



DOI: <http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.3.7>

УДК 517.951, 519.632

ББК 22.161, 22.19

МОДЕЛИРОВАНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ТРИАНГУЛИРОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ: ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СООРУЖЕНИЙ¹

Алексей Александрович Клячин

Доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
klyachin-aa@yandex.ru, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Алиса Геннадьевна Панченко

Студентка института математики и информационных технологий,
Волгоградский государственный университет
alice1051@ya.ru, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В настоящей работе вычисляется погрешность, с которой может быть подсчитан заданный интегральный функционал, если в качестве приближений взять класс кусочно-квадратичных функций, определенных над триангулированной областью. Показывается, что при некоторых геометрических условиях на триангуляцию степень погрешности будет порядка $O(h^3)$, где h — максимальная сторона треугольников триангуляции.

Ключевые слова: кусочно-квадратичная функция, площадь поверхности, аппроксимация функционала, триангуляция, минимальная поверхность.

Введение

Некоторые задачи, возникающие при проектировании архитектурных сооружений, сводятся к построению поверхностей минимальной площади. Это достаточно подробно отражено в книге [6], а также в работах [1; 7], где изучается проблема разработки тентовых тканевых конструкций. Подробный анализ приведенных там результатов приводит к задаче разработки эффективных методов приближенного решения уравнения минимальной поверхности и математическому обоснованию найденных методов в плане устойчивости и сходимости приближенных решений. Основная трудность при исследовании данных вопросов заключается в том, что уравнение минимальной поверхности является нелинейным, и поэтому традиционные методы, используемые для линейных уравнений, не пригодны. В работе [4] рассмотрен метод, который заключается в определении понятия кусочно-линейного решения минимальной поверхности над заданной триангуляцией расчетной области, и устанавливаются необходимые свойства этого решения. Именно, доказываем, что последовательность кусочно-линейных решений уравнения минимальных поверхностей будет сходиться к точному решению при условии, что функционал площади будет аппроксимироваться кусочно-линейными функциями с точностью $O(h^2)$, где h — максимальная сторона треугольников триангуляции. Однако в трехмерном случае такой степени аппроксимации недостаточно. Для обоснования сходимости приближенных решений функционал площади должен быть приближен с точностью до $O(h^3)$. В этом случае предлагается использовать кусочно-квадратичные функции. Отметим также, что в работах [3; 8] получены оценки погрешности вычисления площади поверхностей для триангуляции частного вида, построенной по прямоугольной сетке.

1. Основные результаты

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная область. Рассмотрим функционал, задаваемый интегралом

$$I(u) = \int_{\Omega} G(x, u, \nabla u) dx, \quad (1)$$

который определен для функций $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Отметим, что уравнение Эйлера — Лагранжа вариационной задачи для этого функционала имеет вид

$$Q[u] \equiv \sum_{k=1}^N (G'_{\xi_i}(x, u, \nabla u))'_{x_i} - G'_u(x, u, \nabla u) = 0. \quad (2)$$

В случае когда подынтегральное выражение $G(x, u, \nabla u) = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$, уравнением (2) является уравнение минимальной поверхности

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_{x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0.$$

Другим примером является уравнение Пуассона $\Delta u = f(x)$, которое соответствует функции $G(x, u, \nabla u) = |\nabla u|^2 + 2f(x)u(x)$.

Пусть задана многоугольная ограниченная область $\Omega \in \mathbf{R}^2$. Рассмотрим разбиение этого многоугольника на треугольники. T_1, T_2, \dots, T_N . И пусть M_1, M_2, \dots, M_p —

все вершины этих треугольников. Будем предполагать, что ни одна из точек M_i не является внутренней точкой ни одной из сторон треугольников (см. рис. 1). Через Γ_l будем обозначать стороны всех треугольников, $l = 1, 2, \dots, L$, а максимальный диаметр всех треугольников обозначим через h , то есть $h = \max_{1 \leq k \leq N} \text{diam} T_k$, где $\text{diam} F = \sup(|x - y| : x, y \in F)$, α_k — минимальный угол в треугольнике T_k , $\alpha = \min_k \alpha_k > 0$.

