



DOI: <http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.3.5>

УДК 539.375

ББК 22.251

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТРЕЩИН В УПРУГОМ БИМАТЕРИАЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ АНТИПЛОСКОГО СДВИГА

Микаел Гарегинович Ордян

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры теоретической и прикладной механики,
Воронежский государственный архитектурно-строительный университет
omg84@mail.ru
ул. 20-летия Октября, 84, 394006 г. Воронеж, Российская Федерация

Вера Евгеньевна Петрова

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического и прикладного анализа,
Воронежский государственный университет
veraep@gmail.com
пл. Университетская, 1, 394018 г. Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. В данной работе приведено численное решение задачи о взаимодействии межфазной трещины с внутренними трещинами в биматериале, находящемся под действием антиплоского сдвига. Был использован метод сингулярных интегральных уравнений; уравнения решены численно методом механических квадратур. Проведен параметрический анализ влияния угла наклона внутренних трещин и их расположения на коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах межфазной трещины в биматериале при разных упругих коэффициентах материалов.

Ключевые слова: граница раздела, модуль сдвига, коэффициент интенсивности напряжений, антиплоская сдвиговая нагрузка, сингулярное интегральное уравнение.

Введение

Наличие трещин в композитных материалах может значительно снизить прочность конструкции из композита и при дальнейшей эксплуатации привести к ее полному разрушению. Для исследования разрушения, в частности биматериалов, важно исследовать взаимодействия трещин, особенно обращая внимание на влияние внутренних трещин на межфазную трещину (трещина, которая находится на линии соединения материалов). К настоящему времени большое количество исследований посвящено задачам взаимодействия трещин в однородном материале, обзор работ можно найти в [8; 14]. Ряд задач о взаимодействии макротрещины с полем произвольно расположенных трещин был решен методом сингулярных интегральных уравнений [4] с применением метода малого параметра, где за малый параметр взято отношение характерной длины малой трещины к длине макротрещины.

Метод был предложен Ромалис и Тамуж в 1984 г. первоначально для взаимодействия макро-микротрещин в однородном материале под действием растягивающей нагрузки (см. оригинальную работу [7] и обзоры [8; 14], где также есть описание этого метода) и затем успешно

использовался для аналогичных задач при разной нагрузке, механической и тепловой, и для разных материалов. С помощью этого метода малого параметра в работе [2] получено асимптотическое аналитическое решение для задачи о взаимодействии межфазной трещины с произвольно расположенными микротрещинами в условиях продольного сдвига, а в однородном материале аналогичная антиплоская задача была решена в [5]. Для случая функционально-градиентного/однородного биматериала в работе [1] получено приближенное аналитическое решение задачи о взаимодействии межфазной и внутренних трещин в условиях продольного сдвига, а при воздействии теплового потока и/или растяжения и сдвиговой нагрузок – в работах [6; 9–13].

Метод малого параметра показал свою эффективность при решении вышеперечисленных задач, однако он имеет ряд ограничений, например, на расстояние между трещинами (хорошую точность дает при расстояниях между вершинами трещин не меньше полудлины малой трещины), на размер трещин, отношение длин которых должно быть малой величиной.

В данной работе получено численное решение сингулярных интегральных уравнений, которое в отличие от метода малого параметра справедливо для близкого расположения трещин и их сопоставимых размеров. Однако исследовать влияние большого количества трещин этим методом затруднительно, поэтому ограничились исследованием влияния двух трещин на межфазную трещину в биматериале в условиях продольного сдвига. Сделан параметрический анализ влияния близко расположенных внутренних трещин на коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах межфазной трещины при разных сочетаниях материалов. Как показали предыдущие исследования [1–3; 5–7; 9–13], наибольшее влияние на трещину имеют дефекты, расположенные вблизи ее вершины, и этот случай рассматривается в настоящей работе.

1. Формулировка задачи

Рассмотрим двухкомпонентный материал (биматериал) с разными коэффициентами Пуассона (ν_1, ν_2) и модулями Юнга (E_1, E_2), находящийся под действием антиплоского сдвига τ . Предполагаем, что на границе раздела материалов есть межфазная трещина длиной $2a_0$, а один из материалов D_1 ($y > 0$) содержит внутренние трещины длиной $2a_k$ ($k = 1, 2$). Декартова система координат выбрана так, чтобы начало координат совпадало с центром межфазной трещины, а ось x лежала на линии раздела материалов. С каждой внутренней трещиной связана локальная система координат (x_k, y_k) таким образом, что ее начало совпадает с центром трещины δ_k^0 , а ось x_k расположена вдоль линии трещины. Положение внутренних трещин определяется координатами их центров δ_k^0 и углами наклона α_k ($k = 0, 1, 2$) к оси x (рис. 1).

