



www.volsu.ru

**МАТЕМАТИКА**

---

---

**ТРУДЫ III МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ  
«ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ»**

DOI: <https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.4.1>

УДК 512.62+004.421.6

ББК 22.143+22.21

**РЕЗОНАНСНОЕ МНОЖЕСТВО МНОГОЧЛЕНА  
И ПРОБЛЕМА ФОРМАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ**

**Александр Борисович Батхин**

Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник,  
Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики  
им. М.В. Келдыша Российской академии наук

batkhin@gmail.com

Миусская пл., 4, 125047 г. Москва, Российская Федерация

**Аннотация.** Изучается резонансное множество вещественного многочлена, то есть множество всех значений пространства коэффициентов, при которых последний имеет соизмеримые корни. Предлагается конструктивный алгоритм построения полиномиальной параметризации резонансного множества в пространстве коэффициентов многочлена. Структура резонансного множества многочлена степени  $n$  описывается в терминах разбиения числа  $n$ . Основные алгоритмы, описанные в работе, реализованы в виде библиотеки в системе компьютерной алгебры *Maple*. Приведено описание резонансного множества кубического многочлена, а также дано приложение полученных результатов к решению проблемы формальной устойчивости положения равновесия многопараметрической системы Гамильтона с тремя степенями свободы.

**Ключевые слова:** теория исключения, субрезультант, компьютерная алгебра, формальная устойчивость положения равновесия, резонансное множество.

## Введение

Во многих прикладных задачах возникает ситуация, когда для некоторого многочлена  $f(x)$  необходимо сформулировать условия на его коэффициенты, при выполнении которых этот многочлен имеет соизмеримые корни. Так, например, условие целочисленной соизмеримости (кратности) корней характеристического многочлена матрицы линейной части уравнений движения вблизи положения равновесия выделяет в пространстве коэффициентов многочлена (или параметров уравнений движения) многообразия, на которых имеется резонанс между собственными частотами колебаний. Случай, когда многочлен  $f(x)$  имеет корень кратности  $k > 1$ , является частным случаем описанной выше ситуации.

Эта статья продолжает исследования автора [4–6] по описанию структуры и построению параметрического представления дискриминантного множества  $\mathcal{D}(f_n)$  многочлена

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n \quad (1)$$

$n$ -й степени с вещественными коэффициентами. Вещественное  $n$ -мерное пространство  $\Pi \equiv \mathbb{R}^n$  его коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , как и ранее, назовем *пространством коэффициентов* многочлена (1).

**Определение 1.** Пару корней  $t_i, t_j$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ , многочлена (1) назовем  $p : q$ -соизмеримой, если  $t_i : t_j = p : q$ .

**Замечание 1.** Здесь и далее предполагаем, что  $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , то есть исключаем случай, когда один из корней  $t_i$  или  $t_j$  равен нулю, поскольку нулевой корень соизмерим с любым другим корнем.

**Замечание 2.** Если у многочлена (1) есть пара  $p : q$ -соизмеримых корней, то есть и пара  $q : p$ -соизмеримых корней. Следовательно, далее предполагаем, что коэффициент соизмеримости  $p : q$  удовлетворяет условию  $|p/q| \geq 1$ .

**Определение 2.** Резонансным множеством  $\mathcal{R}(f_n)$  многочлена  $f_n(x)$  назовем множество всех точек пространства коэффициентов  $\Pi$ , в которых  $f_n(x)$  имеет хотя бы пару соизмеримых корней. Для фиксированного коэффициента соизмеримости, задаваемого рациональным числом  $p/q \in \mathbb{Q}$ , соответствующее резонансное множество обозначим через  $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$ , то есть

$$\mathcal{R}_{p:q}(f_n) = \{P \in \Pi : \exists i, j \in 1, \dots, n, \quad t_i : t_j = p : q\}. \quad (2)$$

Очевидно, что дискриминантное множество  $\mathcal{D}(f_n)$ , то есть множество, на котором многочлен (1) имеет кратные корни, является частным случаем резонансного множества (2) для значения коэффициента соизмеримости  $p : q = 1$ .

Цель данной статьи — разработать конструктивный алгоритм вычисления параметрического представления всех компонент резонансного множества  $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$  приведенного вещественного многочлена  $f_n(x)$ .

Статья состоит из введения, трех разделов и заключения. В разделе 1 формулируется условие на коэффициенты существования соизмеримых корней многочлена (1) в терминах обобщенных субдискриминантов, которые с точностью до множителя суть субрезультанты пары многочленов  $f_n(px)$  и  $f_n(qx)$ . В разделе 2 дано описание иерархической структуры резонансного множества  $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$ , указана связь этой структуры с

задачей разбиения натурального числа  $n$ , описан алгоритм построения параметрического представления компонент этого множества и дано описание программной библиотеки для системы компьютерной алгебры **Maple**. В заключительном разделе 3 приведено описание резонансного множества кубического многочлена, а также дано приложение полученных результатов к решению проблемы формальной устойчивости положения равновесия многопараметрической системы Гамильтона с тремя степенями свободы.

Предварительные результаты статьи докладывались на международных конференциях: Polynomial Computer Algebra-2016, г. Санкт-Петербург, 18–23 апреля 2016 г., III Международная конференция «Геометрический анализ и его приложения», г. Волгоград, 30 мая – 3 июня 2016 г. и опубликованы в препринте автора [7].

### 1. Условие $p : q$ -соизмеримости корней многочлена $f_n(x)$

Пусть многочлен  $f_n(x)$  имеет пару  $p : q$ -соизмеримых корней. Это эквивалентно тому, что два многочлена  $f_n(px)$  и  $f_n(qx)$  имеют общий корень, или, другими словами,  $\text{Res}_x(f_n(px), f_n(qx)) = 0$ , где  $\text{Res}_x(g, h)$  — результат многочленов  $g(x)$  и  $h(x)$ , вычисленный относительно переменной  $x$ .

**Определение 3.** Пусть

$$g(x) = \prod_{i=1}^n (x - t_i), \quad h(x) = \prod_{i=1}^m (x - u_i)$$

суть два приведенных многочлена степени  $n$  и  $m$  соответственно. Тогда их результат относительно переменной  $x$  вычисляется по формуле

$$\text{Res}_x(g, h) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (t_i - u_j).$$

Поскольку при  $p = q = 1$  многочлены  $f_n(px)$  и  $f_n(qx)$  имеют  $n$  общих корней, то результат  $\text{Res}_x(f_n(px), f_n(qx))$  делится на множитель  $(p - q)^n$ . В силу замечания 1, результат  $\text{Res}_x(f_n(px), f_n(qx))$  делится на свободный член  $a_n$  многочлена (1). Таким образом, указанный выше результат представим в виде

$$\text{Res}_x(f_n(px), f_n(qx)) = a_n(p - q)^n \text{GD}_{p,q}(f),$$

где  $\text{GD}_{p,q}(f_n)$  — введенный в [1; 3] *обобщенный дискриминант* многочлена  $f_n(x)$ . Термин «обобщенный дискриминант» выбран в связи с тем, что при стремлении коэффициента соизмеримости  $p : q \rightarrow 1$ , значение обобщенного дискриминанта  $\text{GD}_{p,q}(f_n)$  стремится к значению дискриминанта  $D(f_n)$  многочлена (1).

У многочлена (1) может быть не одна пара  $p : q$ -соизмеримых корней. Для полного исследования структуры  $p : q$ -соизмеримых корней введем несколько вспомогательных понятий.

**Определение 4.** Цепочкой  $\text{Ch}_{p:q}^{(k)}(t_i)$   $p : q$ -соизмеримых корней длины  $k$  (кратко цепочкой корней) назовем отрезок длины  $k$  геометрической прогрессии с основанием  $t_i$  и знаменателем  $p/q$ , каждый член которой является корнем этого же многочлена. Основание прогрессии  $t_i$  назовем порождающим корнем соответствующей цепочки.

