www.volsu.ru

ФИЗИКА

DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.3.4

УДК 534
ББК 22.213

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЛОИСТЫХ И СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Александр Степанович Кравчук

Доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры био- и наномеханики,
Белорусский государственный университет
ask_belarus@inbox.ru
просп. Независимости, 4, 220030 г. Минск, Республика Беларусь

Анжелика Ивановна Кравчук

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования,
Белорусский государственный университет
anzhelika.kravchuk@gmail.com
просп. Независимости, 4, 220030 г. Минск, Республика Беларусь

Иван Александрович Тарасюк

Аспирант кафедры био- и наномеханики,
Белорусский государственный университет
jege.the.owl@gmail.com
просп. Независимости, 4, 220030 г. Минск, Республика Беларусь

Аннотация. Получены уравнения продольных колебаний стержней для всевозможных комбинаций линейно упругих и реологических свойств однородных, продольно слоистых, поперечно слоистых и структурно неоднородных композиционных стержней. Использованы следующие реологические модели: уравнения линейной и нелинейной релаксации по наследственной теории (в линейном случае со старением), технической теории старения, линейное и нелинейное уравнение релаксации Фойгта. При определении эффективных свойств композиционных стержней использовались объемные доли материалов, входящих в композицию, что соответствует применению дискретной случайной величины с соответствующим распределением. В этом смысле понимаются средние значения напряжений и деформаций, возникающих в композиционных стержнях. Получено уравнение продольных колебаний нелинейно деформируемых стержней в смысле произвольного вида нелинейности. Указан способ усреднения нелинейных свойств композиционных стержней с учетом результатов предыдущих публикаций авторов. В некоторых случаях получены аналитические выражения для собственных частот колебания композиционных стержней.

Ключевые слова: слоистый материал, композиционный структурно неоднородный материал, эффективные деформационные характеристики, гипотеза Фойгта, гипотеза Рейсса, приближение Хилла, наследственная теория ползучести, техническая теория старения.

Введение

В статьях [5; 6] разработана методика решения статических задач для одноосной деформации композиционных стержней. Она успешно применена в перечисленных работах при создании обобщенной модели Винклера деформируемого слоя на случай присутствия неоднородностей и включений в его материале.

В связи с успешностью проведения указанных исследований и общеизвестностью вывода уравнения продольного колебания однородного линейно упругого стержня [1] возникла необходимость применить разработанный авторами подход [5; 6] для построения эффективных свойств среды при решении динамических задач, в частности, для композиционных линейно и нелинейно упругих стержней, а также стержней, обладающих реологическими свойствами.

Постановка задачи

Под стержнем будем понимать твердое тело призматической формы постоянного квадратного поперечного сечения площадью S и длиной λ [1]. Будем считать, что стержень расположен вдоль оси $0x$ (рис. 1). Для определенности направим ось $0y$ вверх. Кроме того, не ограничивая общности, будем считать, что одна из граней параллельна плоскости $x0y$. Будем считать, что внешняя нагрузка $\langle\sigma_x\rangle$, приложенная к сечению, является равномерно распределенной по S в любой точке стержня $x\in[0,\lambda]$, ее главный вектор $T=\langle\sigma_x\rangle\cdot S$ (интегральные значения нагрузки по сечению) действует вдоль оси $0x$. Пусть смещение любого вертикального сечения в точке $x\in[0,\lambda]$ в момент времени t будет характеризоваться функцией $u(x, t)$. Известно, что относительное удлинение $\langle\varepsilon_x\rangle$ (деформация) стержня в любой точке x определяется дифференциальным равенством $\langle\varepsilon_x\rangle=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ [1].

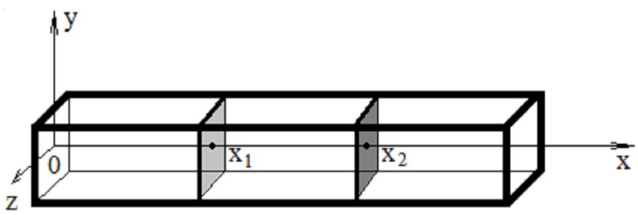

Рис. 1. Стержень квадратного сечения

Исходя из того что одномерное уравнение состояния композиционного стержня для его элемента длиной не меньшей, чем $\lambda' << \lambda$ определяется уравнением $\langle\sigma_x\rangle=\Im(\langle\varepsilon_x\rangle)$, можно записать, что разница сил ΔT, приложенных в точках x_1 и x_2, равна [1]:

$$\Delta T = \Im\left(\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x}\right)\cdot S - \Im\left(\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}\right)\cdot S = \int_{x_1}^{x_2} d\Im\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)\cdot S = \\ = \int_{x_1}^{x_2} \Im'\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dx\cdot S, \tag{1}$$

где $\Im'(\varepsilon) = \dfrac{d\Im(\varepsilon)}{d\varepsilon}$. В (1) очевидно предполагается, что $\lambda' \le (x_2 - x_1)$.