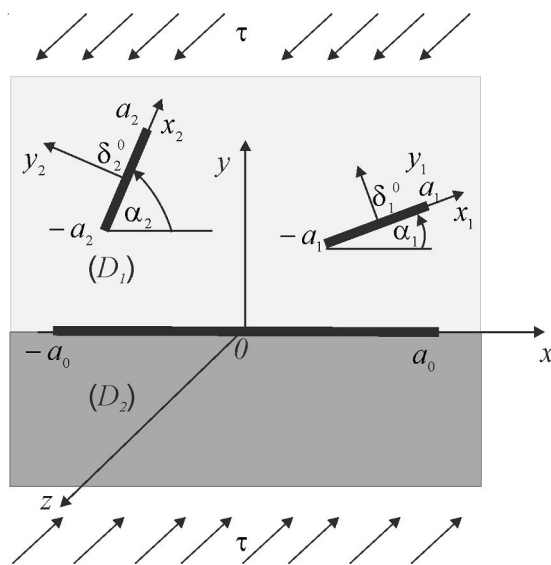


Рис. 1. Межфазная и внутренние трещины под действием антиплоского сдвига

Задача состоит в определении смещения и распределения напряжений в данном биматериале в окрестности межфазной трещины.

Поскольку ось деформации направлена по оси z , то компоненты вектора упругих смещений представляются в виде

$$u = v = 0, \quad w = w(x, y). \quad (1)$$

Из закона Гука следует, что компоненты тензора напряжений τ_{xz} τ_{yz} выражаются через смещение $w(x, y)$ следующим образом [4]

$$\tau_{xz} = \mu_j \frac{\partial w_j}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \mu_j \frac{\partial w_j}{\partial y} \quad (j = 1, 2), \quad (2)$$

где $\mu_j = E_j / 2(1 + \nu_j)$ – модуль сдвига.

Система уравнений равновесия сводится к одному уравнению, которое в случае отсутствия массовых сил имеет следующий вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Применяя принцип суперпозиции, данную задачу с условиями на бесконечности сводим к задаче с условиями на границах разрезов. Основная задача есть сумма решений двух задач со следующими условиями:

1. Бездефектный биматериал в условиях антиплоского сдвига.
2. Биматериал с трещинами, на краях которых заданы усилия, равные по величине усилиям, посчитанным в первой подзадаче, но противоположного знака.

Кроме того, в соответствии с принципом суперпозиции, задача распадается на подзадачи более простой геометрии, каждая из которых содержит только один дефект. Таким образом, надо рассмотреть решение для биматериала с внутренней трещиной, решение для межфазной трещины, а затем построить уравнения для задачи о взаимодействии внутренних трещин с межфазной.

Итак, перемещения $\tilde{w}_j(x, y)$ представляются в виде двух слагаемых

$$\tilde{w}_j(x, y) = w_j^0(x, y) + w_j(x, y), \quad (j = 1, 2), \quad (4)$$

где $w_j^0(x, y)$ – распределение перемещений в бездефектном биматериале; $w_j(x, y)$ – перемещения, возникающие из-за наличия дефектов.

Решение первой задачи известно и для биматериала под действием антиплоского сдвига τ имеет следующий вид

$$w_j^0(x, y) = \frac{\tau y}{\mu_j}, \quad (j = 1, 2). \quad (5)$$

Рассмотрим вторую задачу. Функция $w_j(x, y)$, определяющая возмущенное перемещение, удовлетворяет уравнению Лапласа (3). Граничные условия для $w_j(x, y)$ следующие:

$$\mu_1 \frac{\partial w_1(x, 0^+)}{\partial y} = \mu_2 \frac{\partial w_2(x, 0^-)}{\partial y} = \tau_0(x), \quad |x| \leq a_0, \quad (6)$$

$$\mu_j \frac{\partial w_{jn}(x_n, 0^\pm)}{\partial y_n} = \tau_n(x_n), \quad |x_n| \leq a_n.$$

$$\mu_1 \frac{\partial w_1(x, 0^+)}{\partial y} = \mu_2 \frac{\partial w_2(x, 0^-)}{\partial y}, w_1(x, 0^+) = w_2(x, 0^-), |x| \geq a_0, y = 0. \quad (7)$$

$$w_1(\pm a_0, 0^+) = w_2(\pm a_0, 0^-), w_{jn}(\pm a, 0^+) = w_{jn}(\pm a, 0^-). \quad (8)$$

$$\mu_1 \frac{\partial w_1(x, y)}{\partial y} = \mu_2 \frac{\partial w_2(x, y)}{\partial y} = 0, x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \quad (9)$$

где
$$\tau_0(x) = -\mu_j \frac{\partial w_j^0}{\partial y}, \tau_n(x_n) = -\mu_j \frac{\partial w_j^0}{\partial y_n} \Big|_{y_n=0}. \quad (10)$$

Здесь и далее знаками «+» и «-» обозначены граничные значения, принимаемые функциями соответственно на верхнем и нижнем краях трещин (6) или на верхней и нижней границе раздела материалов (7).

