DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.3.2

УДК 51-72
ББК 22.1

СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОРОВ

Игорь Павлович Попов

Научный консультант Центра высоких технологий
ip.popow@yandex.ru
ул. Томина, 106-52, 640002 г. Курган, Российская Федерация

Аннотация. Вводятся в рассмотрение скалярная и векторная производные вектора по другому вектору, которые могут иметь приложение к решению задач механики. Доказывается теорема о представлении скалярной производной в виде комбинации частных производных. Отмечено, что при решении ряда задач механики для упрощения вычислений систему координат выбирают таким образом, чтобы, по крайней мере, направление некоторых векторов совпадало с одной из координатных осей. Это порождает необходимость доказательства двух теорем для двухмерного и одномерного случаев. Доказывается теорема о представлении векторной производной в виде комбинации частных производных. Доказываются две аналогичные теоремы для двухмерного и одномерного случаев. В качестве характерных частных случаев рассматриваются скалярная и векторная производные по радиус-вектору, порождающие соответствующие формализмы, связывающие эти производные с оператором набла. Приводятся примеры приложения полученных результатов к задачам механики.

Ключевые слова: векторное поле, скалярная производная, векторная производная, вектор Умова, ускорение, скорость.

Введение

Работа посвящена рассмотрению операций дифференцирования на пространстве векторных полей и гладких функций в $\mathbb{R}^3$.

В механике достаточно широко используется производная скалярной функции по вектору [2; 3; 6]. В какой-то мере подобно ей определяется производная вектора по другому вектору [1]

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} b_x + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} b_y + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} b_z .$$

Вместе с тем формально интерпретируя производную как отношение дифференциалов, можно ввести в рассмотрение *скалярную* и *векторную* производные вектора по другому вектору, которые могут иметь приложение к решению задач механики.

Деление векторов

Определение 1. Частное $a/\mathbf{b}$ от деления скаляра a на вектор $\mathbf{b}$ есть вектор

$$\mathbf{c} = \frac{a}{\mathbf{b}} = \frac{a}{\mathbf{b}} \cdot \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b}} = \frac{a\mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} = \frac{a}{b^2}\mathbf{b}.$$

Обратно,

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \frac{a}{b^2}\mathbf{b} = a.$$

В частности,

$$\frac{1}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}}{b^2}.$$

Определение 2. Частное **e**/**b** от скалярного деления вектора **e** на вектор **b** есть скаляр

$$p = \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{b}} = \mathbf{e} \cdot \frac{1}{\mathbf{b}} = \mathbf{e} \cdot \frac{\mathbf{b}}{b^2} = \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}}{b^2} = \frac{c}{b^2} = \frac{e}{b}\cos\theta,$$

где θ – угол между векторами **e** и **b**. При этом

$$\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{b}}\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{e}} = \cos^2\theta.$$

Определение 3. Частное **e** ÷ **b** от векторного деления вектора **e** на вектор **b** есть вектор

$$\mathbf{q} = \mathbf{e} \div \mathbf{b} = \mathbf{e} \times \frac{1}{\mathbf{b}} = \mathbf{e} \times \frac{\mathbf{b}}{b^2} = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{b}}{b^2} = \frac{\mathbf{d}}{b^2} = \frac{e}{b}\frac{\mathbf{d}}{d}\sin\ \theta.$$

При этом

$$(\mathbf{e} \div \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \div \mathbf{e}) = -\sin^2\theta,\ \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{b}}\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{e}} - (\mathbf{e} \div \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \div \mathbf{e}) = 1,\ p^2 + \mathbf{q}^2 = \frac{e^2}{b^2}.$$

Теорема 1. Если известны частные от скалярного p и векторного **q** деления двух векторов **e** и **b**, а также делитель **b**, то делимое определяется как

$$\mathbf{e} = \mathbf{b}p + \mathbf{b} \times \mathbf{q}.$$

Доказательство.

$$\mathbf{b}p + \mathbf{b} \times \mathbf{q} = \frac{1}{b^2}\left[\mathbf{b}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{b})\right] = \frac{1}{b^2}\left[\mathbf{b}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{e}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\right] = \mathbf{e}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Если известны частные от скалярного p и векторного **q** деления двух векторов **e** и **b**, а также делимое **e**, то делитель определяется как

$$\mathbf{b} = \frac{p\mathbf{e} + \mathbf{q} \times \mathbf{e}}{p^2 + \mathbf{q}^2}.$$

Доказательство.

$$\frac{p\mathbf{e} + \mathbf{q} \times \mathbf{e}}{p^2 + \mathbf{q}^2} = \frac{1}{b^2}\quad\frac{b^2}{e^2}\left[(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e} + (\mathbf{e} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{e}\right] = \frac{1}{e^2}\left[(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e} + \mathbf{b}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) - \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\right] = \mathbf{b}.$$

Теорема доказана.