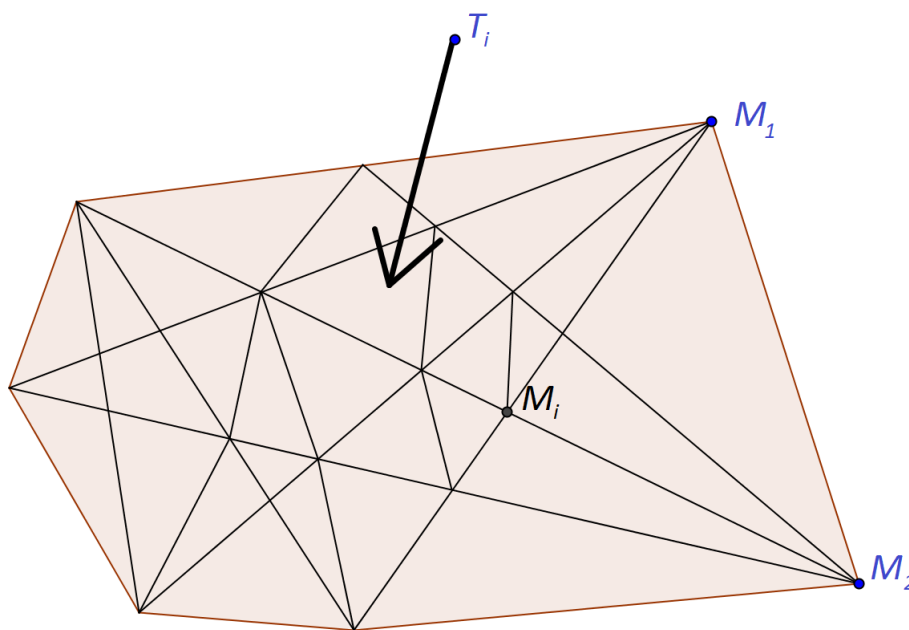


Рис. 1. Триангуляция области Ω

Для построения кусочно-квадратичной функции нужно к имеющимся вершинам треугольников M_1, M_2, \dots, M_p добавить середины всех сторон треугольников (см. рис. 2) и задать в них дополнительные значения функции u .

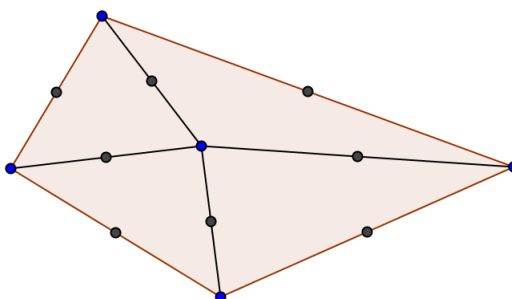


Рис. 2. Добавление середин сторон в каждом треугольнике

Пусть A_1, A_2, \dots, A_m — получившийся набор точек, включая все середины сторон и вершины всех треугольников. Для произвольного набора значений u_1, u_2, \dots, u_m определим кусочно-квадратичную функцию $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ так, что $u(A_i) = u_i, i = 1, \dots, m$ и функция u в каждом треугольнике $T_k, k = 1, \dots, N$, имеет вид: $u(x_1, x_2) = a_k x_1^2 + 2b_k x_1 x_2 + c_k x_2^2 + d_k x_1 + e_k x_2 + f_k$. Данная функция будет непрерывной в Ω . Прежде всего получим равенство, которое может быть применено для произвольного интегрального функционала. Пусть функция $f \in C^2(\bar{\Omega})$. Обозначим через f^N — кусочно-линейную функцию, такую что $f^N(M_i) = f(M_i), i = 1, 2, \dots, m$. Пусть $g^t = f^N + t(f - f^N)$. Следующее утверждение дает формулу определения погрешности приближенного вычисления функционала.

Теорема 1. *Предположим, что функция $f \in C^2(\bar{\Omega})$ и f^N — соответствующая кусочно-квадратичная функция. Предположим, что для каждого внутреннего ребра произвольным образом выбрана нормаль ν . Тогда*

$$I(f) - I(f^N) = \sum_{k=1}^N \int_{T_k} (f - f^N) \int_0^1 Q[g^t] dt dx + \int_{\partial\Omega} (f - f^N) \sum_{i=1}^n \nu_i \int_0^1 G'_{\xi_i}(x, g^t, \nabla g^t) dt dS +$$

$$+ \sum_{\text{внутр.}\Gamma} \int_{\Gamma_\ell} (f - f^N) \sum_{i=1}^n \nu_i \int_0^1 G_{\xi_i}(x, g_+^t, \nabla g_+^t) - G_{\xi_i}(x, g_-^t, \nabla g_-^t) dt dS, \quad (3)$$