Полученные в работе [3] интегральные уравнения задачи теплопроводности для теплоизолированных трещин полностью совпадают с интегральными уравнениями данной задачи, если физические характеристики задачи теплопроводности заменить на соответствующие характеристики задачи продольного сдвига. В рассматриваемой задаче неизвестными будут производные скачков смещений на линиях трещин φ'_k , где $2\varphi_k = w_k^+ - w_k^-$. Система сингулярных уравнений для неизвестных φ'_k в случае одной межфазной и двух внутренних трещин будет иметь следующий вид

$$\int_{-a_0}^{a_0} \frac{\varphi'_0(t)}{t-x} dt + \int_{-a_1}^{a_1} P_{01}(t, x) \varphi'_1(t) dt + \int_{-a_2}^{a_2} P_{02}(t, x) \varphi'_2(t) dt = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\mu_1} \tau_0(x) (1 + \mu_1 / \mu_2), |x| < a_0, \quad (11)$$

$$\frac{2}{1 + \mu_1 / \mu_2} \int_{-a_0}^{a_0} P_{10}(t, x) \varphi'_0(t) dt + \int_{-a_1}^{a_1} \frac{\varphi'_1(t)}{t-x} dt + \int_{-a_2}^{a_2} P_{12}(t, x) \varphi'_2(t) dt = \frac{\pi}{\mu_1} \tau_1(x), |x| < a_1, \quad (12)$$

$$\frac{2}{1 + \mu_1 / \mu_2} \int_{-a_0}^{a_0} P_{20}(t, x) \varphi'_0(t) dt + \int_{-a_1}^{a_1} P_{21}(t, x) \varphi'_1(t) dt + \int_{-a_2}^{a_2} \frac{\varphi'_2(t)}{t-x} dt = \frac{\pi}{\mu_1} \tau_2(x), |x| < a_2, \quad (13)$$

где
$$P_{nk}(t, x) = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\alpha_n}}{te^{i\alpha_k} + \delta_k^0 - xe^{i\alpha_n} - \delta_n^0} \right]. \quad (14)$$

Система уравнений дополняется условиями

$$\int_{-a_k}^{a_k} \varphi'_k(t) dt = 0, k = 0, 1, 2, \quad (15)$$

обеспечивающими однозначность функции φ'_k при обходе контура трещин.

2. Численное решение задачи

Решение системы сингулярных интегральных уравнений (11)–(13) получено численным методом механических квадратур [4]. В уравнениях (11)–(15) заменой переменных $x = \xi a_k, t = \chi a_k$ ($k = 0, 1, 2$), переходим к безразмерным переменным ξ и χ , а также к безразмерным параметрам $z_k^0 = \delta_k^0 / a_0$ и a_k / a_0 ($k = 0, 1, 2$). В дальнейшем для обозначения безразмерных длин трещин будем использовать прежнее обозначение a_k .

Неизвестные функции в уравнениях (11)–(13) представим в виде [4]

$$\varphi'_n(\xi) = \frac{u_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad (16)$$

где $u_n(\xi)$ – новая неизвестная функция, регулярная на отрезке $[-1,1]$; $1/\sqrt{1-\xi^2}$ – весовая функция, которая учитывает корневую особенность решения задачи о трещинах.

Используя квадратурные формулы для интегралов [4], уравнения (11)–(13) сводятся к системе $3 \times M$ (3 – количество трещин; M – число узлов) алгебраических уравнений для определения $3 \times M$ неизвестных $u_n(\xi_m)$:

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{k=0}^2 [u_k(\xi_m) P_{nk}(\xi_m, \chi_r)] = \pi \tau_n(\chi_r), \tag{17}$$

$$\sum_{m=1}^M u_n(\xi_m) = 0, \quad n = 0, 1, 2; \quad r = 1, 2, \dots, M,$$

где $\xi_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi, \quad (m = 1, 2, \dots, M)$ (18)

и $\chi_r = \cos \frac{\pi r}{M} \quad (r = 1, 2, \dots, M-1).$ (19)

Здесь τ_n – это правые части уравнений (11)–(13); P_{nk} – дискретный аналог регулярных ядер (14) вместе с сингулярной частью, которая получается из (14) при $n = k$.

После решения системы (17) нормированные коэффициенты интенсивности напряжений (НКИН) в вершинах трещин определяем по формуле

$$\frac{K_{III}^\pm}{\sqrt{a_n} \tau / \mu_1} = \mu u_n(\pm 1), \quad n = 0, 1, 2. \tag{20}$$

Здесь верхний знак относится к НКИН в правой вершине трещины (K_{III}^+), а нижний – к левой (K_{III}^-).