**Замечание 3.** Для того чтобы коэффициенты полиномиальных объектов (многочленов, субрезультантов, параметрических представлений компонентов резонансного множества  $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$  и др.) были представлены в виде многочленов, а не рациональных функций от чисел  $p$  и  $q$ , будем в цепочке корней длины  $k$  в определении 4 использовать величину  $q^{k-1}t_i$  в качестве порождающего корня.

Резонансное множество  $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$  для каждого фиксированного коэффициента соизмеримости  $p : q$  состоит из конечного числа многообразий  $\mathcal{V}_l$ , на каждом из которых многочлен  $f_n(x)$  имеет  $l$  цепочек корней  $\text{Ch}_{p:q}^{(k_i)}(t_i)$  с различными порождающими корнями  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Суммарная длина этих цепочек корней равна степени  $n$  многочлена  $f_n(x)$ .

Для описания каждого из многообразий  $\mathcal{V}_l$  нужно знать структуру корней наибольшего общего делителя многочленов  $f_n(px)$  и  $f_n(qx)$ , то есть многочлена

$$\tilde{f}_{p:q}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{gcd}(f_n(px), f_n(qx)). \quad (3)$$

Пусть  $d = \deg \tilde{f}_{p:q} > 0$ , тогда корни многочлена  $\tilde{f}_{p:q}(x)$  дают информацию о кратных корнях исходного многочлена (1): каждой цепочке корней  $\text{Ch}_{p:q}^{(k)}(t_i)$  многочлена  $\tilde{f}_{p:q}(x)$  соответствует цепочка корней  $\text{Ch}_{p:q}^{(k+1)}(t_i)$  многочлена  $f_n(x)$ . Структуру корней многочлена удобно определить с помощью субрезультантов [12; 17] пары многочленов  $f_n(px)$  и  $f_n(qx)$ .

Известно много методов вычисления результата пары многочленов. Их обзор дан, например, в [4; 12]. Здесь ограничимся методом Сильвестра.

**Определение 5.** Матрицей Сильвестра  $\text{Sylv}(f, g)$  двух многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ , для которых  $n = \deg f(x)$  и  $m = \deg g(x)$ , называется квадратная матрица размера  $(n + m)$ , строки которой суть векторы, составленные из коэффициентов многочленов

$$x^{m-1}f(x), x^{m-2}f(x), \dots, xf(x), f(x), g(x), xg(x), \dots, x^{n-2}g(x), x^{n-1}g(x)$$

в базисе  $x^{n+m-1}, \dots, x, 1$ .

Определение  $k$ -го субрезультанта пары многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  дадим с помощью иннора [10] матрицы  $\text{Sylv}(f, g)$ .

**Определение 6.** Пусть  $\mathbf{M}_n$  — квадратная матрица размера  $n \times n$ . Тогда матрица  $\mathbf{M}_{n-k}$ ,  $k < [n/2]$ , полученная вычеркиванием по  $k$  крайних строк и столбцов с обеих сторон исходной матрицы  $\mathbf{M}_n$ , называется ее  $k$ -м иннором.

**Определение 7.**  $k$ -м субрезультантом  $\text{Res}_x^{(k)}(f, g)$  многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  называется определитель  $k$ -го иннора матрицы Сильвестра  $\text{Sylv}(f, g)$ .

Запишем матрицу Сильвестра  $\text{Sylv}(f_n(px), f_n(qx))$  размера  $2n \times 2n$  для многочленов  $f_n(px)$  и  $f_n(qx)$ :

$$\begin{aligned} \text{Sylv}(f_n(px), f_n(qx)) &= \\ &= \begin{pmatrix} p^n & a_1 p^{n-1} & \cdots & a_{n-2} p^2 & a_{n-1} p & a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p^n & \cdots & a_{n-3} p^3 & a_{n-2} p^2 & a_{n-1} p & a_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p^n & a_1 p^{n-1} & a_2 p^{n-2} & a_3 p^{n-3} & \cdots & a_{n-1} p & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & q^n & a_1 q^{n-1} & a_2 q^{n-2} & a_3 q^{n-3} & \cdots & a_{n-1} q & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & q^n & \cdots & a_{n-3} q^3 & a_{n-2} q^2 & a_{n-1} q & a_n & \cdots & 0 & 0 \\ q^n & a_1 q^{n-1} & \cdots & a_{n-2} q^2 & a_{n-1} q & a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Матрица (4) имеет  $n - 1$  нетривиальный иннор. Очевидно, что в силу ее структуры каждый из определителей этих инноров, то есть соответствующий субрезультант, раскладывается на три множителя. Можно показать, что для  $k$ -го субрезультанта многочленов  $f_n(px)$  и  $f_n(qx)$  имеет место следующее разложение:

$$\text{Res}_x^{(k)}(f_n(px), f_n(qx)) = (p - q)^{n-k} (pq)^{k(n-k)} \text{GD}_{p:q}^{(k)}(f_n). \quad (5)$$

**Определение 8.** Назовем  $k$ -м обобщенным субдискриминантом  $\text{GD}_{p:q}^{(k)}(f_n)$  многочлена  $f_n(x)$  для коэффициента соизмеримости  $p : q$  третий нетривиальный множитель в формуле (5).

Пусть многочлен  $f_n(x)$  имеет цепочку  $p : q$ -соизмеримых корней длины  $k$  с порождающим корнем  $t$ , то есть в силу замечания 3 он имеет вид

$$f_n(x) = u(x) \prod_{i=0}^{k-1} (x - p^i q^{k-1-i} t).$$

Здесь многочлен  $u(x)$  степени  $n - k$  не имеет  $p : q$ -соизмеримых с  $t$  корней. Тогда

$$\begin{aligned} f_n(px) &= u(px) (px - q^{k-1} t) p^{k-1} \prod_{i=0}^{k-2} (x - p^i q^{k-2-i} t), \\ f_n(qx) &= u(qx) (qx - p^{k-1} t) q^{k-1} \prod_{i=0}^{k-2} (x - p^i q^{k-2-i} t). \end{aligned}$$

Следовательно, многочлен  $\tilde{f}_{p,q}$  из формулы (3) имеет цепочку  $p : q$ -соизмеримых корней длины  $k - 1$  с порождающим корнем  $q^{k-2} t$ .

В силу приведенных выше рассуждений, а также теоремы 3.3 из [12], имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** Для того чтобы  $\deg \tilde{f}_{p,q}(x) = d$ , необходимо и достаточно, чтобы в последовательности  $i$ -х обобщенных субдискриминантов  $\text{GD}_{p:q}^{(i)}(f_n)$  первым отличным от нуля обобщенным субдискриминантом был субдискриминант  $\text{GD}_{p:q}^{(d)}(f_n)$  с номером  $d$ .

Введем полиномиальные идеалы  $\mathcal{I}_{p;q}^{(l)}(f_n)$ , состоящие из первых  $l$  обобщенных суб-дискриминантов  $GD_{p;q}^{(l)}(f_n)$ :

$$\mathcal{I}_{p;q}^{(l)}(f_n) = \left\{ GD_{p;q}^{(i)}(f_n), i = 0, \dots, l-1 \right\}.$$

Тогда согласно теореме 1 нули идеала  $\mathcal{I}_{p;q}^{(l)}(f_n)$  образуют множество, на котором многочлен  $f_n(x)$  имеет в точности  $k < n$  различных цепочек  $p : q$ -соизмеримых корней.

## 2. Параметризация резонансного множества $\mathcal{R}_{p;q}(f_n)$

Множество  $\mathcal{R}_{p;q}(f_n)$  состоит из алгебраических многообразий  $\mathcal{V}_l$  размерностей  $l$ ,  $1 \leq l \leq n-1$ . Общее число этих многообразий, а также число различных многообразий  $\mathcal{V}_l$ , имеющих фиксированную размерность  $l$ , зависит от числа разбиений  $p(n)$  степени  $n$  многочлена  $f_n(x)$ .

### 2.1. Число компонент резонансного множества $\mathcal{R}_{p;q}(f_n)$

Напомним здесь основные определения, связанные с разбиением натуральных чисел; подробнее см. [4; 13; 16; 20].