где g_+^t, g_-^t — функция g^t , рассматриваемая в двух тетраэдрах с общей гранью Γ_ℓ , причем g_+^t соответствует тому тетраэдру, для которого нормаль ν является внешней.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$I(f) - I(f^N) = \sum_{k=1}^N \int_{T_k} (G(x, f, \nabla f) - G(x, f^N, \nabla f^N)) dx = \sum_{k=1}^N \int_{T_k} \int_0^1 \frac{d}{dt} (G(x, g^t, \nabla g^t)) dt dx =$$

$$= \sum_{k=1}^N \int_{T_k} \int_0^1 \left[\frac{\partial G}{\partial u}(f - f^N) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial \xi_i} (f - f^N)'_{x_i} \right] dx dt = \sum_{k=1}^N \int_{T_k} \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial u}(f - f^N) dx dt +$$

$$+ \int_0^1 \sum_{k=1}^N \int_{T_k} \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial \xi_i} (f - f^N)'_{x_i} dx dt.$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\int_{T_k} \frac{\partial G}{\partial \xi_i} (f - f^N)'_{x_i} dx.$$

Преобразуем его, воспользовавшись формулой Гаусса — Остроградского:

$$\int_{T_k} \frac{\partial G}{\partial \xi_i} (f - f^N)'_{x_i} dx = - \int_{T_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi_i}(x, g^t(x), \nabla g^t(x)) \right) (f - f^N) dx + \int_{\partial T_k} \frac{\partial G}{\partial \xi_i} (f - f^N) \nu_i ds.$$

Тогда

$$I(f) - I(f^N) = \sum_{k=1}^N \int_{T_k} (f - f^N) \left(\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial u} dx dt - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi_i}(x, g^t(x), \nabla g^t(x)) \right) dx dt \right) + \\ + \sum_{k=1}^N \int_{\partial T_k} (f - f^N) \sum_{i=1}^n \nu_i \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial \xi_i} dt ds.$$

Рассмотрим теперь отдельно интеграл по границе

$$\sum_{k=1}^N \int_{\partial T_k} (f - f^N) \sum_{i=1}^n \nu_i \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial \xi_i} dt ds = \int_{\partial \Omega} (f - f^N) \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial \xi_i} dt ds + \\ + \sum_{\text{внутр.}\Gamma_\ell} \int_{\Gamma_\ell} (f - f^N) \sum_{i=1}^n \nu_i \int_0^1 \left(\frac{\partial G}{\partial \xi_i}(x, g_+^t, \nabla g_+^t) - \frac{\partial G}{\partial \xi_i}(x, g_-^t, \nabla g_-^t) \right) dt ds,$$

где g_+^t, g_-^t — функции g^t , рассматриваемые в треугольниках с общей гранью Γ_ℓ , причем g_+^t соответствует тому треугольнику, для которого нормаль ν является внешней.

Таким образом, окончательно приходим к равенству

$$I(f) - I(f^N) = \sum_{k=1}^N \int_{T_k} (f - f^N) \int_0^1 Q[g^t] dt dx + \int_{\partial \Omega} (f - f^N) \sum_{i=1}^n \nu_i \int_0^1 G'_{\xi_i}(x, g^t, \nabla g^t) dt dS + \\ + \sum_{\text{внутр.}\Gamma_\ell} \int_{\Gamma_\ell} (f - f^N) \sum_{i=1}^n \nu_i \int_0^1 G_{\xi_i}(x, g_+^t, \nabla g_+^t) - G_{\xi_i}(x, g_-^t, \nabla g_-^t) dt dS.$$

Далее нам понадобится оценка погрешности вычисления функции и ее производных в некотором треугольнике при условии, что данная функция приближается интерполируемым многочленом [2]. Итак, имеется некоторый треугольник Δ , каждая сторона которого разбита на ℓ равных частей, и через точки разбиения проведены прямые L_q , параллельные сторонам треугольника. Стороны треугольников также будем относить к множеству прямых L_q . Обозначим через \mathcal{A} множество, состоящее из точек пересечения этих прямых, лежащих в замкнутом треугольнике Δ . (Таким образом, \mathcal{A} включает также точки разбиения сторон треугольника и вершины треугольника.) Число таких точек равно $p = 1 + 2 + \dots + (\ell + 1) = (\ell + 1)(\ell + 2)/2$. Будем обозначать их через $Q_1(x_1^1, x_2^1), \dots, Q_n(x_1^p, x_2^p)$.