Величины $u_n(\pm 1)$ определяются выражениями [4]

$$u_n(1) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} u_n(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{M} \pi; \quad u_n(-1) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} u_n(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi.$$

Численное решение справедливо для близкого расположения трещин и для сопоставимых размеров трещин. Для трех трещин имеем систему $3 \times M$ алгебраических уравнений, где M – число интерполяционных узлов, для хорошей точности решения брали $M = 70$.

3. Параметрический анализ результатов

На рисунках 2 и 3 показаны изменения НКИН в случае численного решения для биматериала при условии, что межфазная трещина длиной $2a_0 = 2$ расположена в точке $z_0^0 = 0$. Графики соответствуют случаю, когда материалы (D_1) и (D_2) имеют одинаковые модули сдвига, то есть $\mu_1/\mu_2 = 1$. На рисунках 2 и 3 в графиках жирная горизонтальная линия соответствует НКИН в левой и правой вершинах межфазной трещины при отсутствии внутренних трещин: $K'_{III0} = \frac{K_{III0}^\pm}{\sqrt{a_0} \tau / \mu_1} = \frac{1}{2} (\mu_1 / \mu_2 + 1)$ (в данном случае $K'_{III0} = 1$).

На рисунке 2 графики изменения НКИН в левой (рис. 2а) и правой (рис. 2б) вершинах межфазной трещины соответствуют случаю, когда внутренняя трещина длиной $2a_1 = 0,6$ расположена параллельно к межфазной трещине при разных расстояниях от нее $y_1^0 = \{0,4; 0,8; 1,2\}$ в материале (D_1).

Из рисунка 2 следует, что наличие внутренних трещин может как увеличивать, так и уменьшать НКИН в вершинах межфазной трещины, относительно случая отсутствия внутренних трещин K'_{III0} . Максимальное уменьшение происходит в случае, когда внутренняя трещина находится вблизи к вершине межфазной трещины (рис. 2б). И наоборот, небольшое увеличение НКИН в

левой вершине межфазной трещины относительно $K'_{ш0}$ наблюдается, когда внутренняя трещина удалена от вершины межфазной трещины (рис. 2а).

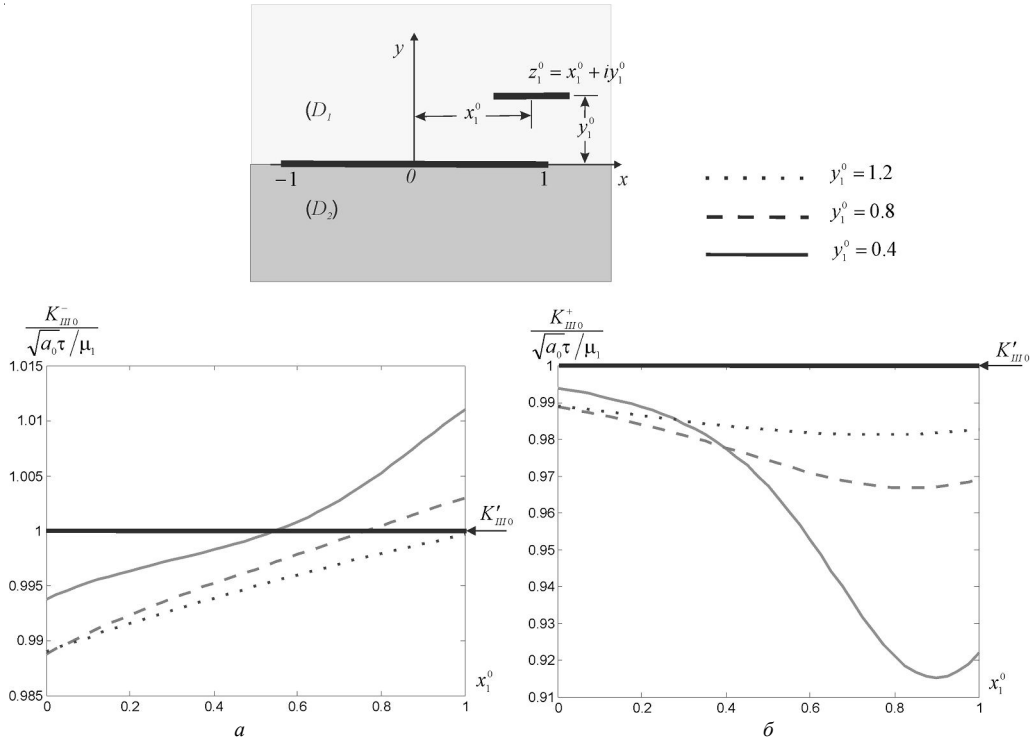


Рис. 2. Графики зависимости НКИН в левой и правой вершинах межфазной трещины от горизонтального перемещения центра внутренней трещины x_1^0