Пусть $\langle\rho\rangle = \sum_{k=1}^{n}\gamma_k \cdot \rho_k$ – средняя плотность материала стержня на интервале λ', где ρ_k – плотность k-й компоненты композиционного материала, а γ_k – ее объемная доля. Тогда вертикальная инерционная составляющая рассматриваемого участка стержня определяется формулой [1]:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\langle\rho\rangle\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx\cdot S, \tag{2}$$

где S – площадь поперечного сечения стержня.

Пусть на каждую компоненту материала композиционного стержня действуют внешние силы с плотностью $g_k(x, t)$ (действующей на единицу массы k-й компоненты композиционного материала), тогда к интегралу сил, действующих на интервале (x_1, x_2), следует добавить силу:

$$\int_{x_1}^{x_2}\langle g(x,t)\rangle dx\cdot S, \tag{3}$$

где $\langle g(x,t)\rangle = \sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot\rho_k\cdot g_k(x,t)$.

Исходя из баланса действующих сил, получаем, что инерционные силы должны быть скомпенсированы внешними и внутренними силами, тогда из (1)–(3) получаем:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\langle\rho\rangle\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx\cdot S = \int_{x_1}^{x_2}\Im'\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dx\cdot S + \int_{x_1}^{x_2}\langle g(x,t)\rangle dx\cdot S. \tag{4}$$

Уравнение (4) можно переписать в виде:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\langle\rho\rangle\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Im'\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \langle g(x,t)\rangle\right)dx = 0. \tag{5}$$

Если считать, что участок стержня (x_1, x_2) настолько мал по сравнению с длиной волны, что выполнена формула Лагранжа [3]:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\langle\rho\rangle\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Im'\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \langle g(x,t)\rangle\right)dx \approx \\ \approx \left.\left(\langle\rho\rangle\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Im'\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \langle g(x,t)\rangle\right)\right|_{x=x_0}\cdot(x_2 - x_1), \tag{6}$$

где $x_0 \in (x_1, x_2)$ – некоторая точка, то из (6) с очевидностью будет следовать локальное уравнение колебания стержня:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\Im'\left(\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)}{\langle\rho\rangle}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\langle g(x,t)\rangle}{\langle\rho\rangle}. \tag{7}$$

Отметим, что в случае, когда $\Im'(\varepsilon)$ представляет собой константу, то есть, например, в случае линейного однородного материала, сложный коэффициент приобретает общеизвестный вид [1]:

$$\frac{\Im'\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)}{\langle\rho\rangle}=\frac{E}{\rho}=a^2.$$

Применить метод Фурье к решению (7) для произвольной функции $\Im(\ )$ не представляется возможным. В этом случае его решение будет требовать применения универсальных численных методов, например разностного, и соответственно получить аналитические зависимости влияния неоднородностей на собственные частоты колебаний стержня будет невозможно.

Методика вычисления связи среднего напряжения и средней деформации композиционного стержня без учета реологических процессов

Самым простым способом решения поставленной задачи является установление связи средней деформации стержня $\langle\varepsilon_x\rangle=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ с его средним напряжением $\langle\sigma_x\rangle$.

В соответствии с общей методикой, примененной для решения задачи определения эффективных параметров стержня, рассматривается элемент композиционного материала (макроточка), на границе которого задаются воздействия, имитирующие воздействия, возникающие в стержне, то есть в данном случае рассматривается растяжение/сжатие призматического стержня на участке λ' [6].

Принцип реализации метода гомогенизации для призматического стержня квадратного сечения заключается в следующем: если армированный материал состоит из N компонент (фаз) и в среднем изотропен (например, имеет место хаотическое армирование и т. п.), то можно использовать гипотезу Фойгта для призматического стержня о том, что в простейших опытах на чистое растяжение/сжатие предполагается, что деформации по всему объему композиционного материала призматического стержня постоянны. Второй предельный случай (гипотеза Рейсса) заключается в том, что в тех же простейших экспериментах на растяжение предполагается, что напряжения по всему объему композиционного материала призматического стержня в среднем постоянны.

Полученные на основании этих гипотез формулы имеют практическую ценность, так как являются соответственно верхней и нижней оценкой истинных модулей композиционного материала [6].