Ставится задача построения многочлена степени ℓ

$$P(x_1, x_2) = \sum_{m_1+m_2 \leq \ell} a_{m_1 m_2} x_1^{m_1} x_2^{m_2},$$

принимаящего в этих точках $Q_j(x_1^j, x_2^j)$ заданные значения

$$P(x_1^j, x_2^j) = f_j, j = 1, \dots, n. \tag{4}$$

Число неизвестных коэффициентов $a_{m_1 m_2}$ также равно p , и, таким образом, соотношения (4) образуют систему p уравнений с p неизвестными. Если система (4) разрешима, то из нее могут быть найдены коэффициенты $a_{m_1 m_2}$. Для их нахождения можно выписать искомым многочлен $P(x)$ в явном виде.

Возьмем некоторую фиксированную точку Q_1 . Можно показать, что среди прямых L_q имеется ровно ℓ прямых, удовлетворяющих следующему условию. Существует не более одной вершины треугольника, такой что Q_1 и эта вершина лежат по одну сторону от такой прямой. При этом оказывается, что каждая точка из \mathcal{A} , отличная от Q_1 , лежит на одной из таких прямых. На рисунке 3 эти прямые обозначены жирными линиями.

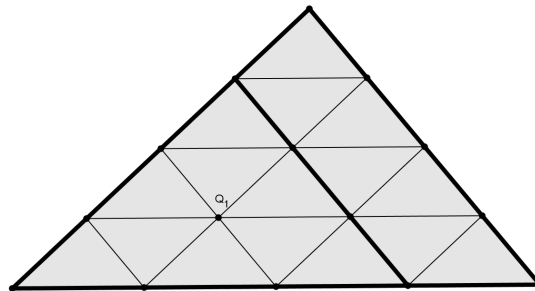


Рис. 3. Разбиение треугольника

Пусть $L_{j,1}(x_1, x_2) = 0, \dots, L_{j,\ell}(x_1, x_2) = 0$ — уравнения этих прямых. Функция

$$\varphi_j(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{L_{j,i}(x_1, x_2)}{L_{j,i}(x_1^j, x_2^i)}$$

является многочленом степени ℓ , равна 1 в точке Q_1 и 0 в остальных точках Q_i . Поэтому многочлен степени ℓ

$$P(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^p f_j \varphi_j(x_1, x_2)$$

будет искомым. В случае, когда $f_j = f(x_1^j, x_2^i)$ при всех j , многочлен $P(x_1, x_2)$ будет интерполяционным многочленом по отношению к $f(x_1, x_2)$.

Утверждение 1. Значения многочлена $P(x_1, x_2)$ на каждой из сторон треугольника зависят от значений f_j , соответствующих точкам Q_j этой стороны.

Утверждение 2. Пусть h — это длина максимальной из сторон треугольника Δ , $f_j = f(Q_j)$, f — некоторая гладкая функция,

$$M_{\ell+1} = \max_{r_1+r_2=\ell+1} \max_{\Delta} \left| \frac{\partial^{\ell+1} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2}} \right|,$$

α — наименьший из углов треугольника. Тогда справедлива оценка

$$\max_{\Delta} |f(x_1, x_2) - P(x_1, x_2)| \leq C_{\alpha, \ell} M_{\ell+1} h^{\ell+1},$$

где $C_{\alpha, \ell}$ — постоянная, зависящая только от ℓ и α .

Утверждение 3. При выполнении условия утверждения 2 для $0 < r_1 + r_2 < \ell + 1$ справедлива оценка

$$\max_{\Delta} \left| \frac{\partial^{r_1+r_2} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2}} - \frac{\partial^{r_1+r_2} P(x_1, x_2)}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2}} \right| \leq C_{\alpha, \ell} M_{\ell+1} h^{\ell+1-r_1-r_2}.$$

В частности, $\max_{\Delta} |\nabla f - \nabla P| \leq \sqrt{2} C_{\alpha, \ell} M_{\ell+1} h^{\ell}$.