Скалярная производная вектора по другому вектору

Определение 4. Операция

$$d\mathbf{a}\cdot\frac{1}{d\mathbf{b}}$$

называется скалярной производной векторного поля $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ по векторному полю $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$.

Теорема 3. Имеет место формула

$$d\mathbf{a}\cdot\frac{1}{d\mathbf{b}}=\frac{da_x}{db_x}+\frac{da_y}{db_y}+\frac{da_z}{db_z}. \tag{1}$$

Доказательство.

$$d\mathbf{a}\cdot\frac{1}{d\mathbf{b}}=d(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\cdot\frac{1}{d(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k})}=$$

$$=(da_x\mathbf{i}+da_y\mathbf{j}+da_z\mathbf{k})\cdot\frac{1}{db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k}}=$$

$$=da_x\mathbf{i}\cdot\frac{1}{db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k}}\cdot\frac{db_x\mathbf{i}}{db_x\mathbf{i}}+da_y\mathbf{j}\cdot\frac{1}{db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k}}\cdot\frac{db_y\mathbf{j}}{db_y\mathbf{j}}+$$

$$+da_z\mathbf{k}\cdot\frac{1}{db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k}}\cdot\frac{db_z\mathbf{k}}{db_z\mathbf{k}}=$$

$$=da_x\mathbf{i}\cdot\frac{db_x\mathbf{i}}{(db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k})\cdot db_x\mathbf{i}}+da_y\mathbf{j}\cdot\frac{db_y\mathbf{j}}{(db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k})\cdot db_y\mathbf{j}}+$$

$$+da_z\mathbf{k}\cdot\frac{db_z\mathbf{k}}{(db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k})\cdot db_z\mathbf{k}}=$$

$$=\frac{da_x\mathbf{i}\cdot db_x\mathbf{i}}{db_x^2}+\frac{da_y\mathbf{j}\cdot db_y\mathbf{j}}{db_y^2}+\frac{da_z\mathbf{k}\cdot db_z\mathbf{k}}{db_z^2}=$$

$$=\frac{da_x db_x}{db_x^2}+\frac{da_y db_y}{db_y^2}+\frac{da_z db_z}{db_z^2}=\frac{da_x}{db_x}+\frac{da_y}{db_y}+\frac{da_z}{db_z}.$$

Теорема доказана.

Представляет интерес частный случай, когда берется скалярная производная по радиус-вектору $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

$$d\mathbf{a}\cdot\frac{1}{d\mathbf{r}}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\mathrm{div}\mathbf{a}=\nabla\cdot\mathbf{a}.$$

Следствие. Имеет место формализм:

$$d \cdot \frac{1}{d\mathbf{r}} = \nabla \cdot$$

Замечание. При решении ряда задач механики для упрощения вычислений систему координат выбирают таким образом, чтобы, по крайней мере, направление некоторых векторов совпадало с одной из координатных осей. Если это касается вектора, по которому предполагается выполнить дифференцирование, то в таких случаях формула (1) использоваться не может, поскольку некоторые дифференциалы этого вектора равны нулю.

Это обстоятельство обусловливает следующие две теоремы.

Теорема 4. Имеет место формула

$$d\mathbf{a} \cdot \frac{1}{d(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2)} = \frac{da_1}{db_1} + \frac{da_2}{db_2},$$

где $\mathbf{e}$ – орты.