**Определение 9.** Разбиением  $\lambda$  натурального числа  $n$  называется всякая конечная неубывающая последовательность натуральных чисел  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k$ , для которой

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = n.$$

Каждое из разбиений запишем в виде  $\lambda = [1^{n_1} 2^{n_2} 3^{n_3} \dots]$ , где  $n_i$  — число повторений слагаемого  $i$  в разбиении, то есть  $\sum_{i=1}^k i n_i = n$ .

Основные числовые функции, связанные с множеством разбиений числа  $n$ , следующие:

- Функция  $p(n)$  задается числом всех разбиений числа  $n$  (последовательность A000041 в [20]).
- Функция  $p_k(n)$  задается числом всех разбиений  $n$  на  $k$  слагаемых.
- Функция  $q(n)$  задается числом всех разбиений  $n$  на различные слагаемые (последовательность A000009 в [20]).
- Функция  $q_k(n)$  задается числом всех разбиений  $n$  на  $k$  различных слагаемых.

Очевидно, что  $p(n) = \sum_{k=1}^n p_k(n)$  и  $q(n) = \sum_{k=1}^n q_k(n)$ .

Рассмотрим разбиение  $\lambda = [1^{n_1} 2^{n_2} \dots i^{n_i} \dots]$  натурального числа  $n$ . Величина  $i$  в разбиении  $\lambda$  задает длину цепочки  $p : q$ -соизмеримых корней для соответствующего порождающего корня  $t_i$ , а  $n_i$  — число различных порождающих корней, задающих цепочку корней длины  $i$ . Тогда  $l = \sum_i n_i$  есть число различных порождающих корней многочлена  $f_n(x)$  для коэффициента соизмеримости  $p/q$  и  $\sum_i i n_i = n$ . Любое разбиение  $\lambda$  числа  $n$  определяет некоторую структуру  $p : q$ -соизмеримых корней многочлена, и этой структуре соответствует в пространстве коэффициентов  $\Pi$  некоторое алгебраическое многообразие  $\mathcal{V}_l^i$ ,  $i = 1, \dots, p_l(n)$ , размерности  $l$  по числу различных порождающих корней  $t_i$ . Число

таких многообразий размерности  $l$  равно  $p_l(n)$ , а общее число многообразий всех возможных размерностей равно  $p(n) - 1$ , поскольку разбиению  $[1^n]$  соответствует ситуация, когда все порождающие корни многочлена (1) задают цепочки корней длины 1, то есть среди всех корней многочлена  $f_n(x)$  нет ни одной пары  $p : q$ -соизмеримых корней.

**Замечание 4.** В силу того что исходный многочлен (1) вещественный, комплексные корни его образуют пары — сам комплексный корень  $t_i$  и ему комплексно сопряженный  $\bar{t}_i$ . Если порождающий комплексный корень  $t_i$  задает цепочку корней длины  $k$ , то и сопряженный ему корень  $\bar{t}_i$  задает цепочку корней такой же длины, в которой каждый корень является комплексно сопряженным соответствующему корню из цепочки корней, задаваемых корнем  $t_i$ . Значит, в разбиении  $\lambda$ , которое соответствует такой структуре корней, будет два равных слагаемых. Следовательно, на алгебраическом многообразии  $\mathcal{V}_l \subset \Pi$  размерности  $l$  многочлен  $f_n(x)$  имеет только вещественные корни, если соответствующее ему разбиение числа  $n$  есть разбиение, состоящее из  $l$  различных слагаемых. Число таких разбиений для фиксированного  $l$  есть значение функции  $q_l(n)$ , а общее число компонент резонансного множества  $\mathcal{R}_{p,q}(f_n)$ , на которых все корни вещественны, задается функцией  $q(n)$ .

## 2.2. Иерархическая структура компонент множества $\mathcal{R}_{p,q}(f_n)$

Рассмотрим разбиение  $[n^1]$ , которое соответствует случаю, когда имеется единственная цепочка корней длины  $n$ , задаваемая порождающим (очевидно вещественным) корнем  $q^{n-1}t_1$ . Тогда многочлен  $f_n(x)$  имеет вид

$$f_n(x; t_1) = \prod_{j=0}^{n-1} [x - p^j q^{n-1-j} t_1]. \quad (6)$$

Здесь запись  $f_n(x; t_1)$  означает, что все корни многочлена (1) зависят от параметра  $t_1$ . В этом случае его коэффициенты  $a_i$  выражаются через элементарные симметрические многочлены [13; 15]  $\sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , вычисленные на корнях вида  $p^j q^{n-1-j} t_1$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ , соответствующей цепочки корней.

$$a_i = (-1)^i \sigma_i(q^{n-1}t_1, pq^{n-2}t_1, \dots, p^{n-1}t_1), \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

В силу однородности симметрических многочленов  $\sigma_i$ , коэффициенты  $a_i$  являются степенными функциями степени  $i$  параметра  $t_1$ .

Согласно теореме 1 в этом случае  $\deg f_{p,q}(x) = n - 1$ , то есть в последовательности обобщенных субдискриминантов  $\text{GD}_{p,q}^{(i)}(f_n)$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ , первый отличный от нуля обобщенный субдискриминант есть  $\text{GD}_{p,q}^{(n-1)}(f_n)$ . Следовательно, формулы (7) задают параметрическое представление нулей идеала  $\mathcal{I}_{p,q}^{(n-1)}$ . Эти нули представляют собой одномерное многообразие (кривую)  $\mathcal{V}_{p,q}^{(1)}$  в пространстве коэффициентов  $\Pi$ . Эта кривая не имеет особых точек, поскольку в силу ее параметрического представления (7)  $a_i \sim t_1^i$  и, следовательно, производные  $da_i/dt_1$  одновременно в ноль не обращаются.

Рассмотрим следующую конструкцию. Выберем на кривой  $\mathcal{V}_{p,q}^{(1)}$  пару точек, соответствующих значениям параметра  $t_1 \neq 0$  и  $(p/q)^{-1}t_1$ , и проведем через них прямую. Покажем, что на этой прямой многочлен  $f_n(x)$  имеет одну цепочку  $p : q$ -соизмеримых

корней длины  $n - 1$  и одну цепочку корней длины 1, то есть простой корень. Действительно, рассмотрим вспомогательный многочлен

$$g(x; t_1, v) \stackrel{\text{def}}{=} f_n(x; t_1) + v \frac{f_n(x; t_1) - f_n(x; (p/q)^{-1}t_1)}{t_1}. \tag{8}$$

Тогда с учетом формулы (6) получим, что

$$g(x; t_1, v) = \left[ x - \left( p^{n-1}t_1 + v \frac{p^n - q^n}{p} \right) \right] \prod_{j=0}^{n-2} [x - p^j q^{n-2-j} q t_1].$$

Выбирая

$$v = \frac{p(t_2 - p^{n-1}t_1)}{p^n - q^n},$$

получим, что  $g(x; t_1, t_2) = (x - t_2) \prod_{j=0}^{n-2} [x - p^j q^{n-2-j} q t_1]$ , то есть многочлен  $g(x; t_1, t_2)$

имеет один простой корень  $t_2$  и цепочку корней  $\text{Ch}_{p:q}^{(n-1)}(q t_1)$ . Очевидно, что структура корней в этом случае соответствует разбиению  $[1^1(n-1)^1]$ .

Таким образом, коэффициенты вспомогательного многочлена (8) задают в пространстве  $\Pi$  многообразие  $\mathcal{V}_2$ , представляющее собой линейчатую поверхность. Оно образовано секущими, которые пересекают кривую  $\mathcal{V}_1$  в точках, соответствующих таким значениям  $t_1^{(1)}$  и  $t_1^{(2)}$  параметра  $t_1$ , что  $t_1^{(2)}/t_1^{(1)} = p/q$ . При  $p/q \rightarrow 1$  эта линейчатая поверхность превращается в касательную развертывающую поверхность, параметризация которой задается формулой (3.6) из [4].