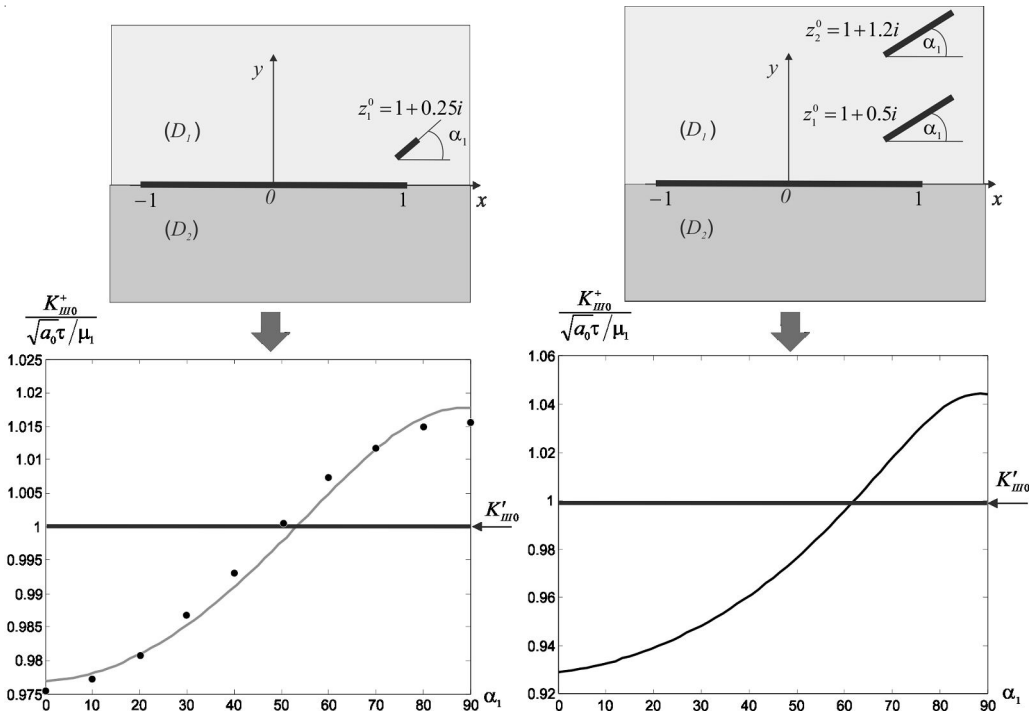


Рис. 3. Графики зависимости НКИН в правой вершине межфазной трещины от угла наклона внутренних трещин α_1 :

a – для одной внутренней микротрещины длиной $2a_1 = 0,2$;
 b – для двух внутренних трещин равной длины $2a_1 = 2a_2 = 0,6$

На рисунке 3а, б рассматривается влияние внутренних трещин на НКИН в правой вершине межфазной трещины при разных углах наклона внутренних трещин. На рисунке 3а построен график для сравнения с результатами работ [1; 5] при соответствующих параметрах. На рисунке 3б показано дополнительное влияние присутствия двух внутренних трещин на межфазную трещину при равных длинах внутренних трещин: $2a_0 = 2$, $2a_1 = 2a_2 = 0,6$.

Из рисунка 3а следует, что результаты, полученные при численном решении практически соответствуют результатам, полученным аналитически (точки на рис. 3а) для одной внутренней микротрещины в работе [1] (см. рис. 3а). Из рисунка 3б для двух внутренних трещин видно, что наличие дополнительной трещины незначительно влияет на величину НКИН межфазной трещины, и при этом характер изменения НКИН также не меняется.

Рисунок 4 выполнен для случая биматериала, когда материал (D_1) имеет свойства материала Ni, а материал (D_2) – свойства Al_2O_3 , и наоборот. Модули сдвига Ni и Al_2O_3 равны 80 и 151 ГПа соответственно. Одновременно построен график для однородного материала, то есть рассматриваются случаи, когда $\mu_1 / \mu_2 = \{0,53; 1; 1,89\}$.

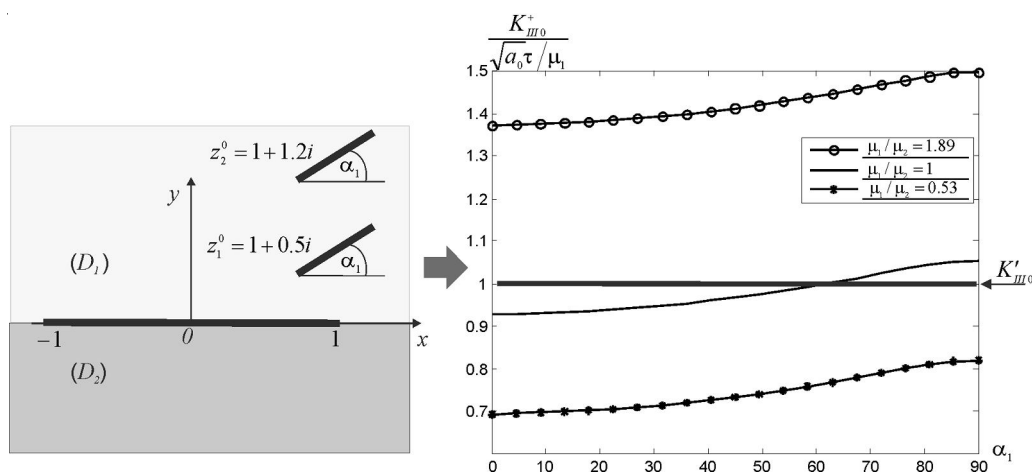


Рис. 4. Графики зависимости НКИН в правой вершине межфазной трещины от угла наклона внутренних трещин α_1