Доказательство.

$$d\mathbf{a} \cdot \frac{1}{d(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2)} = d(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \cdot \frac{1}{d(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2)} =$$

$$= (da_1\mathbf{e}_1 + da_2\mathbf{e}_2 + da_3\mathbf{e}_3) \cdot \frac{1}{db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2} =$$

$$= da_1\mathbf{e}_1 \cdot \frac{1}{db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2} \cdot \frac{db_1\mathbf{e}_1}{db_1\mathbf{e}_1} + da_2\mathbf{e}_2 \cdot \frac{1}{db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2} \cdot \frac{db_2\mathbf{e}_2}{db_2\mathbf{e}_2} +$$

$$+da_3\mathbf{e}_3 \cdot \frac{1}{db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2} \cdot \frac{db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2}{db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2} =$$

$$= \frac{da_1\mathbf{e}_1 \cdot db_1\mathbf{e}_1}{(db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2) \cdot db_1\mathbf{e}_1} + \frac{da_2\mathbf{e}_2 \cdot db_2\mathbf{e}_2}{(db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2) \cdot db_2\mathbf{e}_2} + \frac{da_3\mathbf{e}_3 \cdot (db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2)}{(db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2) \cdot (db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2)} =$$

$$= \frac{da_1 db_1}{db_1^2} + \frac{da_2 db_2}{db_2^2} = \frac{da_1}{db_1} + \frac{da_2}{db_2}.$$

Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 5. Имеет место формула:

$$d\mathbf{a} \cdot \frac{1}{db_1\mathbf{e}_1} = \frac{da_1}{db_1}.$$

Пример 1. Тело массой m движется со скоростью

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}\frac{1}{3}v + \mathbf{j}\frac{\sqrt{3}}{3}v + \mathbf{k}\frac{\sqrt{5}}{3}v.$$

В соответствии с [4; 5] интегральный (в смысле объемного интегрирования) вектор Умова в этом случае равен

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}\frac{1}{162}mv^3 + \mathbf{j}\frac{3\sqrt{3}}{162}mv^3 + \mathbf{k}\frac{5\sqrt{5}}{162}mv^3.$$

При этом

$$d\mathbf{u}\cdot\frac{1}{d\mathbf{v}}=\frac{du_x}{dv_x}+\frac{du_y}{dv_y}+\frac{du_z}{dv_z}=\frac{1}{18}mv^2+\frac{3}{18}mv^2+\frac{5}{18}mv^2=\frac{1}{2}mv^2,$$

что является кинетической энергией.

Векторная производная вектора по другому вектору

Определение 5. Операция

$$d\mathbf{a}\times\frac{1}{d\mathbf{b}}$$

называется векторной производной векторного поля **a** по векторному полю **b**.

Теорема 6. Имеет место формула

$$d\mathbf{a}\times\frac{1}{d\mathbf{b}}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{da_y}{db_z}-\frac{da_z}{db_y}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{da_z}{db_x}-\frac{da_x}{db_z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{da_x}{db_y}-\frac{da_y}{db_x}\right)\mathbf{k}\right]. \qquad (2)$$

Доказательство.

$$d\mathbf{a}\times\frac{1}{d\mathbf{b}}=d(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\times\frac{1}{d(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k})}=$$

$$=(da_x\mathbf{i}+da_y\mathbf{j}+da_z\mathbf{k})\times\frac{1}{db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k}}=$$

$$=da_x\mathbf{i}\times\frac{1}{db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{db_y\mathbf{j}}{db_y\mathbf{j}}+\frac{db_z\mathbf{k}}{db_z\mathbf{k}}\right)+$$

$$+da_y\mathbf{j}\times\frac{1}{db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{db_x\mathbf{i}}{db_x\mathbf{i}}+\frac{db_z\mathbf{k}}{db_z\mathbf{k}}\right)+$$

$$+da_z\mathbf{k}\times\frac{1}{db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{db_x\mathbf{i}}{db_x\mathbf{i}}+\frac{db_y\mathbf{j}}{db_y\mathbf{j}}\right)=$$

$$=da_x\mathbf{i}\times\frac{db_y\mathbf{j}}{2(db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k})\cdot db_y\mathbf{j}}+da_x\mathbf{i}\times\frac{db_z\mathbf{k}}{2(db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k})\cdot db_z\mathbf{k}}+$$

$$+da_y\mathbf{j}\times\frac{db_x\mathbf{i}}{2(db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k})\cdot db_x\mathbf{i}}+da_y\mathbf{j}\times\frac{db_z\mathbf{k}}{2(db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k})\cdot db_z\mathbf{k}}+$$