Рассмотрим линейно-деформируемый композиционный структурно неоднородный материал элемента стержня λ' из n линейно-деформируемых компонент с модулями упругости E_k и объемными долями γ_k. Тогда напряжение натяжения $\langle\sigma_x\rangle$ в (8) определяется по заданной средней деформации элемента стержня $\langle\varepsilon_x\rangle$ [6]:

$$\langle\sigma_x\rangle=\langle E_x\rangle_X\cdot\langle\varepsilon_x\rangle, \tag{8}$$

где

$$\langle E_x\rangle_X=\frac{1+\left(\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot E_k\right)\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k}{E_k}}{2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k}{E_k}}.$$

Отметим, что если вместо $\langle E_x\rangle_X$ взять усреднение по Фойгту $\langle E_x\rangle_\Phi=\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\cdot E_k$ [6], то (8) даст решение для упругого продольно слоистого стержня, а если взять усреднение по Рейссу

$\langle E_x \rangle_P = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k}{E_k} \right)^{-1}$, то (8) будет физически эквивалентно решению динамической задачи усреднения для поперечно слоистого стержня.

Используя метод Фурье [1] для решения уравнения свободных колебаний ($\langle g(x,t) \rangle = 0$ в (7)), можно получить формулу для определения собственных частот колебания продольно слоистых, поперечно слоистых стержней и композиционных структурно неоднородных стержней (рис. 2):

$$\omega_i^{пр.\,с.} = \frac{i \cdot \pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\langle E_x \rangle_{Ф}}{\langle \rho \rangle}},\ \omega_i^{пон.с.} = \frac{i \cdot \pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\langle E_x \rangle_{P}}{\langle \rho \rangle}},\ \omega_i^{комп.} = \frac{i \cdot \pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\langle E_x \rangle_{X}}{\langle \rho \rangle}}\ \ (i = \overline{1, N}). \tag{9}$$

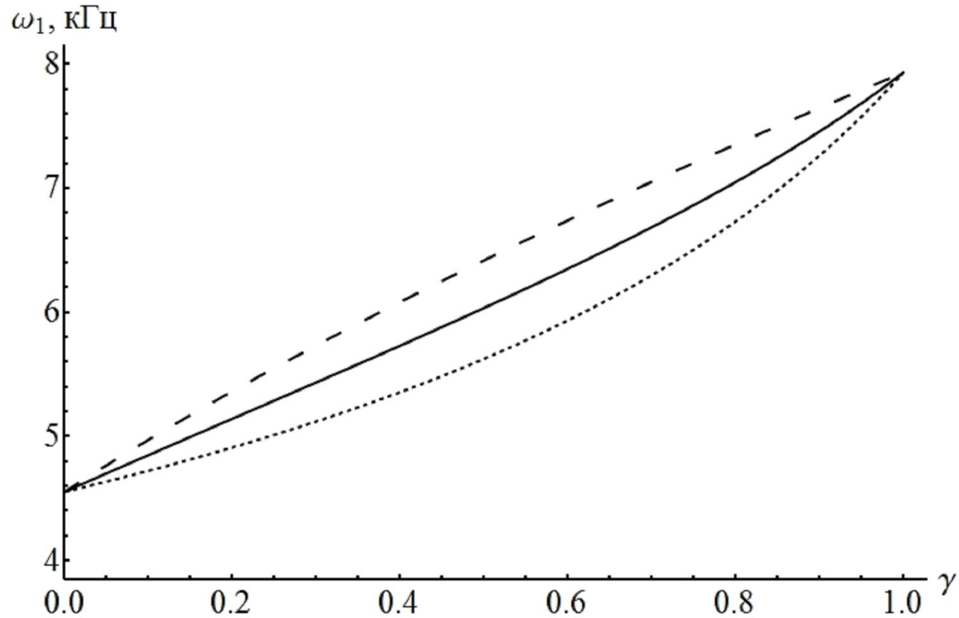

Рис. 2. Зависимость низшей собственной частоты $\omega_1^{пр.\,с.}$ продольно слоистого (штрихпунктирная линия), $\omega_i^{пон.с.}$ поперечно слоистого (пунктирная линия) и $\omega_i^{комп.}$ композиционного структурно неоднородного (непрерывная линия) стержней длиной $\lambda = 1$ м от концентрации γ первого материала в двухкомпонентной смеси ($E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $E_2 = 0,7 \cdot 10^{11}$ Па; $\rho_1 = 7850$ кг/м^3; $\rho_2 = 8330$ кг/м^3)

Из условия наличия неоднородностей в материале стержня в соответствии с характером вывода уравнения (1)–(4) можно утверждать, что количеством N достоверно вычисленных частот (9) для композиционного стержня является значение, удовлетворяющее неравенству:

$$\frac{\lambda}{N} >> \lambda',$$

то есть длина волны $\frac{\lambda}{N}$ должна быть больше размера неоднородности минимум в 10 раз.