Анализ графиков на рисунке 4 показывает, что с увеличением отношения модулей сдвига материалов μ_1 / μ_2 увеличивается НКИН в правой вершине межфазной трещины и соответственно увеличивается вероятность ослабления материалов из-за наличия внутренних трещин, присутствующих в материале с большим модулем сдвига.

В таблице 1 приведен анализ численного значения НКИН в правой и левой вершинах межфазной трещины при наличии внутренних трещин, при разных сочетаниях материалов. Геометрическое расположение и параметры трещин такие же, как на рисунке 4. Рассматривается случай коллинеарных трещин, то есть $\alpha_1 = 0^0$.

D_1 / D_2 – сочетание материалов	μ_1 / μ_2	$\frac{K_{III}^+}{\sqrt{a_n} \tau / \mu_1}$	K_{III}^+	$\frac{K_{III}^-}{\sqrt{a_n} \tau / \mu_1}$	$\Delta K_{III}^+, \%$	$\Delta K_{III}^-, \%$
Ni / Al_2O_3	80/151	0,6922	0,765	0,7732	-9,51	1,07
Al_2O_3 / Ni	151/80	1,3726	1,445	1,4532	-5,01	0,57
Al_2O_3 / SiC	151/179	0,8494	0,922	0,9302	-7,87	0,89
TiC / Al	194/26	4,1579	4,23	4,2381	-1,7	0,19
Al / TiC	26/194	0,5015	0,57	0,5827	-12,0	0,02
Al_2O_3 / ZrO_2	151/64	1,6077	1,68	1,6882	-4,3	0,49
TiC / SiC	194/179	0,9675	1,04	1,0482	-6,9	0,79

$\frac{K_{III0}^+}{\sqrt{a_n \tau / \mu_1}}$ – НКИН в правой вершине межфазной трещины при наличии внутренних трещин; $\frac{K_{III0}^-}{\sqrt{a_n \tau / \mu_1}}$ – НКИН в левой вершине межфазной трещины при наличии внутренних трещин; $K'_{III0} = \frac{K_{III0}^\pm}{\sqrt{a_0 \tau / \mu_1}} = \frac{1}{2}(\mu_1 / \mu_2 + 1)$ – НКИН в правой и левой вершинах межфазной трещины при отсутствии внутренних трещин.

$$\Delta K_{III}^\pm = \frac{\frac{K_{III}^\pm}{\sqrt{a_0 \tau / \mu_1}} - K'_{III0}}{K'_{III0}} \times 100\%, \quad (21)$$

где ΔK_{III}^+ – уменьшение (отличие в процентах) НКИН в правой вершине межфазной трещины из-за наличия внутренних трещин; ΔK_{III}^- – увеличение (отличие в процентах) НКИН в левой вершине межфазной трещины из-за наличия внутренних трещин.

Из таблицы следует, что наличие внутренних трещин вблизи правой вершины межфазной трещины может значительно уменьшить величину НКИН, а в левой вершине межфазной трещины, наоборот, незначительно увеличить ее НКИН.

Заключение

Сформулирована задача о взаимодействии межфазной трещины с системой внутренних трещин в биматериале, находящемся под действием антиплоского сдвига. Получено численное решение системы сингулярных интегральных уравнений задачи, а также основная характеристика распределения напряжений около вершин трещин – коэффициенты интенсивности напряжений. Проведено сравнение коэффициентов интенсивности напряжений при аналитических и численных решениях и подтверждена их сопоставимость с помощью анализа построенных графиков.