$$+da_z\mathbf{k}\times\frac{db_x\mathbf{i}}{2(db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k})\cdot db_x\mathbf{i}}+da_z\mathbf{k}\times\frac{db_y\mathbf{j}}{2(db_x\mathbf{i}+db_y\mathbf{j}+db_z\mathbf{k})\cdot db_y\mathbf{j}}=$$

$$=\frac{da_x\mathbf{i}\times db_y\mathbf{j}}{2db_y^2}+\frac{da_x\mathbf{i}\times db_z\mathbf{k}}{2db_z^2}+\frac{da_y\mathbf{j}\times db_x\mathbf{i}}{2db_x^2}+\frac{da_y\mathbf{j}\times db_z\mathbf{k}}{2db_z^2}+\frac{da_z\mathbf{k}\times db_x\mathbf{i}}{2db_x^2}+\frac{da_z\mathbf{k}\times db_y\mathbf{j}}{2db_y^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{da_xdb_y}{db_y^2}\mathbf{k}-\frac{da_xdb_z}{db_z^2}\mathbf{j}-\frac{da_ydb_x}{db_x^2}\mathbf{k}+\frac{da_ydb_z}{db_z^2}\mathbf{i}+\frac{da_zdb_x}{db_x^2}\mathbf{j}-\frac{da_zdb_y}{db_y^2}\mathbf{i}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{da_x}{db_y}\mathbf{k}-\frac{da_x}{db_z}\mathbf{j}-\frac{da_y}{db_x}\mathbf{k}+\frac{da_y}{db_z}\mathbf{i}+\frac{da_z}{db_x}\mathbf{j}-\frac{da_z}{db_y}\mathbf{i}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{da_y}{db_z}-\frac{da_z}{db_y}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{da_z}{db_x}-\frac{da_x}{db_z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{da_x}{db_y}-\frac{da_y}{db_x}\right)\mathbf{k}\right].$$

Теорема доказана.

Представляет интерес частный случай, когда берется векторная производная по радиус-вектору $\mathbf{r}$.

$$d\mathbf{a}\times\frac{1}{d\mathbf{r}}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial a_y}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial y}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial x}\right)\mathbf{k}\right]=-\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{a}=-\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{a}.$$

Следствие. Имеет место формализм:

$$d\times\frac{1}{d\mathbf{r}}=-\frac{1}{2}\nabla\times.$$

Приведенное выше замечание обусловливает следующие две теоремы.

Теорема 7. Имеет место формула

$$d\mathbf{a}\times\frac{1}{db\mathbf{e}_1}=\frac{a_3}{db}\mathbf{e}_2-\frac{da_2}{db}\mathbf{e}_3, \tag{3}$$

Доказательство.

$$d\mathbf{a}\times\frac{1}{db\mathbf{e}_1}=d(a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3)\times\frac{1}{db\mathbf{e}_1}=(da_1\mathbf{e}_1+da_2\mathbf{e}_2+da_3\mathbf{e}_3)\times\frac{1}{db\mathbf{e}_1}=$$

$$=da_1\mathbf{e}_1\times\frac{1}{db\mathbf{e}_1}\cdot\frac{db\mathbf{e}_1}{db\mathbf{e}_1}+da_2\mathbf{e}_2\times\frac{1}{db\mathbf{e}_1}\cdot\frac{db\mathbf{e}_1}{db\mathbf{e}_1}+a_3\mathbf{e}_3\times\frac{1}{db\mathbf{e}_1}\cdot\frac{db\mathbf{e}_1}{db\mathbf{e}_1}=$$

$$=da_1\mathbf{e}_1\times\frac{db\mathbf{e}_1}{db\mathbf{e}_1\cdot db\mathbf{e}_1}+da_2\mathbf{e}_2\times\frac{db\mathbf{e}_1}{db\mathbf{e}_1\cdot db\mathbf{e}_1}+a_3\mathbf{e}_3\times\frac{db\mathbf{e}_1}{db\mathbf{e}_1\cdot db\mathbf{e}_1}=$$

$$=\frac{da_1\mathbf{e}_1\times db\mathbf{e}_1}{db^2}+\frac{da_2\mathbf{e}_2\times db\mathbf{e}_1}{db^2}+\frac{a_3\mathbf{e}_3\times db\mathbf{e}_1}{db^2}=-\frac{da_2db}{db^2}\mathbf{e}_3+\frac{a_3db}{db^2}\mathbf{e}_2=\frac{a_3}{db}\mathbf{e}_2-\frac{da_2}{db}\mathbf{e}_3.$$

Теорема доказана.