Описанную выше процедуру теперь можно повторить для многообразия  $\mathcal{V}_2$  и получить параметрическое представление части многообразия  $\mathcal{V}_3$ , на котором имеется цепочка корней длины  $n - 2$  и пара простых корней, то есть ему соответствует разбиение  $[1^2(n-2)^1]$ . Продолжая последовательно эту процедуру, в итоге придем к параметрическому представлению многообразия  $\mathcal{V}_{n-1}$  наибольшей размерности. На нем имеется одна цепочка  $p : q$ -соизмеримых корней длины 2, а остальные корни простые, то есть ему соответствует разбиение  $[1^{n-2}2^1]$ . Очевидно, что в силу замечания 4 полученная параметризация описывает только ту часть многообразия  $\mathcal{V}_l$ ,  $3 \leq l < n$ , на котором все корни многочлена (1) вещественные.

### 2.3. Алгоритм построения параметризации многообразий $\mathcal{V}_l$

Рассмотрим конструктивную процедуру вычисления параметрического представления многообразий  $\mathcal{V}_l^i$  для всех значений  $l = 1, \dots, n - 1$  и  $i = 1, \dots, p_l(n)$ .

**Теорема 2.** Пусть в пространстве  $\Pi$  имеется многообразие  $\mathcal{V}_l$ ,  $\dim \mathcal{V}_l = l$ , на котором многочлен (1) имеет  $l$  различных цепочек  $p : q$ -соизмеримых корней, причем цепочка корней  $\text{Ch}_{p:q}^{(m)}(t_1)$  имеет длину  $m > 1$ . Другие корни  $l-1$  цепочки не являются  $p : q$ -соизмеримыми со всеми корнями цепочки  $\text{Ch}_{p:q}^{(m)}(t_1)$ .

Пусть  $\mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l)$  — параметризация многообразия  $\mathcal{V}_l$ , тогда формула

$$\mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l, t_{l+1}) = \mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l) + \frac{p(t_{l+1} - p^{m-1}t_1)}{t_1(p^m - q^m)} [\mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l) - \mathbf{r}_l((q/p)t_1, \dots, t_l)] \tag{9}$$



задает параметризацию части многообразия  $\mathcal{V}_{l+1}$ , на котором имеется цепочка корней  $\text{Ch}_{p:q}^{(m-1)}(qt_1)$ , простой корень  $t_{l+1}$ , а остальные цепочки корней такие же, как на исходном многообразии  $\mathcal{V}_l$ .

**Доказательство.** В силу условия теоремы многочлен  $f_n(x)$  на многообразии  $\mathcal{V}_l$  факторизуется следующим образом:

$$f_n(x; t_1, \dots, t_l) = u(x) \prod_{j=0}^{m-1} [1 - p^j q^{m-1-j} t_1], \quad (10)$$

где многочлен  $u(x)$  не имеет корней  $p : q$ -соизмеримых с корнями цепочки, порожденной  $t_1$ . Рассмотрим вспомогательный многочлен  $g(x; t_1, \dots, t_l, v)$ , коэффициенты которого непрерывно зависят от параметров  $t_1, \dots, t_l, v$  следующим образом

$$g(x; t_1, \dots, t_l, v) = f_n(x; t_1, \dots, t_l) + v \frac{f_n(x; t_1, \dots, t_l) - f_n(x; (p/q)^{-1}t_1, \dots, t_l)}{t_1}.$$

Подставляя выражение для  $f_n(x)$  из формулы (10), получим

$$g(x; t_1, \dots, t_l, v) = u(x) \left[ x - \left( p^{m-1}t_1 + v \frac{p^{m-1} - q^{m-1}}{p} \right) \right] \times \\ \times \prod_{j=0}^{m-2} (x - p^j q^{m-2-j} t_1).$$

Полагая теперь

$$v = \frac{p(t_{l+1} - p^{m-1}t_1)}{p^m - q^m},$$

получаем

$$g(x; t_1, \dots, t_{l+1}) = u(x; t_2, \dots, t_l)(x - t_{l+1}) \prod_{j=0}^{m-2} (1 - p^j q^{m-2-j} qt_1). \quad (11)$$

Таким образом, многочлен  $g(x; t_1, \dots, t_{l+1})$  имеет цепочку корней длины  $m - 1$  с порождающим  $qt_1$ , один простой корень  $t_{l+1}$  и остальные  $n - m$  корней такие же, как у многочлена  $f_n(x)$ . Следовательно, формула (9) параметризует ту часть многообразия  $\mathcal{V}_{l+1}$ , на которой многочлен  $f_n(x)$  имеет описанную выше структуру корней.

**Замечание 5.** Если в формуле (11) заменить параметр  $t_1$  на  $t_1/q$ , то получим параметризацию части многообразия  $\mathcal{V}_{l+1}$  в виде, задаваемом формулой (10).

**Замечание 6.** Пусть один из корней, например  $u_1$ , многочлена  $u(x)$  в условии теоремы 2 простой, то есть  $u(x) = (x - u_1)\tilde{u}(x)$ . Тогда на части многообразия  $\mathcal{V}_{l+1}$  исходный многочлен имеет пару комплексно-сопряженных корней. Чтобы получить параметрическое представление этой части многообразия  $\mathcal{V}_{l+1}$ , следует сделать такую замену параметров:

$$t_{l+1} \rightarrow v_1 + iv_2, \quad u_1 \rightarrow v_1 - iv_2.$$

Эта замена параметров приведет к тому, что многочлен  $f_n(x)$  на части многообразия  $\mathcal{V}_{l+1}$ , где есть пара комплексно-сопряженных корней, можно представить в виде

$$f_n(x) = \tilde{u}(x) ((x - v_1)^2 + v_2^2) \prod_{j=0}^{m-2} [1 - p^j q^{m-2-j} t_1]. \quad (12)$$

Если поменять знак перед слагаемым  $v_2^2$  в правой части формулы (12), то получим факторизацию многочлена  $f_n(x)$  на той части многообразия  $\mathcal{V}_{l+1}$ , где имеется пара простых вещественных корней  $v_1 \pm v_2$ . Таким образом, для получения параметризации всего многообразия  $\mathcal{V}_{l+1}$  следует использовать подстановку

$$t_{l+1} \rightarrow v_1 + \sqrt{v_2}, \quad u_1 \rightarrow v_1 - \sqrt{v_2}, \quad (13)$$

которая в итоге позволит записать многочлен  $f_n(x)$  на всем многообразии  $\mathcal{V}_{l+1}$  в виде

$$f_n(x) = ((x - v_1)^2 + v_2) \tilde{u}(x) \prod_{j=0}^{m-2} [1 - p^j q^{m-2-j} t_1]. \quad \square$$

Так же, как это было сделано в [4], введем три основные операции, которые позволят последовательно перейти от параметрического представления одномерного многообразия  $\mathcal{V}_1$  к параметризации всех других компонентов резонансного множества  $\mathcal{R}_{p,q}(f_n)$ :

- 1) Назовем операцию перехода от многообразия  $\mathcal{V}_l$  к многообразию  $\mathcal{V}_{l+1}$  в теореме 2 «ПОДЪЕМ». Эта операция позволяет перейти к многообразию, размерность которого на единицу больше размерности исходного. Если на нем многочлен (1) имеет только вещественные корни, то получим полную параметризацию этого многообразия, если имеются комплексные корни, то применим следующую операцию.
- 2) Операцию, основанную на замене (13) в замечании 6, назовем «ПРОДОЛЖЕНИЕ». Эта операция позволяет получить параметризацию всего многообразия  $\mathcal{V}_{l+1}$ , полученного в результате операции «ПОДЪЕМ», в случае, когда на последнем имеются комплексно-сопряженные корни.
- 3) Если на многообразии  $\mathcal{V}_{l+1}$  многочлен  $f_n(x)$  имеет пару различных цепочек корней одинаковой длины  $k$ , то можно перейти к многообразию  $\mathcal{V}_l$ , на котором имеется цепочка корней удвоенной длины  $2k$ . Такую операцию назовем «СПУСК». Если после этого перехода на многообразии  $\mathcal{V}_l$  имеется пара корней одинаковой кратности, то для них следует выполнить процедуру «ПРОДОЛЖЕНИЕ».