2. Основные результаты

Применим доказанное равенство в теореме 1 для оценки погрешности вычисления площади графика функции

$$I(f) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2} dx_1 dx_2$$

в случае плоской области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Пусть $f \in C^2(\bar{\Omega})$. Положим $M_1 = \max_{1 \leq i \leq 2} \max_{\bar{\Omega}} |f_{x_i}(x)|$, $M_2 = \max_{1 \leq i \leq 2} \max_{\bar{\Omega}} |f_{x_i x_j}(x)|$. Получим оценку для значений оператора

$$Q[g^t] = \sum_{i=1}^2 (G'_{\xi_i}(x, g^t, \nabla g^t))_{x_i} - G'_{g^t}(x, g^t, \nabla g^t).$$

Ясно, что

$$G'_{g^t}(x, g^t, \nabla g^t) = 0,$$

так как G зависит только от ∇g^t . Тогда

$$\frac{\partial G}{\partial \xi_i} = \frac{g_{x_i}^t}{\sqrt{1 + |\nabla g^t|^2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi_i} \right) = \frac{g_{x_i x_i}^t \cdot (1 + |\nabla g^t|^2) - g_{x_i}^t \sum_{j=1}^2 g_{x_j}^t \cdot g_{x_i x_j}^t}{(1 + |\nabla g^t|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} Q[g^t] &= \sum_{i=1}^2 \frac{g_{x_i x_i}^t \cdot (1 + |\nabla g^t|^2) - g_{x_i}^t \sum_{j=1}^2 g_{x_j}^t \cdot g_{x_i x_j}^t}{(1 + |\nabla g^t|^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \sum_{i,j=1}^2 g_{x_i x_j}^t \left(\frac{(1 + |\nabla g^t|^2) \delta_{ij} - g_{x_i}^t g_{x_j}^t}{(1 + |\nabla g^t|^2)^{\frac{3}{2}}} \right). \end{aligned}$$

Тогда для всех $i, j = 1, 2$ имеем

$$\left| g_{x_i x_j}^t \cdot \frac{(1 + |\nabla g^t|^2) \delta_{ij} - g_{x_i}^t g_{x_j}^t}{(1 + |\nabla g^t|^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \leq$$

$$\leq |g_{x_i x_j}^t| \cdot \left((1 + |\nabla g^t|^2) + |g_{x_i}^t g_{x_j}^t| \right) \leq M_2 (1 + (M_1 + \sqrt{2} C_{\alpha,2} M_3 h^2)^2).$$

Поэтому

$$|Q[g^t]| = \left| \sum_{i,j=1}^2 \frac{(1 + |\nabla g^t|^2) \delta_{ij} - g_{x_i}^t g_{x_j}^t}{(1 + |\nabla g^t|^2)^{\frac{3}{2}}} g_{x_i x_j}^t \right| \leq 4M_2 (1 + (M_1 + \sqrt{2} C_{\alpha,2} M_3 h^2)^2).$$

Далее ясно, что

$$\left| \sum_{i=1}^2 v_i \int_0^1 \frac{g_{x_i}^t dt}{\sqrt{(1 + |\nabla g^t|^2)}} \right| \leq |v| \cdot \left| \frac{\nabla g^t}{\sqrt{(1 + |\nabla g^t|^2)}} \right| \leq 1.$$

Зафиксируем внутреннее ребро Γ_ℓ . Обозначим через T_+ и T_- треугольники, соприкасающиеся по этому ребру. Тогда на Γ_ℓ выполнено $\nabla g_+^t - \nabla g_-^t = (\nabla f^N)|_{T_+} - (\nabla f^N)|_{T_-}$. Поэтому

$$\left| \frac{\nabla g_+^t}{\sqrt{(1 + |\nabla g_+^t|^2)}} - \frac{\nabla g_-^t}{\sqrt{(1 + |\nabla g_-^t|^2)}} \right| \leq 2|\nabla g_+^t - \nabla g_-^t| = 2|(\nabla f^N)|_{T_+} - (\nabla f^N)|_{T_-}|.$$