Параметрический анализ показывает значительное влияние внутренних трещин на изменение величины коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах межфазной трещины при разных расположениях внутренних трещин и при разных сочетаниях материалов. Анализ графиков показывает, что наличие внутренних трещин может как увеличить коэффициенты интенсивности напряжений межфазной трещины, так и уменьшить их относительно коэффициентов интенсивности одной межфазной трещины. Увеличение коэффициентов интенсивности напряжений приводит к увеличению локальных деформаций и соответствующих напряжений в материале в окрестности вершин трещины. При превышении критических величин коэффициентов интенсивности напряжений для данных материалов может начаться распространение трещины вплоть до полного разрушения. В то же время уменьшение коэффициентов интенсивности напряжений из-за наличия вторичных внутренних трещин в окрестности межфазной трещины может затормозить ее рост.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Караулова, Н. Е. Взаимодействие трещин в функционально-градиентном/однородном двухкомпонентном материале под действием антиплоского сдвига / Н. Е. Караулова, В. Е. Петрова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2011. – № 1. – С. 157–167.
2. Мещерякова, Т. В. Влияние внутренних дефектов на состояние поверхности раздела между двумя упругими материалами при продольном сдвиге / Т. В. Мещерякова, В. Е. Петрова // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сб. ст. к 75-летию Е.И. Шемякина. – М. : Физматлит, 2006. – С. 461–467.
3. Ордян, М. Г. Задача теплопроводности о взаимодействии частично теплопроницаемых трещин в двухкомпонентном материале под действием теплового потока / М. Г. Ордян, В. Е. Петрова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2009. – № 1. – С. 141–149.
4. Панасюк, В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – Киев : Наук. Думка, 1976. – 445 с.

5. Петрова, В. Е. Взаимодействие магистральной трещины с микротрещинами в условиях продольного сдвига / В. Е. Петрова, В. П. Тамуж // Трехмерные задачи структурно-неоднородных сред. – Воронеж : Изд-во ВГУ, 1991. – С. 135–140.
6. Петрова, В. Е. Взаимодействие межфазной и внутренних трещин в композите, образованном из функционально-градиентного и однородного материалов и подверженном тепловому потоку / В. Е. Петрова, З. Шмаудер // Механика композитных материалов. – 2011. – Т. 47, № 1. – С. 175–190.
7. Ромалис, Н. Б. Распространение магистральной трещины в теле с распределенными микротрещинами / Н. Б. Ромалис, В. П. Тамуж // Механика композитных материалов. – 1984. – Т. 20, № 1. – С. 35–43.
8. Petrova, V. A survey of macro-microcrack interaction problems / V. Petrova, V. Tamuzs, N. Romalis // *Appl. Mech. Rev.* – 2000. – Vol. 53, № 5. – P. 117–146.
9. Petrova, V. Crack closure effects in thermal fracture of functionally graded/homogeneous bimetals with systems of cracks / V. Petrova, S. Schmauder // *ZAMM*. – 2015. – Vol. 195, № 10. – P. 1027–1036.
10. Petrova, V. FGM/homogeneous bimetals with systems of cracks under thermo-mechanical loading: Analysis by fracture criteria / V. Petrova, S. Schmauder // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2014. – Vol. 130. – P. 12–20.
11. Petrova, V. Interaction of a system of cracks with an interface crack in functionally graded/homogeneous bimetals under thermo-mechanical loading / V. Petrova, S. Schmauder // *Computational Materials Science*. – 2012. – Vol. 64. – P. 229–233.
12. Petrova, V. Modelling of thermal fracture of functionally graded/homogeneous bimaterial structures under thermo-mechanical loading / V. Petrova, S. Schmauder // *Key Engineering Materials*. – 2014. – Vol. 592–593. – P. 145–148.
13. Petrova, V. Thermal fracture of a functionally graded/homogeneous bimaterial with a system of cracks / V. Petrova, S. Schmauder // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2011. – Vol. 55. – P. 148–157.
14. Tamuzs, V. On macro-microdefect interaction / V. Tamuzs, V. Petrova // *International Applied Mechanics*. – 2002. – Vol. 38, № 10. – P. 1157–1177.