Учет реологии однородного материала стержня

В этом случае можно получить затухание собственных частот со временем, обусловленное внутренним трением в материале. Будем использовать наследственную теорию ползучести. В рамках этой теории будем использовать уравнения релаксации вязкоупругого однородно стареющего материала с ядром релаксации $R(t, \tau)$ и мгновенным модулем упругости $E(t)$ [2; 5]:

$$\sigma_x(t) = E(t) \cdot \left(\varepsilon_x(t) - \int_0^t \varepsilon_x(\tau) \cdot R_x(t, \tau)\, d\tau \right). \tag{21}$$

В этом случае (1) можно записать для $\Delta T(t)$:

$$\Delta T = E(t)\cdot\left(\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}-\int\limits_0^t \frac{\partial u(x_1,\tau)}{\partial x}\cdot R_x(t,\tau)d\tau\right)\cdot S -$$

$$- E(t)\cdot\left(\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x}-\int\limits_0^t \frac{\partial u(x_2,\tau)}{\partial x}\cdot R_x(t,\tau)d\tau\right)\cdot S =$$

$$= E(t)\cdot\int\limits_{x_1}^{x_2} d\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\int\limits_0^t \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\cdot R_x(t,\tau)d\tau\right)\cdot S =$$

$$= E(t)\cdot\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\int\limits_0^t \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}R_x(t,\tau)d\tau\right)dx\cdot S. \tag{22}$$

Действуя далее аналогично (2)–(6) с использованием (22), получаем уравнение продольного колебания стержня с учетом реологии однородного материала:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{E(t)}{\rho}\cdot\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\int\limits_0^t \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}R_x(t,\tau)d\tau\right)+\frac{g(x,t)}{\rho}. \tag{23}$$

Отметим, что при использовании нелинейного уравнения релаксации стержня [4]:

$$\sigma_x(t)=\Im(\varepsilon_x(t))-\int\limits_0^t \Im(\varepsilon_x(\tau))\cdot R_x(t,\tau)d\tau$$

совершенно аналогично (23) можно получить уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\left(\frac{\Im'\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\int\limits_0^t \frac{\Im'\left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right)}{\rho}\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}R_x(t,\tau)d\tau\right)+\frac{g(x,t)}{\rho}.$$

Учет реологии композиционного материала стержня в соответствии с наследственной теорией ползучести

Рассмотрим продольно слоистый стержень длиной λ из n различных материалов с собственными значениями мгновенного модуля упругости $E_k(t)$ и ядрами релаксации $R_{x,\,k}(t,\tau)$, будем предполагать, что для пакета выполнена гипотеза Фойгта о равенстве для всех слоев их деформаций, тогда для каждого из слоев получаем напряжение:

$$\sigma_{x,k}(x,t)=E_k(t)\cdot\left(\langle\varepsilon_x(x,t)\rangle-\int\limits_0^t\langle\varepsilon_x(x,\tau)\rangle\cdot R_{x,k}(t,\tau)d\tau\right). \tag{24}$$

Домножая на объемные доли γ_k и суммируя по $k=\overline{1,n}$ (25), слева получаем среднестатистическое значение напряжения в смысле дискретной случайной величины, распределение которой определяется γ_k:

$$\langle\sigma_x(x,t)\rangle=\langle E(t)\rangle_\Phi\cdot\left(\langle\varepsilon_x(x,t)\rangle-\int\limits_0^t\langle\varepsilon_x(x,\tau)\rangle\cdot\langle R_x(t,\tau)\rangle_\Phi\,d\tau\right), \tag{25}$$

где

$$\left\langle \sigma_x(x,t)\right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \sigma_{x,k}(x,t),\ \left\langle E(t)\right\rangle_{\Phi} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot E_k(t),\ \left\langle R_x(t,\tau)\right\rangle_{\Phi} = \frac{1}{\left\langle E(t)\right\rangle_{\Phi}} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot E_k(t) \cdot R_{x,k}(t,\tau).$$

Перейдем к рассмотрению поперечно слоистого стержня длиной λ из n различных материалов с собственными значениями мгновенного модуля упругости $E_k(t)$ и ядрами релаксации $R_{x,k}(t,\tau)$, будем предполагать, что для пакета выполнена гипотеза Рейсса о равенстве для всех слоев их напряжений, тогда для каждого из слоев получаем напряжение:

$$\frac{\left\langle \sigma_x(x,t)\right\rangle}{E_k(t)} = \left(\varepsilon_{x,k}(x,t) - \int_0^t \varepsilon_{x,k}(x,\tau) \cdot R_{x,k}(t,\tau)\, d\tau \right). \tag{26}$$

Предположим в (26), что $\varepsilon_{x,k}(x,t) = \gamma_k \cdot \left\langle \varepsilon_x(x,t)\right\rangle$, где $\left\langle \varepsilon_x(x,t)\right\rangle$ – средняя деформация пакета, домножая (26) на γ_k и суммируя по $k = \overline{1,n}$, получаем:

$$\left\langle \sigma_x(x,t)\right\rangle = \left\langle E(t)\right\rangle_P \cdot \left(\left\langle \varepsilon_x(x,t)\right\rangle - \int_0^t \left\langle \varepsilon_x(x,\tau)\right\rangle \cdot \left\langle R_x(t,\tau)\right\rangle_P d\tau \right), \tag{27}$$

где $\left\langle E(t)\right\rangle_P = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{E_k(t)} \right)^{-1}$, $\left\langle R_x(t,\tau)\right\rangle_P = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{\,2} \cdot R_{x,k}(t,\tau)$.