Воспользуемся утверждением 3, где показано, что градиенты функции f^N и f удовлетворяют неравенству $|\nabla f - \nabla f^N| \leq \sqrt{2} C_{\alpha,2} M_3 h^2$. Тогда

$$\sum_{i=1}^2 \left| \frac{(g_+^t)_{x_i}}{\sqrt{(1 + |\nabla g_+^t|^2)}} - \frac{(g_-^t)_{x_i}}{\sqrt{(1 + |\nabla g_-^t|^2)}} \right| \leq 4\sqrt{2} C_{\alpha,2} M_3 h^2.$$

Положим $4\sqrt{2} C_{\alpha,2} M_3 h^2 = C_1$. Применяя все приведенные неравенства к равенству (3), получим

$$|I(f^N) - I(f)| \leq \max_{\Omega} |f - f^N| \left(4M_2 (1 + (M_1 + \sqrt{2} C_{\alpha,2} M_3 h^2)^2) |\Omega| + |\partial\Omega| + C_1 h^2 \sum_{\text{внутр.}\Gamma_\ell} |\Gamma_\ell| \right),$$

где $|\Omega|$ — площадь фигуры Ω , а $|\partial\Omega|$ — ее периметр. Мы можем предположить, что триангуляция обладает таким свойством, что найдется постоянная C_2 , независимая от h , для которой $\sum_{\text{внутр.}\Gamma_\ell} |\Gamma_\ell| h \leq C_2$. Таким образом, мы пришли к неравенству

$$|I(f^N) - I(f)| \leq C_3 \max_{\Omega} |f^N - f|,$$

где

$$C_3 = 4M_2 (1 + (M_1 + \sqrt{2} C_{\alpha,2} M_3 h^2)^2) |\Omega| + |\partial\Omega| + C_1 C_2 h.$$

Далее несложно показать, что из Утверждения 2 следует, что $|f^N - f| \leq C_{\alpha,2} M_3 h^3$. Таким образом, окончательно приходим к следующей оценке

$$|I(f^N) - I(f)| \leq C_{\alpha,2} C_3 M_3 h^3.$$

Рассмотрим следующий пример, в котором мы вычисляем постоянные C_2 и α , зависящие от триангуляции. Пусть $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ и $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b, c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$, где $x_i = a + i(b - a)/m, y_j = c + j(d - c)/m$. Тогда Ω разбивается

на прямоугольники $\Omega_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $0 \leq i \leq m-1$, $0 \leq j \leq m-1$. Далее разделим каждый такой прямоугольник правой или левой диагональю. Тогда

$$\alpha = \min \left(\arctg \left(\frac{d-c}{b-a} \right), \arctg \left(\frac{b-a}{d-c} \right) \right),$$

$$C_2 = \frac{m-1}{m} D((b-a) + (d-c)) + D^2 \leq D(D + P/2),$$

где $D = \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}$ — длина диагонали прямоугольника, а $P = 2(b-a + d-c)$ — его периметр.

Заключение

В данной работе рассматривался вопрос об оценки точности кусочно-квадратичной аппроксимации площади C^2 -гладкой поверхности. В результате была получена оценка степени приближения $|I(f^N) - I(f)| \leq C_{\alpha,2} C_3 M_3 h^3$. Таким образом, порядок аппроксимации оказался выше на порядок, чем в случае, рассмотренном в работе [5].

ПРИМЕЧАНИЕ

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-41-02517-р_волжье_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдюшев, А. А. Проектирование непологих оболочек минимальной поверхности / А. А. Абдюшев, И. Х. Мифтахутдинов, П. П. Осипов // Известия КазГАСУ, Строительные конструкции, здания и сооружения. — 2009. — № 2 (12). — С. 86–92.
2. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. — М. : Бином, 2003. — 632 с.
3. Гацунаев, М. А. Приближенное вычисление площади поверхности / М. А. Гацунаев // Материалы Научной сессии, г. Волгоград, 26–30 апр. 2010 г. Вып. 6. Математика и информационные технологии. — 2010. — № 6. — С. 66–70.
4. Клячин, А. А. О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности / А. А. Клячин, М. А. Гацунаев // Уфимский математический журнал. — 2014. — № 6 (3). — С. 3–16.
5. Клячин, А. А. Оценка погрешности вычисления интегральных функционалов с помощью кусочно-линейных функций / А. А. Клячин // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2015. — № 1 (26). — С. 6–12.
6. Михайленко, В. Е. Конструирование форм современных архитектурных сооружений / В. Е. Михайленко, С. Н. Ковалев. — Киев : Будівельник, 1978. — 138 с.
7. Попов, Е. В. Геометрическое моделирование тентовых тканевых конструкций с помощью метода натянутых сеток / Е. В. Попов // GraphiCon'2001. — 2001. — С. 140–144.
8. Rasmussen, A. F. Extrapolation methods for approximating arc length and surface area / A. F. Rasmussen, M. S. Floater // Numerical Algorithms. — 2007. — № 44 (3). — P. 235–248.