Опишем алгоритм получения параметрического представления алгебраических многообразий  $\mathcal{V}_l^i$ ,  $l = 1, \dots, n - 1$ ,  $i = 1, \dots, p_l(n)$ , составляющих резонансное множество  $\mathcal{R}_{p,q}(f_n)$ :

- 1) Вначале строим параметрическое представление одномерного многообразия  $\mathcal{V}_1$  по формулам (7).
- 2) Применяем операцию «ПОДЪЕМ», получаем параметризацию многообразия  $\mathcal{V}_2^1$ , соответствующего разбиению  $[1^1(n-1)^1]$ .
- 3) Вновь применяем операцию «ПОДЪЕМ» и получаем параметризацию многообразия  $\mathcal{V}_3^1$ , которое соответствует разбиению  $[1^2(n-2)^1]$ . Поскольку на этом многообразии имеется пара простых корней, то следует применить операцию «ПРОДОЛЖЕНИЕ». В итоге получаем полную параметризацию многообразия  $\mathcal{V}_3^1$ .

- 4) Применяя к последней параметризации операцию «СПУСК», получаем параметрическое представление многообразия  $\mathcal{V}_2^2$ , на котором корни многочлена  $f_n(x)$  соответствуют разбиению  $[2^1(n-2)^1]$ .
- 5) Последовательно комбинируя операции «ПОДЪЕМ», «ПРОДОЛЖЕНИЕ» и «СПУСК», получим параметрическое представление всех компонент резонансного множества  $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$ .

**Утверждение 1.** Резонансное множество  $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$  вещественного многочлена  $f_n(x)$  для фиксированного коэффициента соизмеримости  $p : q$  допускает полиномиальную параметризацию каждого из алгебраических многообразий  $\mathcal{V}_i$ , составляющих резонансное множество.

## 2.4. Программная реализация

Для организации вычисления резонансного множества  $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$  в системе компьютерной алгебры **Maple** был реализован набор процедур, из которых скомпонована программная библиотека **ResonanceSet**. Библиотека расширяет возможности другой библиотеки **SubDiscrim**, ориентированной на работу с дискриминантным множеством многочлена  $\mathcal{D}(f_n)$  и описанной в [4; 5].

В состав библиотеки вошли следующие процедуры:

- **GDiscrim** — для вычисления  $k$ -го обобщенного субдискриминанта  $\text{GD}_{p:q}^{(k)}(f_n)$  многочлена  $f_n(x)$  для фиксированного коэффициента соизмеримости  $p : q$ .
- **MkFam1** — для вычисления параметрического представления многообразия  $\mathcal{V}_1$ .
- **ProcUp** — для реализации процедуры «ПОДЪЕМ» (см. п. 1 на с. 15).
- **ProcCont** — для реализации процедуры «ПРОДОЛЖЕНИЕ» (см. п. 2 на с. 15).
- **ProcDown** — для реализации процедуры «СПУСК» (см. п. 3 на с. 15).

Каждая из процедур реализована в двух вариантах. Первый вариант предназначен для вычислений при целом коэффициенте соизмеримости, второй — при рациональном.

## 3. Резонансное множество кубики

В качестве примера работы алгоритма рассмотрим структуру резонансного множества кубического многочлена

$$f_3 = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3. \quad (14)$$

Кубика (14) имеет два обобщенных субдискриминанта

$$\begin{aligned} \text{GD}_{p:q}^{(1)}(f_3) &= pqa_1^2a_2 + (p^2 + pq + q^2)a_1a_3 - (p + q)^2a_2^2, \\ \text{GD}_{p:q}^{(0)}(f_3) &= -[pq(p + q)]^2(a_1^3a_3 + a_2^3) + (pq)^3a_1^2a_2^2 - (p^2 + pq + q^2)^3a_3^2 + \\ &\quad + pq(p^2 + pq + q^2)(p^2 + 4pq + q^2)a_1a_2a_3. \end{aligned}$$

Поскольку  $p(3) - 1 = 2$  (см. с. 12), то резонансное множество  $\mathcal{R}_{p,q}(f_3)$  состоит из двух компонент

$$\mathcal{V}_1(f_3) : \{a_1 = -(p^2 + pq + q^2)t_1, a_2 = pq(p^2 + pq + q^2)t_1^2, a_3 = -(pqt_1)^3\}, \quad (15)$$

$$\mathcal{V}_2(f_3) : \{a_1 = -(p + q)t_1 - t_2, a_2 = pqt_1^2 + (p + q)t_1t_2, a_3 = -pqt_1^2t_2\}, \quad (16)$$

соответствующих разбиениям  $[3^1]$  и  $[1^12^1]$ . Очевидно, что на многообразии  $\mathcal{V}_1(f_3)$  нет комплексных корней, следовательно,  $\mathcal{V}_1(f_3) \subset \mathcal{V}_2(f_3)$ .

Геометрически множество  $\mathcal{R}_{p,q}(f_3)$  представляет собой линейчатую поверхность (16) со скрученной кубикой (15) в качестве направляющей. Эта поверхность самопересекается по своей направляющей, которая, в свою очередь, является множеством особых точек поверхности  $\mathcal{V}_2$ . Множество  $\mathcal{R}_{p,q}(f_3)$  показано на рисунке 1. Заметим, что при  $p = q$  получим дискриминантную поверхность  $\mathcal{D}(f_3)$  (см. раздел 4 в [4]), а при  $p = -q$  имеем  $\text{GD}_{p,q}^{(0)}(f_3) = p^6(a_3 - a_1a_2)^2$ , то есть поверхность  $\mathcal{V}_2(f_3)$  есть гиперболический параболоид.

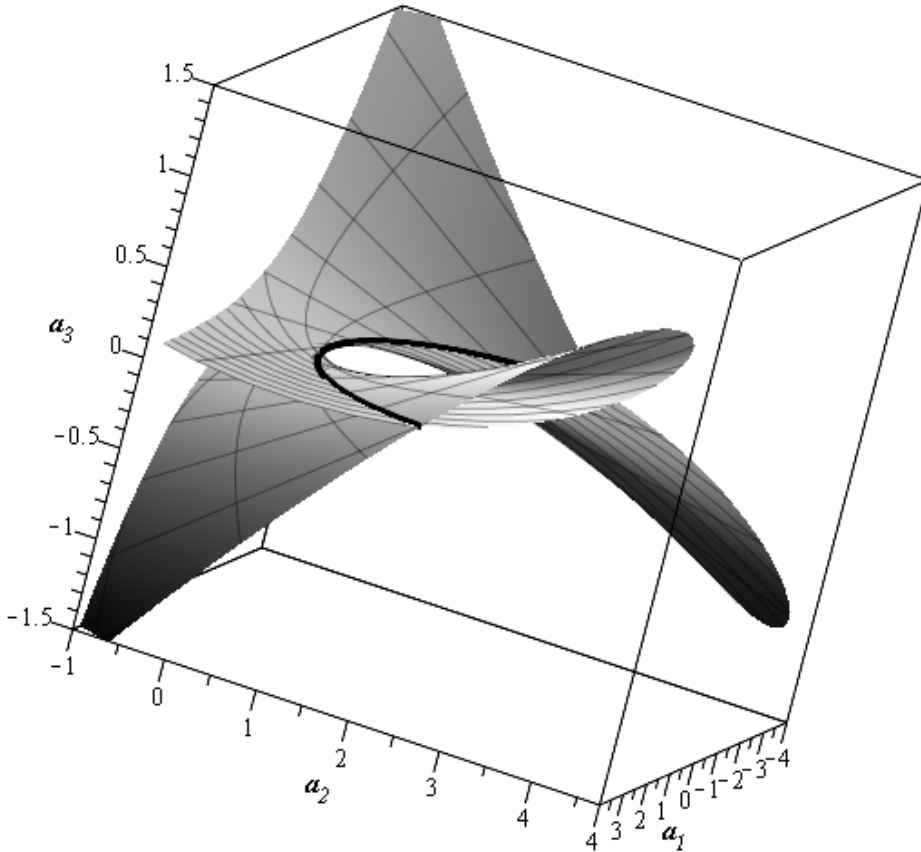


Рис. 1. Резонансное множество  $\mathcal{R}_{p,q}(f_3)$  для коэффициента соизмеримости  $p : q = 7$ . Выделена кривая (15), по которой поверхность (16) самопересекается

