1} & (-1)^{2p-1}\sin\sigma_0^{2p-1} & . & (-1)^{2p-1}\sin\sigma_{p-1}^{2p-1}\end{vmatrix}.$$

$$\sigma_l^j = \lambda_k^{\frac{1}{4p}} \beta_l + j\theta_l.$$

Аналогичные рассуждения и вычисления, как и в вычислении детерминанта при решении задачи (5), дадут нам следующее соотношение

$$\Delta_3 = O\left(e^{2\lambda_k^{\frac{1}{4p}} \sum_{l=0}^{p-1} \alpha_l} \right), \text{ при } k \to +\infty. \tag{17}$$

По правилу Крамера имеем

$$c_{1l} = \frac{\Delta_{3(l+1)}}{\Delta_3},\ l = \overline{0, p-1},\ c_{2l} = \frac{\Delta_{3(l+1+p)}}{\Delta_3},\ l = \overline{0, p-1},$$

$$c_{3l} = \frac{\Delta_{3(l+1+2p)}}{\Delta_3},\ l = \overline{0, p-1},\ c_{4l} = \frac{\Delta_{3(l+1+3p)}}{\Delta_3},\ l = \overline{0, p-1},$$

где Δ_{3j} – определитель, полученный из определителя Δ_3 заменой j-го столбца правой частью системы (16). По формуле Лапласа разложим Δ_{3j} по j-му столбцу

$$\Delta_{3j} = \sum_{i=1}^{2p} \chi_{(i-1)k} A_{ij} + \sum_{i=2p+1}^{4p} \tau_{(i-2p-1)k} A_{ij}, \tag{18}$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения Δ_{3j}. Учитывая (17) и (18), имеем

$$|c_{1l}| \le M_1 e^{-\lambda_k^{\frac{1}{2m}} \alpha_l} \sum_{i=0}^{m-1} \left(|\chi_{ik}| + |\tau_{ik}| \right), |c_{2l}| \le M_2 e^{-\lambda_k^{\frac{1}{2m}} \alpha_l} \sum_{i=0}^{m-1} \left(|\chi_{ik}| + |\tau_{ik}| \right),$$

$$|c_{3l}| \le M_3,\ |c_{4l}| \le M_4,$$

подставляя в решение задачи, получим требуемое неравенство (15).

Случай, когда m – нечетно исследуется аналогично. **Теорема доказана.**

Отметим, что для производных нетрудно получить следующие оценки:

$$\left| X_k^{(s)}(x) \right| \le M_s \sqrt[2m]{\lambda_k^s} \left(\sum_{s=0}^{m-1} \left(|\chi_{sk}| + |\tau_{sk}| \right) \right), s = 1, 2, \ldots, 2m-1,$$

здесь M_s – некоторые положительные постоянные, не зависящие от λ_k.

Итак, решение задачи (2) имеет вид

$$v(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) Y_k(y). \tag{19}$$

Покажем равномерную сходимость ряда (19).

$$|v(x, y)| \le \sum_{k=0}^{\infty} |X_k(x)| |Y_k(y)| \le M \sum_{k=0}^{\infty} \left(|Y_k(y)| \sum_{s=0}^{m-1} \left(|\chi_{sk}| + |\tau_{sk}| \right) \right) =$$

$$= M \left(\sum_{s=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{\infty} |Y_k(y)| |\chi_{sk}| + \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{\infty} |Y_k(y)| |\tau_{sk}| \right). \tag{20}$$

Перестановку рядов будем считать пока формальным. Покажем равномерную и абсолютную сходимость каждого слагаемого в ряде (20). Пусть $s = 0$, тогда по неравенству Коши – Буняковского имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|Y_k(y)\right|\left|\chi_{0k}\right| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{Y_k(y)}{\lambda_k}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda_k \chi_{0k}\right)^2},$$

$$\lambda_k \chi_{0k} = \lambda_k \int_0^1 \chi_0(y) Y_k(y) dy = (-1)^n \int_0^1 \chi_0 Y_k^{(2n)} dy = (-1)^n \int_0^1 \chi_0^{(2n)} Y_k dy.$$

Используя неравенство Бесселя, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda_k \chi_{0k}\right)^2 \leq \int_0^1 \left(\chi_0^{(2n)}\right)^2 dy < \infty. \tag{21}$$

Далее имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|Y_k(y)\right|\left|\tau_{0k}\right| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{Y_k(y)}{\lambda_k}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda_k \tau_{0k}\right)^2},$$

$$\lambda_k \tau_{0k} = \lambda_k \int_0^1 \tau_0(y) Y_k(y) dy = (-1)^n \int_0^1 \tau_0 Y_k^{(2n)} dy = (-1)^n \int_0^1 \tau_0^{(2n)} Y_k dy,$$

отсюда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda_k \tau_{0k}\right)^2 \leq \int_0^1 \left(\tau_0^{(2n)}\right)^2 dy < \infty. \tag{22}$$

Аналогично для случаев $s = 1, 2, \ldots, m-1$ получим оценки типа (21), (22), отсюда следует абсолютная сходимость ряда (20) и, значит, законность перестановки рядов в (20). Если теперь учесть оценку (13), то получим равномерную и абсолютную сходимость ряда (19). Покажем теперь возможность почленного дифференцирования ряда (19). Формально имеем

$$\frac{\partial^{2m} v(x,y)}{\partial x^{2m}} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k^{(2m)}(x) Y_k(y). \tag{23}$$