REFERENCES

1. Abdyushev A.A., Miftakhutdinov I.Kh., Osipov P.P. Proektirovanie nepologikh obolochek minimalnoy poverkhnosti [Design of Shallow Shells Minimal Surface]. *Izvestiya KazGASU, Stroitelnye konstruktsii, zdaniya i sooruzheniya*, 2009, no. 2 (12), pp. 86-92.

2. Bakhvalov N.S. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Binom Publ., 2003. 632 p.
3. Gatsunaev M.A. Priblizhennoe vychislenie ploshchadi poverkhnosti [Approximate Calculation of the Surface Area]. *Materialy Nauchnoy sessii, g. Volgograd, 26–30 apr. 2010 g. Vyp. 6. Matematika i informatsionnye tekhnologii*, 2010, no. 6, pp. 66-70.
4. Klyachin A.A., Gatsunaev M.A. O ravnomernoy skhodimosti kusochno-lineynykh resheniy uravneniya minimalnoy poverkhnosti [On Uniform Convergence of Piecewise Linear Solutions of the Minimal Surface Equation]. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal* [Ufa Mathematical Journal], 2014, no. 6 (3), pp. 3-16.
5. Klyachin A.A. Otsenka pogreshnosti vychisleniya integralnykh funktsionalov s pomoshchyu kusochno-lineynykh funktsiy [C^1 -Approximation of the Level Surfaces of Functions Defined on Irregular Grids]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2015, no. 1 (26), pp. 6-12.
6. Mikhaylenko V.E., Kovalev S.N. *Konstruirovaniye form sovremennykh arkhitekturnykh sooruzheniy* [Designing Forms of Modern Architectural Structures]. Kiev, Budivelnik Publ., 1978. 138 p.
7. Popov E.V. Geometricheskoe modelirovaniye tentovykh tkanevykh konstruksiy s pomoshchyu metoda natyanutykh setok [Geometric Modeling of Tissue Awning Structures By Method Spanned Nets]. *GraphiCon'2001*, 2001, pp. 140-144.
8. Rasmussen A.F., Floater M.S. Extrapolation Methods for Approximating Arc Length and Surface Area. *Numerical Algorithms*, 2007, no. 44 (3), pp. 235-248.

MODELING MINIMUM TRIANGULATED SURFACES: ERROR ESTIMATION CALCULATING THE AREA OF THE DESIGN OF FACILITIES

Aleksey Aleksandrovich Klyachin

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Head of Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
klyachin-aa@yandex.ru, matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Alisa Gennadyevna Panchenko

Student, Institute of Mathematics and Information Technologies,
Volgograd State University
alice1051@ya.ru, matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. Consider the functional given by the integral

$$I(u) = \int_{\Omega} G(x, u, \nabla u) dx, \quad (1)$$

defined for functions $u \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Note that the Euler-Lagrange equation of the variational problem for this functional has the form

$$Q[u] \equiv \sum_{i=1}^n (G'_{\xi_i}(x, u, \nabla u))'_{x_i} - G'_u(x, u, \nabla u) = 0. \quad (2)$$

Where $G(x, u, \nabla u) = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$. Equation (2) is the equation of a minimal surface. Another example is the Poisson equation $\Delta u = f(x)$, which corresponds to the function $G(x, u, \nabla u) = |\nabla u|^2 + 2f(x)u(x)$.

Next, we examine the question of the degree of approximation of the functional (1) by piecewise quadratic functions. For such problems lead the convergence of variational methods for some boundary value problems. Note that the derivatives of a continuously differentiable function approach derived piecewise quadratic function with an error of the second order with respect to the diameter of the triangles of the triangulation. We obtain that the value of the integral (1) for functions in C^2 is possible to bring a greater degree of accuracy. Note also that in [3;8] estimates the error calculation of the surface triangulation, built on a rectangular grid.

Key words: piecewise quadratic function, area of a surface, the approximation of functional, triangulation, minimal surface.