Таким образом, если при выводе (25) и (27) рассматривать элемент стержня длиной λ' с использованием стандартной методики усреднения [5], можно получить для структурно неоднородного композиционного материала одноосно нагруженного стержня следующую связь между напряжениями и деформациями:

$$\left\langle \sigma_x(x,t)\right\rangle = \left\langle E(t)\right\rangle_X \cdot \left(\left\langle \varepsilon_x(x,t)\right\rangle - \int_0^t \left\langle \varepsilon_x(x,\tau)\right\rangle \cdot \left\langle R_x(t,\tau)\right\rangle_X d\tau \right), \tag{28}$$

где

$$\left\langle E(t)\right\rangle_X = \frac{1 + \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot E_k(t) \right) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{E_k(t)}}{2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{E_k(t)}},$$

$$\left\langle R_x(t,\tau)\right\rangle_X = \frac{\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot E_k(t) \cdot R_{x,k}(t,\tau) + \left\langle E(t)\right\rangle_P \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{\,2} \cdot R_{x,k}(t,\tau)}{2 \cdot \left\langle E(t)\right\rangle_X}.$$

Используя усредненные коэффициенты уравнений (25), (27), (28), по аналогии с результатами (21)–(24) можно получить уравнения затухающих колебаний для продольно слоистого, поперечно слоистого и структурно неоднородного композиционного стержня:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\left\langle E(t)\right\rangle_{\Phi}}{\langle \rho \rangle} \cdot \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} \left\langle R_x(t,\tau)\right\rangle_{\Phi} d\tau \right) + \frac{g(x,t)}{\langle \rho \rangle},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\left\langle E(t)\right\rangle_P}{\langle \rho \rangle} \cdot \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} \left\langle R_x(t,\tau)\right\rangle_P d\tau \right) + \frac{\left\langle g(x,t)\right\rangle}{\langle \rho \rangle}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\left\langle E(t)\right\rangle_X}{\langle \rho \rangle} \cdot \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} \left\langle R_x(t,\tau)\right\rangle_X d\tau \right) + \frac{\left\langle g(x,t)\right\rangle}{\langle \rho \rangle}.$$

Количество N достоверно вычисленных частот для композиционного стержня определяется неравенством:

$$\frac{\lambda}{N} >> \lambda'.$$

Инженерный способ анализа частотного спектра с учетом реологии стержня

Возможно более интересные (аналитически обозримые) результаты по сравнению с непосредственным решением уравнений (23) можно получить с использованием простейших соотношений теории ползучести по теории старения [7]. В частности, предположить, что уравнение релаксации имеет вид:

$$\sigma_x(x,t) = E \cdot \varepsilon_x(x) \cdot \Psi(t), \tag{30}$$

где E – модуль упругости стержня; $\Psi(t)$ – функция релаксации, в частности, $\Psi(t) = \frac{1}{1+\alpha \cdot t^{\beta}}$, где коэффициенты α и β зависят от температуры [7].

В этом случае уравнение (23) приобретет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \cdot \Psi(t) + \frac{g(x,t)}{\rho}. \tag{31}$$

Соответственно из (30) можно получить угасающие собственные частоты для однородного стержня (рис. 3):

$$\omega_i(t) = \frac{i \cdot \pi}{\lambda} \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \Psi(t)}.$$