Дискриминантная поверхность  $\mathcal{D}(f_3)$  делит пространство коэффициентов  $\Pi$  на две области с разным числом вещественных корней: в области  $\Pi_1$  многочлен  $f_3(x)$  имеет три вещественных корня, в области  $\Pi_2$  — один вещественный и пару комплексно-сопряженных корней. Поскольку на многообразии  $\mathcal{V}_2(f_3)$  кубика (14) имеет только вещественные

корни, то множество  $\mathcal{R}_{p,q}(f_3)$  для любого значения коэффициента  $p : q \neq -1$  целиком содержится в области  $\Pi_1$  и только может касаться дискриминантного множества  $\mathcal{D}(f_3)$ . Нетрудно видеть, что поверхности  $\mathcal{V}_2(f_3)$  и  $\mathcal{D}(f_3)$  касаются друг друга вдоль пары кривых, на которых третий корень, не соизмеримый ни с одним из двух других корней, совпадает с одним из корней этой пары. В силу вышеизложенного, параметрическое представление кривых  $\mathcal{L}_{1,2}$ , по которым дискриминантная поверхность  $\mathcal{D}(f_3)$  касается резонансной поверхности  $\mathcal{V}_2(f_3)$ , получается из (16) подстановками  $t_2 = qt_1$  и  $t_2 = pt_1$  соответственно:

$$\mathcal{L}_1 : \{a_1 = -(p + 2q)t_1, a_2 = q(2p + q)t_1^2, a_3 = -q^2pt_1^3\}, \quad (17)$$

$$\mathcal{L}_2 : \{a_1 = -(2p + q)t_1, a_2 = p(p + 2q)t_1^2, a_3 = -qp^2t_1^3\}. \quad (18)$$

### 3.1. Приложение к проблеме формальной устойчивости положения равновесия

Рассмотрим подробнее ситуацию, возникающую при исследовании устойчивости положения равновесия некоторой многопараметрической системы Гамильтона с тремя степенями свободы.

Пусть в окрестности этого положения равновесия функция Гамильтона  $H(\mathbf{z})$  может быть представлена в виде

$$H(\mathbf{z}) = \sum_{i=2}^{\infty} H_i(\mathbf{z}),$$

где  $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ,  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$  — канонически сопряженные векторы координат и импульсов соответственно, а  $H_i(\mathbf{z})$  — однородная функция степени  $i$  от них. Как известно, в гамильтоновом случае характеристический многочлен  $\check{f}(\lambda)$  линеаризованной системы канонических уравнений

$$\dot{\mathbf{z}} = JAz, \quad \text{где } A \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hess } H_2, \quad (19)$$

является многочленом только от четных степеней  $\lambda$ . Здесь матрица  $J$  — симплектическая единица. Тогда многочлен  $f(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \check{f}(\mu)$ ,  $\mu = \lambda^2$ , названный в [2] *полухарактеристическим*, является приведенным кубическим многочленом (14).

В терминах полухарактеристического многочлена  $f(\mu)$  критерий устойчивости положения равновесия линеаризованной гамильтоновой системы (19) формулируется следующей теоремой.

**Теорема 3** ([2]). *Положение равновесия  $\mathbf{z} = 0$  линеаризованной гамильтоновой системы (19) устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда:*

- 1) *все корни  $\mu_k$  полухарактеристического многочлена  $f(\mu)$  вещественны и неположительны;*
- 2) *все элементарные делители матрицы  $JA$  просты.*

Для кубического многочлена  $f_3(x)$  условие 1 проверяется с помощью следующего утверждения.

**Утверждение 2** ([2, теорема 2.2]). *У многочлена  $f_n(x)$  для  $n = 2, 3$  все корни вещественные и отрицательные тогда и только тогда, когда выполнены следующие неравенства:*

$$a_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{и } D(f_n) \geq 0,$$

где  $D(f_n)$  — дискриминант многочлена  $f_n(x)$ .

Условие 2 эффективно проверяется с помощью утверждения.

**Утверждение 3.** Пусть  $\lambda^*$  — корень кратности  $k$  характеристического многочлена  $\check{f}(\lambda)$  матрицы  $JA$ . Все соответствующие элементарные делители матрицы  $JA$  просты тогда и только тогда, когда  $\text{rang}(JA - \lambda^*E) = m - k$ , где  $m = \dim JA$ .

Как известно, устойчивость положения равновесия системы (19) может быть нарушена возмущениями порядка 3 и выше. Если квадратичная форма  $H_2(\mathbf{z})$  является знакоопределенной, то по теореме Лагранжа — Дирихле возмущения высоких порядков не влияют на устойчивость. Далее полагаем, что форма  $H_2(\mathbf{z})$  знакопеременная.

С практической точки зрения вполне достаточной является более слабая, чем устойчивость по Ляпунову, *формальная устойчивость*, предложенная Ю. Мозером в [19].

**Определение 10.** Положение равновесия  $\mathbf{z} = 0$  гамильтоновой системы является *формально устойчивым*, если существует возможно расходящийся степенной ряд, который является *формальным положительно определенным первым интегралом*.

Наличие формальной устойчивости гарантирует, что на конечном, но большом интервале времени возмущенная траектория остается близкой к невозмущенной.

В работе автора [1] предложена некоторая схема исследования формальной устойчивости положения равновесия, основанная на теореме Брюно (см. [9] или [14, гл. 5, § 2]). Для реализации этой схемы требуется разбить область  $\Pi_1$  на подобласти  $\mathcal{W}_i$  резонансными множествами  $\mathcal{R}_{p:1}(f(\mu))$ ,  $p = 4, 9, 16$ . При этом следует ограничиться только той частью  $\Pi_1$ , в точках которой полухарактеристический многочлен  $f(\mu)$  имеет только отрицательные вещественные корни. В силу утверждения 2 достаточно описать взаимное расположение дискриминантного множества  $\mathcal{D}(f(\mu))$  и резонансных множеств  $\mathcal{R}_{p:1}(f(\mu))$ ,  $p = 4, 9, 16$  в октанте  $a_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Согласно формулам (17) и (18) каждая из резонансных поверхностей  $\mathcal{R}_{p:1}(f(\mu))$  касается дискриминантной поверхности  $\mathcal{D}(f(\mu))$  вдоль кривых  $L_{1,2}$ . Сечение указанных выше поверхностей плоскостью  $a_1 = \text{const} > 0$  показано на рисунке 2 для  $a_1 = 2$ ,  $p = 4$ .