REFERENCES

1. Karaulova N.E., Petrova V.E. Vzaimodeystvie treshchin v funktsionalno-gradientnom/odnorodnom dvukhkomponentnom materiale pod deystviem antiploskovo sdviga [Interaction of Cracks in Functionally Graded/Homogeneous Bimetals Under Anti-Plane Shear Loading]. *Vestnik voronezhskovo gosudarstvenno universiteta. Seria, Fizika. Matematika*, 2011, no. 1, pp. 157-167.
2. Meshcheryakova T.V., Petrova V.E. Vliyaniye vnutrennikh defektov na sostoyaniye poverkhnosti razdela mezhdvu dvumya uprugimi materialami pri prodolnom sdvige [Influence of Internal Defects on the State of Interface Between Two Elastic Materials Under Longitudinal Shear]. *Problemy mekhaniki deformiruemyykh tverdykh tel i gornyykh porod. Sbornik statey k 75-letiyu E.I. Shemyakina*, Moscow, 2011, pp. 461-467.
3. Ordyan M.G., Petrova V.E. Zadacha teploprovodnosti o vzaimodeystvii chastichno teplopronitsaemykh treshchin v dvukhkomponentnom materiale pod deystviem teplovogo potoka [Thermal Problem of Interaction of Partially Insulated Cracks in a Bimaterial Subjected to a Heat Flux]. *Vestnik voronezhskovo gosudarstvenno universiteta. Seria, Fizika. Matematika*, 2009, no. 1, pp. 141-149.
4. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Datsyshin A.P. *Raspredeleniye napryazheniy okolo treshchin v plastinakh i obolochkakh* [Stress Distribution Around Cracks in Plates and Shells]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1976. 445 p.
5. Petrova V.E., Tamuzs V.P. Vzaimodeystvie magistralnoy treshchiny s mikrotreshchinami v usloviyakh prodolnoy sdviga [The Interaction of the Main Crack With the Microcracks Under Longitudinal Shear]. *Trekhmernyye zadachi strukturno-odnorodnykh sred*, 1991, pp. 135-140.
6. Petrova V.E., Schmauder S. Vzaimodeystviye mezhfaznoy i vnutrennikh treshchin v kompozite, obrazovannom iz funktsionalno-gradientnogo i odnorodnogo materialov i podverzhennom teplovomu potoku [Interface and Inner Crack Interactions in Functionally Graded/Homogeneous Composite Bimetals Subjected to a Heat Flux]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2011, vol. 47, no. 1, pp. 175-190.
7. Romalis N.B., Tamuzs V.P. Raspredeleniye magistralnoy treshchiny v tele s raspredelennymi mikrotreshchinami [Distribution of the Main Crack in the Body With Distributed Microcracks]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 1984, vol. 20, no. 1, pp. 35-43.
8. Petrova V., Tamuzs V., Romalis N. A Survey of Macro-Microcrack Interaction Problems. *Appl. Mech. Rev.*, 2000, vol. 53, no. 5, pp. 117-146.
9. Petrova V., Schmauder S. Crack Closure Effects in Thermal Fracture of Functionally Graded/Homogeneous Bimetals With Systems of Cracks. *ZAMM*, 2015, vol. 195, no. 10, pp. 1027-1036.

10. Petrova V., Schmauder S. FGM/homogeneous bimetals with systems of cracks under thermo-mechanical loading: Analysis by fracture criteria. *Engineering Fracture Mechanics*, 2014, vol. 130, pp. 12-20.
11. Petrova V., Schmauder S. Interaction of a system of cracks with an interface crack in functionally graded/homogeneous bimetals under thermo-mechanical loading. *Computational Materials Science*, 2012, vol. 64, pp. 229-233.
12. Petrova V., Schmauder S. Modelling of thermal fracture of functionally graded/homogeneous bimaterial structures under thermo-mechanical loading. *Key Engineering Materials*, 2014, vol. 592-593, pp. 145-148.
13. Petrova V., Schmauder S. Thermal fracture of a functionally graded/homogeneous bimaterial with a system of cracks. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2011, vol. 55, pp. 148-157.
14. Tamuzs V., Petrova V. On macro-microdefect interaction. *International Applied Mechanics*, 2002, vol. 38, no. 10, pp. 1157-1177.

INTERACTION OF CRACKS IN AN ELASTIC TWO-COMPONENT MATERIAL UNDER ANTI-PLANE SHEAR LOADING

Mikael Gareginovich Ordyan

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Theoretical and Applied Mechanics,
Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering,
omg84@mail.ru
20-letiya Oktayabrya St., 84, 394006 Voronezh, Russian Federation

Vera Evgenyevna Petrova

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor, Department of Mathematics and Applied Analysis,
Voronezh State University,
veraep@gmail.com
Universitetskaya Sq., 1, 394018 Voronezh, Russian Federation

Abstract. The paper deals with a problem of the interaction of an interface crack with internal cracks in two-component materials (bimetals) subjected to antiplane shear loading. The problem is formulated by means of the singular integral equations, where the unknowns are the derivatives of displacement jumps on the crack lines. The regular kernels of the equations contain the geometry of the problem, i.e. the coordinates of the crack centers, the inclination angles of the cracks to the interface and crack lengths. The singular integral equations were solved numerically using the quadrature formulas based on the Chebyshev polynomials. Then, the stress intensity factors Mode III (shear mode) were obtained. The stress intensity factors (SIFs) are the local characteristics of the stress-strain state in the vicinity of the crack tips. The higher SIF - the higher stresses are near the crack tips. If the SIF exceeds the critical value, the crack starts to propagate. At the same time the small crack near the interface crack tip can suppress the crack propagation and it was observed for some crack arrangements and for some combination of the materials in the considered problem.

A parametric analysis of the effects of the location and orientation of the internal cracks on the SIF in the interface crack tips was performed for different shear moduli of the constituent materials. The following combinations of the materials were considered: Al_2O_3/Ni , Al_2O_3/SiC , TiC/Al , Al_2O_3/ZrO_2 , TiC/SiC . It was shown that the SIFs in the interface crack tip can be amplified or shielded by the internal cracks, besides, the shear moduli of the constituent materials notably affect the SIFs of the interface crack.

Key words: interface, shear modulus, stress intensity factor, anti-plane shear loading, singular integral equation.