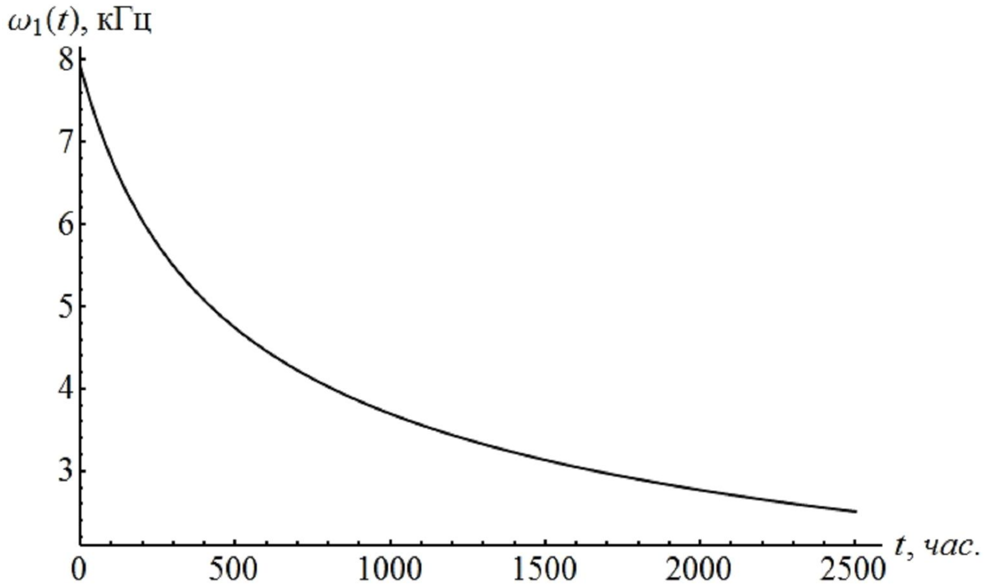

Рис. 3. Зависимость низшей собственной частоты $\omega_1(t)$ стержня длиной λ = 1 м от времени t ($E = 0{,}7 \cdot 10^{11}$; ρ = 8330 кг/м³ и функцией релаксации Малинина [7] в виде $\Psi(t) = 1/\left(1+10^{-6} \cdot t\right)$)

Совершенно элементарно выглядят обобщения (30) и (31) при получении затухания собственных частот для продольно слоистого стержня $\omega_i^{пр.с.}(t)$ (гипотеза Фойгта), поперечно слоистого стержня $\omega_i^{пол.с.}(t)$ (гипотеза Рейсса) и структурно неоднородного композиционного стержня $\omega_i^{комп.}(t)$ (гипотеза Хилла):

$$\omega_i^{пр.\,с.}(t)=\frac{i\cdot\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\langle E_x\rangle_\Phi}{\langle\rho\rangle}\langle\Psi(t)\rangle_\Phi},\ \omega_i^{пол.с.}(t)=\frac{i\cdot\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\langle E_x\rangle_P}{\langle\rho\rangle}\langle\Psi(t)\rangle_P},\ \omega_i^{комп.}(t)=\frac{i\cdot\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\langle E_x\rangle_X}{\langle\rho\rangle}\langle\Psi(t)\rangle_X}\ (i=\overline{1,N}),\quad(32)$$

где $\langle\Psi(t)\rangle_\Phi=\frac{1}{\langle E_x\rangle_\Phi}\sum_{i=1}^{n}\gamma_k\cdot E_k\cdot\Psi_k(t)$, $\langle\Psi(t)\rangle_P=\sum_{i=1}^{n}\gamma_k{}^2\cdot\Psi_k(t)$, $\langle\Psi(t)\rangle_X=\frac{\sum_{i=1}^{n}\gamma_k\cdot E_k\cdot\Psi_k(t)+\langle E_x\rangle_P\sum_{i=1}^{n}\gamma_k{}^2\cdot\Psi_k(t)}{2\langle E_x\rangle_X}$, γ_k, E_k, $\Psi_k(t)$ – концентрация, модуль упругости, функция релаксации k-й компоненты композиционного материала ($k=\overline{1,n}$), $\langle E\rangle_\Phi$, $\langle E\rangle_P$, $\langle E\rangle_X$ – средние значения модулей упругости по Фойгту, Рейссу и Хиллу, определяемые соотношениями, приведенными в абзаце после уравнения (8).

При использовании нелинейного уравнения релаксации по теории старения [7]

$$\sigma_x(x,t)=\Im(\varepsilon_x(x))\cdot\Psi(t)$$

несложно обобщить уравнение (7) до уравнения, содержащего функцию релаксации

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\Im'\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)}{\langle\rho\rangle}\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}\cdot\Psi(t)+\frac{\langle g(x,t)\rangle}{\langle\rho\rangle}.\qquad(33)$$

Методика получения нелинейной функции $\Im(\ )$ гомогенизированного n-компонентного слоистого или структурно неоднородного композиционного упругого стержня в случае применения билинейной диаграммы Прандтля или степенной функции для описания деформирования каждой из компонент изложена в работе авторов [6] для деформирования без разгрузки упруго-пластических и гиперэластичных материалов. Так как в данной статье рассматривается только упругая деформация стержня, то есть особенности разгрузки отсутствуют, то результаты [6] могут быть перенесены на этот случай с точностью до замены названий констант. При этом будет неявно использоваться гипотеза о том, что растяжение/сжатие нелинейно упругого материала стержня $\Im(\ )$ центрально симметрично относительно начала координат.