Две резонансные поверхности  $\mathcal{R}_{p_1:1}(f(\mu))$  и  $\mathcal{R}_{p_2:1}(f(\mu))$ ,  $p_{1,2} \in \{4, 9, 16\}$ , пересекаются вдоль кривых  $\mathcal{C}_j$ . Параметризацию кривых  $\mathcal{C}_j$  нетрудно найти, используя следующие рассуждения. Пусть на поверхности  $\mathcal{R}_{p_1:1}(f(\mu))$  многочлен  $f(\mu)$  имеет два порождающих корня  $t_1$  и  $t_2$ , а на поверхности  $\mathcal{R}_{p_2:1}(f(\mu))$  —  $u_1$  и  $u_2$ . Тогда на этих поверхностях  $f(\mu)$  представляется в виде

$$f(\mu) = (\mu - t_1)(\mu - p_1 t_1)(\mu - t_2) = (\mu - u_1)(\mu - p_2 u_1)(\mu - u_2).$$

В точках пересечения поверхностей тройки корней должны совпадать. Нетрудно видеть, что имеются четыре различных набора значений параметров  $t_1, t_2, u_1, u_2$ , для которых две тройки ненулевых корней совпадают:

- 1)  $t_2 = p_2 t_1$ ,  $u_1 = t_1$ ,  $u_2 = p_1 t_1$ ;
- 2)  $t_2 = p_1 p_2 t_1$ ,  $u_1 = p_1 t_1$ ,  $u_2 = t_1$ ;
- 3)  $t_2 = \frac{t_1}{p_2}$ ,  $u_1 = \frac{t_1}{p_1}$ ,  $u_2 = p_1 t_1$ ;
- 4)  $t_2 = \frac{p_1 t_1}{p_2}$ ,  $u_1 = \frac{p_1 t_1}{p_2}$ ,  $u_2 = t_1$ .

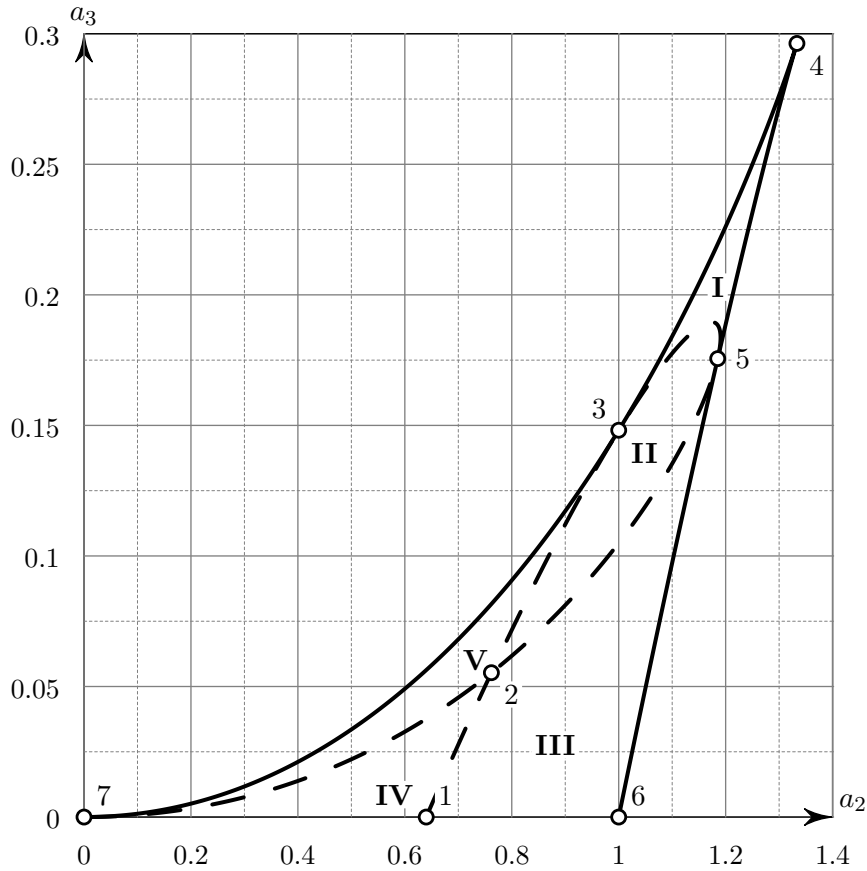


Рис. 2. Сечение дискриминантной  $\mathcal{D}(f(\mu))$  (сплошная линия) и резонансной  $\mathcal{R}_{4:1}(f(\mu))$  (штриховая линия) поверхностей плоскостью  $a_1 = 2$ . Кружками показаны особые точки, граничные точки и точки касания

Подставляя указанные выше значения параметра  $t_2$ , получим параметризацию кривых  $\mathcal{C}_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . Сечение резонансных поверхностей плоскостью  $a_1 = \text{const} > 0$  показано на рисунке 3 для  $a_1 = 2$ ,  $p_{1,2} = 4, 9, 16$ .

В области  $\Pi_1$  вне резонансных поверхностей  $\mathcal{R}_{p:1}(f(\mu))$ ,  $p = 4, 9, 16$ , неподвижная точка  $\mathbf{z} = 0$  формально устойчива [9]. Для точек на этих резонансных поверхностях требуется дополнительное исследование формальной устойчивости, которое можно сделать, вычислив нормальную форму функции Гамильтона  $H(\mathbf{z})$  [8; 11; 14] до 4-го порядка включительно.

Укажем несколько задач, где исследование формальной устойчивости может быть проведено с помощью описанного выше метода:

- устойчивость положения равновесия некоторой гироскопически стабилизированной системы [1; 2];
- устойчивость пространственных точек либрации в задаче Хилла с учетом солнечного ветра и несферичности потенциала Земли [18].

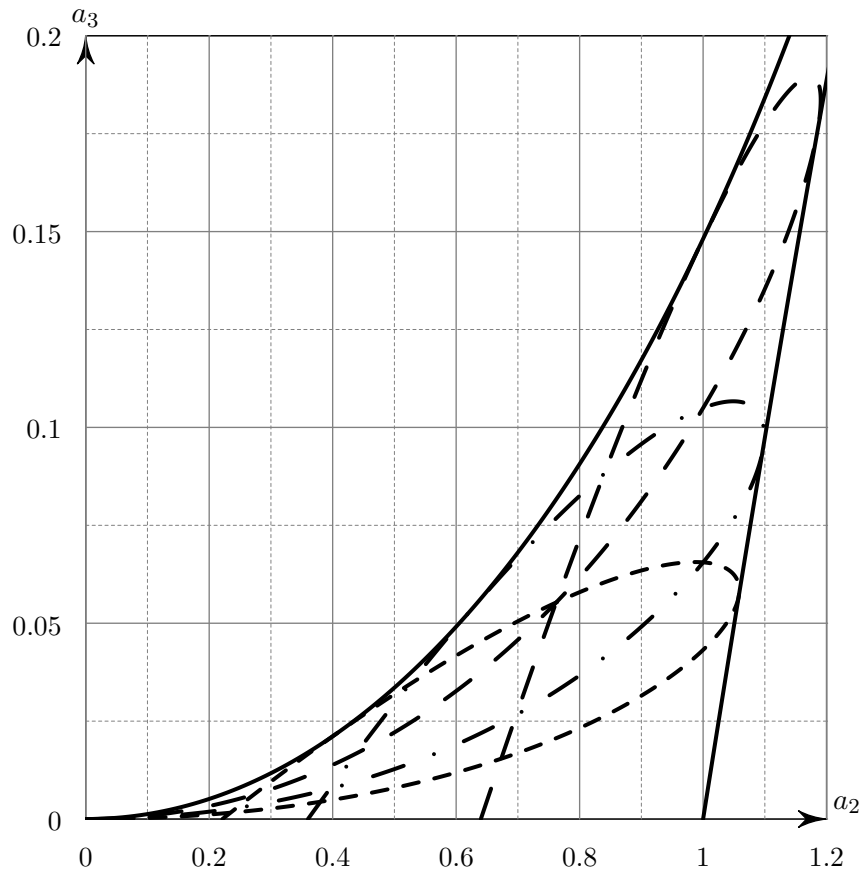


Рис. 3. Сечение резонансных поверхностей  $\mathcal{R}_{p;1}(f(\mu))$  плоскостью  $a_1 = 2$  для значений  $p = 4$  (длинный штрих),  $p = 9$  (штрих-пунктир),  $p = 16$  (короткий штрих). Сплошной линией показана граница области  $\Pi_1$

### Заключение

Резонансное множество  $\mathcal{R}(f_n)$  многочлена  $f_n(x)$  может рассматриваться как некоторое обобщение дискриминантного множества  $\mathcal{D}(f_n)$  для случая, когда отношение пары корней равно некоторому числу. Резонансное множество состоит из конечного набора алгебраических многообразий размерностей от 1 до  $n - 1$ , число которых определяется числом  $p(n)$  разбиений степени  $n$  многочлена  $f_n(x)$ . Каждое из этих многообразий выделяется соответствующим идеалом, состоящим из обобщенных субдискриминантов, и допускает полиномиальную параметризацию.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батхин, А. Б. Выделение областей устойчивости нелинейной системы Гамильтона / А. Б. Батхин // Автоматика и телемеханика. — 2013. — Вып. 8. — С. 47–64.
2. Батхин, А. Б. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем / А. Б. Батхин, А. Д. Брюно, В. П. Варин // Прикладная математика и механика. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 80–133.
3. Батхин, А. Б. Нелинейная устойчивость системы Гамильтона по линейному приближению / А. Б. Батхин // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. —



2012. — № 33. — С. 1–24. — Электрон. текстовые дан. — Режим доступа: [http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012\\_33.pdf](http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012_33.pdf). — Загл. с экрана.