Покажем равномерную сходимость ряда (23) (сходимость рядов составленных из частных производных других порядков доказывается аналогично). Имеем

$$\left|\frac{\partial^{2m} v(x,y)}{\partial x^{2m}}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left|X_k^{(2m)}(x)\right|\left|Y_k(y)\right| = \sum_{k=0}^{\infty}\left|\lambda_k X_k(x)\right|\left|Y_k(y)\right| \leq$$

$$\leq M \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left|Y_k(y)\right| \sum_{s=0}^{m-1} \lambda_k \left(\left|\chi_{sk}\right| + \left|\tau_{sk}\right|\right)\right) =$$

$$= M\left(\sum_{s=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left|Y_k(y)\right|\left|\chi_{sk}\right| + \sum_{s=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left|Y_k(y)\right|\left|\tau_{sk}\right|\right). \tag{24}$$

Покажем сходимость каждого слагаемого в (24). Пусть $s = 0$, тогда имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left|Y_k(y)\right|\left|\chi_{0k}\right| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{Y_k(y)}{\lambda_k}\right)^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda_k^2 \chi_{0k}\right)^2}, \tag{25}$$

$$\lambda_k^2 \chi_{0k} = (-1)^n \lambda_k \int_0^1 \chi_0^{(2n)} Y_k dy = \int_0^1 \chi_0^{(2n)} Y_k^{(2n)}(y) dy = \int_0^1 \chi_0^{(4n)} Y_k(y) dy .$$

Используя неравенство Бесселя, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda_k^2 \chi_{0k} \right)^2 \leq \int_0^1 \left(\chi_0^{(4n)} \right)^2 dy < \infty . \qquad (26)$$

Учитывая (13) и (26), получим равномерную сходимость ряда (25). Аналогично доказывается сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |Y_k(y)| |\tau_{0k}|$. Применяя вышеуказанные рассуждения и вычисления, для $s = 1, 2, \ldots, m-1$ мы опять получим оценки типа (26). Тем самым мы доказали равномерную и абсолютную сходимость ряда (23). Отметим, что из абсолютной сходимости ряда (23) следует возможность перестановки рядов, которую мы осуществили в (24). Похожим образом доказывается равномерная сходимость рядов, составленных из частных производных по переменной y до $2n$-го порядков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виленкин, Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин. – М. : Наука, 1969. – 328 с.
2. Сабитов, К. Б. Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков / К. Б. Сабитов // Математические заметки. – 2015. – № 97 (2). – С. 262–276.
3. Сабитов, К. Б. Колебания балки с заделанными концами / К. Б. Сабитов // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2015. – № 19 (2). – С. 311–324.

REFERENCES

1. Vilenkin N.Ya. *Kombinatorika* [Combinatorics]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 328 p.
2. Sabitov K.B. Zadacha Dirikhle dlya uravneniy s chastnymi proizvodnymi vysokikh poryadkov [The Dirichlet Problem for Higher-Order Partial Differential Equations]. *Matematicheskie zametki*, 2015, no. 97 (2), pp. 262-276.
3. Sabitov K.B. Kolebaniya balki s zadelannymi kontsami [Fluctuations of a Beam With Clamped Ends]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser. Fiz.-mat. nauki*, 2015, no. 19 (2), pp. 311-324.

BOUNDARY PROBLEM FOR EQUATIONS OF HIGH-EVEN ORDER

Bakhrom Yusupkhanovich Irgashev

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor,
Department of Higher Mathematics,
Namangan Engineering Pedagogical Institute
bahrom_irgashev@inbox.ru
Prosp. Dustlik, 12, 160103 Namangan, Republic of Uzbekistan

Abstract. As it is well known, Fourier method is one of the classical methods of studying boundary value problems for second-order equations. Recently, the spectral method researchers have begun to use it not only for the construction of solutions of boundary value problems for higher-order equations, but also to justify the uniqueness of the solution.

In this paper we consider the boundary value problem in a rectangular region for a high even-order equation.

Using the method of energy integrals shows the unique solvability of the problem. The solution is sought by separation of variables (Fourier method) to give two-dimensional boundary value problems for ordinary differential equations.

According to the variable y we have the problem on eigenvalues and eigenfunctions for a high even-order equation. The asymptotic behavior of the eigenvalues is taken. In order to obtain some necessary estimates, the spectral problem is reduced to an integral equation by constructing the Green's function. Next, the Bessel inequality is used. The paper also shows the possibility of expansion of boundary functions in the system of eigenfunctions.

Next, the boundary value problem is solved for an ordinary differential equation of even order in the variable x. The general solution of the differential equation is found. To find the unknown constants an algebraic equation is solved and an estimate for the decision itself and its derivatives is otained.

The formal solution of the boundary value problem is obtained in the form of an infinite series in eigenfunctions. To prove the uniform convergence of the last series composed of the partial derivatives, first using Cauchy-Bunyakovsky inequality, the series consisting of two variables is decomposed into two one-dimensional series, and estimates for the Fourier coefficients are used.

Key words: eigenvalues, eigenfunctions, uniform convergence, Green's function, Bessel inequality.