Вязкоупругое тело модели Фойгта

Одним из наиболее распространенных способов решения задач реологии является использование нелинейного релаксационного уравнения Фойгта [8], являющееся физическим аналогом параллельно закрепленных двух нелинейных упругого и вязкого элемента:

$$\sigma=\Im(\varepsilon)+\Xi\left(\dot\varepsilon\right),\qquad(34)$$

где $\Im(\ )$ – как и раньше монотонно возрастающая функция, описывающая растяжение/сжатие первого упругого элемента (в линейном случае, как всегда, $\Im'=\frac{d\Im}{d\varepsilon}=E$ – модуль упругости); $\Xi(\ )$ – монотонно возрастающая функция вязкости второго вязкого элемента (в линейном случае $\Xi'=\frac{d\Xi}{d\left(\dot\varepsilon\right)}=\eta$ – вязкость материала); $\dot\varepsilon=\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t\partial x}$.

Опуская повторение очевидных преобразований (22), получаем общее уравнение однородного нелинейно-вязкоупругого стержня по модели Фойгта:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\Im'\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)}{\rho}\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\Xi'\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)}{\rho}\frac{\partial^3u(x,t)}{\partial t\partial x^2}+\frac{g(x,t)}{\rho}.\qquad(35)$$

При использовании гипотезы о равенстве скоростей деформаций всех компонент композиционного материала в пакете из n различных компонент в случае использования линейной модели в обоих деформируемых элементах для каждого материала с номером k ($\Im_k' = E_k$, $\Xi_k' = \eta_k$) несложно из (34) получить следующие усредненные уравнения для продольно слоистого, поперечно слоистого и структурно-неоднородного композиционного материала:

$$\sigma = \langle E\rangle_\Phi \cdot \varepsilon + \langle\eta\rangle_\Phi \dot{\varepsilon},\ \sigma = \langle E\rangle_P \cdot \varepsilon + \langle\eta\rangle_P \dot{\varepsilon},\ \sigma = \langle E\rangle_X \cdot \varepsilon + \langle\eta\rangle_X \dot{\varepsilon}, \qquad (36)$$

где $\langle E\rangle_\Phi$, $\langle E\rangle_P$, $\langle E\rangle_X$ определены в абзаце после уравнения (8),

$$\langle\eta\rangle_\Phi = \sum_{k=1}^{n}\gamma_k \cdot \eta_k,\ \langle\eta\rangle_P = \langle E\rangle_P \sum_{k=1}^{n}\gamma_k^2 \cdot \frac{\eta_k}{E_k},\ \langle\eta\rangle_X = \frac{\left(\langle\eta\rangle_\Phi + \langle\eta\rangle_P\right)}{2}.$$

Используя (36) по аналогии с (35), легко получить реологические уравнения продольных колебаний композиционного стержня по линейной модели Фойгта. Например, для структурно-неоднородного композиционного стержня получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\langle E\rangle_X}{\langle\rho\rangle}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\langle\eta\rangle_X}{\langle\rho\rangle}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t \partial x^2} + \frac{\langle g(x,t)\rangle}{\langle\rho\rangle}. \qquad (37)$$

В (37), как всегда, длина структурного элемента ℓ' мала по сравнению с размерами стержня λ.

Отметим, что в случае нелинейных функций $\Im_k(\ )$ и $\Xi_k(\ )$, описываемых степенной функцией или диаграммой Прандтля для каждого k ($k = \overline{1,n}$), необходимо также воспользоваться методикой работы [6].

Заключение

Получены уравнения продольных колебаний стержня для всевозможных комбинаций линейно упругих и реологических свойств как однородных стержней, так и продольно слоистых, поперечно слоистых и структурно-неоднородных композиционных стержней с использованием приближения Хилла для эффективных свойств стержня.

Использованы следующие реологические модели: уравнения линейной или нелинейной релаксации по наследственной теории (в линейном случае со старением), технической теории старения, нелинейное и линейное уравнение релаксации Фойгта.

В некоторых случаях получены аналитические выражения для собственных частот колебания композиционных стержней.

Получены уравнения продольных колебаний однородных нелинейно упругих стержней, указан метод обобщения этих уравнений на случай композиционных материалов с учетом реологии поведения материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Араманович, И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – М. : Наука, 1969. – 288 с.

2. Арутюнян, Н. Х. Контактные задачи теории ползучести / Н. Х. Арутюнян, А. В. Манжиров. – Ереван : Ин-т механики НАН Армении, 1999. – 320 с.

3. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука, 1986. – 544 с.

4. Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.

5. Кравчук, А. С. Моделирование ползучести по наследственной теории в простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. – 2014. – № 2. – Электрон. текстовые дан. – Режим доступа: http://apriori-journal.ru/seria2/2-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf. – Загл. с экрана.