Теорема 8. Имеет место формула

$$d\mathbf{a}\times\frac{1}{d(b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2)}=-\frac{da_3}{2db_2}\mathbf{e}_1+\frac{da_3}{2db_1}\mathbf{e}_2+\left(\frac{da_1}{db_2}-\frac{da_2}{db_1}\right)\mathbf{e}_3.$$

Доказательство.

$$d\mathbf{a}\times\frac{1}{d(b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2)}=d(a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3)\times\frac{1}{d(b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2)}=$$

$$=(da_1\mathbf{e}_1+da_2\mathbf{e}_2+da_3\mathbf{e}_3)\times\frac{1}{db_1\mathbf{e}_1+db_2\mathbf{e}_2}=$$

$$= da_1\mathbf{e}_1 \times \frac{1}{db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2} \cdot \frac{db_2\mathbf{e}_2}{db_2\mathbf{e}_2} + da_2\mathbf{e}_2 \times \frac{1}{db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2} \cdot \frac{db_1\mathbf{e}_1}{db_1\mathbf{e}_1} +$$

$$+ da_3\mathbf{e}_3 \times \frac{1}{db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{db_1\mathbf{e}_1}{db_1\mathbf{e}_1} + \frac{db_2\mathbf{e}_2}{db_2\mathbf{e}_2}\right) =$$

$$= da_1\mathbf{e}_1 \times \frac{db_2\mathbf{e}_2}{(db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2)\cdot db_2\mathbf{e}_2} + da_2\mathbf{e}_2 \times \frac{db_1\mathbf{e}_1}{(db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2)\cdot db_1\mathbf{e}_1} +$$

$$+ da_3\mathbf{e}_3 \times \frac{db_1\mathbf{e}_1}{2(db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2)\cdot db_1\mathbf{e}_1} + da_3\mathbf{e}_3 \times \frac{db_2\mathbf{e}_2}{2(db_1\mathbf{e}_1 + db_2\mathbf{e}_2)\cdot db_2\mathbf{e}_2} =$$

$$= \frac{da_1\mathbf{e}_1 \times db_2\mathbf{e}_2}{db_2^2} + \frac{da_2\mathbf{e}_2 \times db_1\mathbf{e}_1}{db_1^2} + \frac{da_3\mathbf{e}_3 \times db_1\mathbf{e}_1}{2db_1^2} + \frac{da_3\mathbf{e}_3 \times db_2\mathbf{e}_2}{2db_2^2} =$$

$$= \frac{da_1 db_2}{db_2^2}\mathbf{e}_3 - \frac{da_2 db_1}{db_1^2}\mathbf{e}_3 + \frac{da_3 db_1}{2db_1^2}\mathbf{e}_2 - \frac{da_3 b_2}{2db_2^2}\mathbf{e}_1 =$$

$$= -\frac{da_3}{2db_2}\mathbf{e}_1 + \frac{da_3}{2db_1}\mathbf{e}_2 + \left(\frac{da_1}{db_2} - \frac{da_2}{db_1}\right)\mathbf{e}_3 .$$

Пример 2. Точка совершает вращательное движение с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k}\varepsilon$$

и тангенциальным ускорением

$$\mathbf{a}_\tau = -\mathbf{i}a\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} + \mathbf{j}a\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Здесь $\mathbf{k}\varepsilon$ – угловое ускорение. В соответствии с (3)

$$d\mathbf{a}_\tau \times \frac{1}{d\boldsymbol{\omega}} = \frac{da_{\tau y}}{d\omega_z}\mathbf{i} - \frac{da_{\tau x}}{d\omega_z}\mathbf{j} = -\mathbf{i}at\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} + \mathbf{j}at\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} = \mathbf{v},$$

то есть результат является линейной скоростью точки.