6. Кравчук, А. С. Применение простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины в механике твердого тела / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. – 2014. – № 1. – Электрон. текстовые дан. – Режим доступа: http://apriori-journal.ru/seria2/1-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf. – Загл. с экрана.

7. Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. – М. : Машиностроение, 1975. – 400 с.

8. Ржаницын, А. Р. Теория ползучести / А. Р. Ржаницын. – М. : Стройиздат, 1968. – 418 с.

REFERENCES

1. Aramanovich I.G., Levin V.I. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 288 p.

2. Arutyunyan N.H., Manzhirov A.V. *Kontaktnye zadachi teorii polzuchesti* [Contact Tasks of Creep Theory]. Yerevan, Institut Mehaniki NAN Armenii, 1999. 320 p.

3. Bronshtein I.N., Semendyaev K.A. *Spravochnik po matematike dlya ingenerov i uchashchikhsya vuzov* [Textbook on Mathematics for Ingineers and Students]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 544 p.

4. Gorshkov A.G., Starovoytov E.I., Yarovaya A.V. *Mekhanika sloistykh vyazkouprugoplastichnykh elementov konstrutsiy* [The Mechanics of Layered Viscous-Strong-Flexible Elements of Constructons]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 576 p.

5. Kravchuk A.S., Kravchuk A.I. Simulation on Creep by Hereditary Theory in a Simple Model of Constant Thickness Deformed Coating. *APRIORI. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2014, no. 2. Available at: http://apriori-journal.ru/seria2/2-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf. (accessed Nivember 16, 2014).

6. Kravchuk A.S., Kravchuk A.I. Application of a Simple Model of a Deformed Coating of Constant Thickness in Solid Mechanics. *APRIORI. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2014, no. 1. Available at: http://apriori-journal.ru/seria2/1-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf.

7. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [Applied Flexibility and Creep Theory]. Moscow, Mashinostrienie Publ., 1975. 400 p.

8. Rzhanitsyn A.R. *Teoriya polzuchesti* [Creep Theory]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1968. 418 p.

LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF LAYERED AND STRUCTURALLY HETEROGENIC COMPOSITE RODS

Aleksandr Stepanovich Kravchuk

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Professor of Department of Bio- and Nanomechanics,
Belarusian State University
ask_belarus@inbox.ru
Prosp. Nezavisimosti, 4, 22003 Minsk, Republic of Belarus

Anzhelika Ivanovna Kravchuk

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Web Technologies and Computer Modeling,
Belarusian State University
anzhelika.kravchuk@gmail.com
Prosp. Nezavisimosti, 4, 220030 Minsk, Republic of Belarus

Ivan Alexandrovich Tarasyuk

Postgraduate Student of the Department of Bio- and Nanomechanics,
Belarusian State University
jege.the.owl@gmail.com
Prosp. Nezavisimosti, 4, 220030 Minsk, Republic of Belarus

Abstract. The equations of longitudinal oscillation of a rod for all possible combinations of linearly elastic and rheological properties of homogeneous, longitudinally layered, cross-layered and structurally inhomogeneous composite rods were derived. An equation of longitudinal oscillation of nonlinear deformable rod in the sense of an arbitrary form of nonlinearity was obtained. In determining the effective properties of the composite rod of different structure the volume fractions of materials were used. It corresponds to the application of a discrete random variable with an appropriate distribution. In this sense the average values of the stresses and strains that occur in the composite rod were considered. Method of obtaining a multi-homogenized non-linear function of the laminate or structurally inhomogeneous composite elastic rod in the case of the use of bilinear Prandtl diagram or power function to describe the deformation of each component is described by the authors in earlier publication which applied to deformation without unloading of elastic-plastic and hyper elastic materials. Because in the article reader deals only with the elastic deformation of the rod, i.e. especially without unloading, then the previous results of studies can be transferred to this case is up to a changing constants names. This will implicitly use hypothesis that the tension / compression of nonlinear elastic material of rod are centrally symmetric around the origin. It was found that the Voigt approximation of effective properties of the rod corresponds to longitudinal layered structure of the rod, and the Reiss approximation corresponds to its cross-layered structure. The effective properties of structurally inhomogeneous composite rod are obtained as Hill approximations. The linear or nonlinear equations of hereditary theory (in the linear case with aging), the technical theory of aging, non-linear and linear Voigt equation of relaxation were used in the paper. According to these theories the equation of oscillations of the homogeneous rod were constructed. It is further generalized to the case of the composite rheological active rod. The density of the composite rod is calculated as the sum of the densities of the components multiplied by the corresponding volume fractions, regardless of the structure of the composite rod. In some cases, the analytical expressions for Eigen frequencies of oscillation of composite rods were obtained.

Key words: layered material, composite structurally heterogenic material, effective deformation characteristics, Voigt hypothesis, Reuss hypothesis, Hill approximation, hereditary creep theory, technical theory of aging.