Пример 3. Скорость точки равна

$$\mathbf{v} = -\mathbf{i}\omega R\sin\omega t + \mathbf{j}\omega R\cos\omega t + \mathbf{k}\omega^2 Rt,$$

ускорение –

$$\mathbf{a} = -\mathbf{i}\omega^2 R\cos\omega t - \mathbf{j}\omega^2 R\sin\omega t + \mathbf{k}\omega^2 R .$$

В соответствии с (2)

$$d\mathbf{a} \times \frac{1}{d\mathbf{v}} = \frac{1}{2}\left[\frac{da_y}{dv_z}\mathbf{i} - \frac{da_x}{dv_z}\mathbf{j} + \left(\frac{da_x}{dv_y} - \frac{da_y}{dv_x}\right)\mathbf{k}\right] = -\mathbf{i}\frac{\omega}{2}\cos\omega t - \mathbf{j}\frac{\omega}{2}\sin\omega t - \mathbf{k}\omega = -\boldsymbol{\omega}^* .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анго, А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго – М. : Наука, 1965. – 780 с.

2. Афанасьев, А. М. Математическая модель электромагнитной сушки с краевыми условиями массообмена на основе закона испарения Дальтона / А. М. Афанасьев, Б. Н. Сипливый // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. – 2014. – № 6 (25). – С. 69–80.

3. Бодренко, А. И. Непрерывные HG-деформации поверхностей с краем в евклидовом пространстве / А. И. Бодренко // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. – 2014. – № 1 (20). – С. 6–13.

4. Попов, И. П. Моделирование состояния объекта в виде суперпозиции состояний / И. П. Попов // Прикладная математика и вопросы управления. – 2015. – № 2. – С. 18–27.

5. Попов, И. П. О мерах механического движения / И. П. Попов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – № 3 (26). – С. 13–15.

6. Попов, И. П. О некоторых операциях над векторами / И. П. Попов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. – 2014. – № 5 (24). – С. 55–61.

REFERENCES

1. Ango A. *Matematika dlya elektro- i radioinzhenerov* [Mathematics for Electrical and Radio Engineers]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 780 p.

2. Afanasyev A.M., Siplivyy B.N. Matematicheskaya model elektromagnitnoy sushki s kraevymi usloviyami massoobmena na osnove zakona ispareniya Daltona [Mathematical Model of Electromagnetic Drying Mass Transfer Boundary Conditions Based on the Law of Dalton Evaporation]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2014, no. 6 (25), pp. 69-80.

3. Bodrenko A.I. Nepreryvnye HG-deformatsii poverkhnostey s kraem v evklidovom prostranstve [Continuous HG-Deformations of Surfaces With an Edge in the Euclidean Space]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2014, no. 1 (20), pp. 6-13.

4. Popov I.P. Modelirovanie sostoyaniya obyekta v vide superpozitsii sostoyaniy [Modeling State of the Object in a Superposition of States]. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya,* 2015, no. 2, pp. 18-27.

5. Popov I.P. O merakh mekhanicheskogo dvizheniya [On Measures of Mechanical Motion]. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika,* 2014, no. 3 (26), pp. 13-15.

6. Popov I.P. O nekotorykh operatsiyakh nad vektorami [Some Operations on Vectors]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2014, no. 5 (24), pp. 55-61.

SCALAR AND VECTOR DIFFERENTIATION OF VECTORS

Igor Pavlovich Popov

Scientific Consultant, Center for High Technology
ip.popow@yandex.ru
Tomina St., 106-52, 640002 Kurgan, Russian Federation

Abstract. The work is devoted to the operations of differentiation in the space of vector fields and smooth functions. In mechanics the derivative of a scalar function of the vector is widely used. To some extent, it is like determined by the derivative of the vector to another vector. However, formally interpreting the derivative as division differentials is entered in consideration of scalar and vector derived on another vector, which may have application to the solution of problems of mechanics. We prove a theorem on the representation of the scalar derivative in the form of a combination of partial derivatives. As a typical particular case we consider a scalar derivative in the radius vector, generating formalism linking it with the operator nabla. It is noted that in solving some problems in the mechanics to simplify the calculation, coordinate system is chosen so that at least the derection of some vectors coincides with one of the coordinate axes. If it concerns the vector for derivation to be performed, in such cases, the formula for the three-dimensional case cannot be used because some of this vector differentials are equal to zero. This circumstance makes it necessary to prove two theorems for the two-dimensional and one-dimensional case. We prove a theorem on the representation of the derivative vector as a combination of partial derivatives. As a typical particular case we consider the vector derivative of the radius vector, generating formalism linking it with the operator nabla. We prove similar theorems for two-dimensional and one-dimensional case. We give examples of applications of these results to problems of mechanics.

Key words: vector field, the scalar derivative, vector derivative, Umov vector, acceleration, speed.