4. Батхин, А. Б. Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена / А. Б. Батхин // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2015. — № 76. — С. 1–36.

5. Батхин, А. Б. Параметризация дискриминантного множества многочлена / А. Б. Батхин // Программирование. — 2016. — Т. 42, № 2. — С. 8–21. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S0361768816020031>.

6. Батхин, А. Б. Структура дискриминантного множества вещественного многочлена / А. Б. Батхин // Чебышевский сб. — 2015. — Т. 16, № 2. — С. 23–34.

7. Батхин, А. Б. Структура резонансного множества вещественного многочлена / А. Б. Батхин // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2016. — № 29. — С. 1–23. — DOI: <http://dx.doi.org/10.20948/prepr-2016-29>.

8. Брюно, А. Д. О вычислении гамильтоновой нормальной формы / А. Д. Брюно, А. Г. Петров // Доклады академии наук. — 2006. — Т. 410, № 4. — С. 474–478.

9. Брюно, А. Д. О формальной устойчивости систем Гамильтона / А. Д. Брюно // Мат. заметки. — 1967. — Т. 1, № 3. — С. 325–330. — DOI: [10.1007/BF01098887](https://doi.org/10.1007/BF01098887).

10. Джури, Э. Инноры и устойчивость динамических систем / Э. Джури. — М.: Мир, 1979. — 304 с.

11. Журавлев, В. Ф. Избранные задачи гамильтоновой механики / В. Ф. Журавлев, А. Г. Петров, М. М. Шундерюк. — М.: ЛЕНАНД, 2015. — 304 с.

12. Калинина, Е. А. Теория исключений / Е. А. Калинина, А. Ю. Утешев. — СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. — 72 с.

13. Макдональд, И. Симметрические функции и многочлены Холла / И. Макдональд. — М.: Мир, 1985. — 222 с.

14. Маркеев, А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике / А. П. Маркеев. — М.: Наука, 1978. — 312 с.

15. Прасолов, В. В. Многочлены / В. В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2014. — 336 с.

16. Эндриус, Г. Теория разбиений / Г. Эндриус. — М.: Наука, 1982. — 256 с.

17. Basu, S. Algorithms in Real Algebraic Geometry / S. Basu, R. Pollack, M.-F. Roy. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2006. — ix+662 p.

18. Markakis, M. P. The photogravitational Hill problem with oblateness: equilibrium points and Lyapunov families / M. P. Markakis, A. E. Perdiou, C. N. Douskos // Astrophys Space Sci. — 2008. — Vol. 315. — P. 297–306. — DOI: [0.1007/s10509-008-9831-6](https://doi.org/0.1007/s10509-008-9831-6).

19. Moser, J. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems / J. Moser // Comm. Pure Appl. Math. — 1958. — Vol. 11, № 1. — P. 81–114.

20. Sloane, N. J. A. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. — Electronic text data. — Mode of access: <http://oeis.org>. — Title from screen.

## REFERENCES

1. Batkhin A.B. Vydelenie oblastey ustoychivosti nelineynoy sistemy Gamiltona [Segregation of Stability Domains of the Hamilton Nonlinear System]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 2013, iss. 8, pp. 47-64.

2. Batkhin A.B., Bruno A.D., Varin V.P. Mnozhestva ustoychivosti mnogoparametricheskikh gamiltonovykh sistem [Stability Sets of Multiparameter Hamiltonian Systems]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 2012, vol. 76, no. 1, pp. 80-133.

3. Batkhin A.B. Nelineynaya ustoychivost sistemy Gamiltona po lineynomu priblizheniyu [Non-Linear Stability of the Hamiltonian System on Linear Approximation]. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*, 2012, no. 33, pp. 1-24. Available at: [http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012\\_33.pdf](http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012_33.pdf).

4. Batkhin A.B. Parametrizatsiya diskriminantnogo mnozhestva veshchestvennogo mnogochlena [Parametrization of the Discriminant Set of a Real Polynomial]. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*, 2015, no. 76, pp. 1-36.
5. Batkhin A.B. Parametrizatsiya diskriminantnogo mnozhestva mnogochlena [Parameterization of the Discriminant Set of a Polynomial]. *Programmirovaniye* [Programming and Computer Software], 2016, vol. 42, no. 2, pp. 8-21. DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S0361768816020031>.
6. Batkhin A.B. Struktura diskriminantnogo mnozhestva veshchestvennogo mnogochlena [Structure of Discriminant Set of Real Polynomial]. *Chebyshevskiy sb.*, 2015, vol. 16, no. 2, pp. 23-34.
7. Batkhin A.B. Struktura rezonansnogo mnozhestva veshchestvennogo mnogochlena [Structure of the Resonance Set of a Real Polynomial]. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*, 2016, no. 29, pp. 1-23. DOI: <http://dx.doi.org/10.20948/prepr-2016-29>.
8. Bruno A.D., Petrov A.G. O vychislenii gamiltonovoy normalnoy formy [On Computation of the Hamiltonian Normal Form]. *Doklady akademii nauk* [Doklady Physics], 2006, vol. 410, no. 4, pp. 474-478.
9. Bruno A.D. O formalnoy ustoychivosti sistem Gamil'tona [Formal Stability of Hamiltonian Systems]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 1967, vol. 1, no. 3, pp. 325-330. DOI: 10.1007/BF01098887.
10. Jury E.I. *Innory i ustoychivost dinamicheskikh sistem* [Inners and Stability of Dynamic Systems]. Moscow, Mir Publ., 1979. 304 p.
11. Zhuravlev V.F., Petrov A.G., Shunderyuk M.M. *Izbrannyye zadachi gamiltonovoy mekhaniki* [Selected Problems of Hamiltonian Mechanics]. Moscow, LENAND Publ., 2015. 304 p.
12. Kalinina E.A., Uteshev A.Yu. *Teoriya isklyucheniya* [Elimination Theory]. Saint Petersburg, Izd-vo NII khimii SPbGU Publ., 2002. 72 p.
13. Macdonald I.A. *Simmetricheskie funktsii i mnogochleny Kholla* [Symmetric Functions and Hall Polynomials]. Moscow, Mir Publ., 1985. 222 p.
14. Markeev A.P. *Tochki libratsii v nebesnoy mekhanike i kosmodinamike* [Libration Points in Celestial Mechanics and Cosmodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 312 p.
15. Prasolov V.V. *Mnogochleny* [Polynomials]. Moscow, MTsNMO Publ., 2014. 336 p.
16. Andrews G. *Teoriya razbieniya* [The Theory of Partitions]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 256 p.
17. Basu S., Pollack R., Roy M.-F. *Algorithms in Real Algebraic Geometry*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 2006. ix+662 p.
18. Markakis M.P., Perdiou A.E., Douskos C.N. The Photogravitational Hill Problem with Oblateness: Equilibrium Points and Lyapunov Families. *Astrophys Space Sci.*, 2008, vol. 315, pp. 297-306. DOI: 0.1007/s10509-008-9831-6.
19. Moser J. New Aspects in the Theory of Stability of Hamiltonian Systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1958, vol. 11, no. 1, pp. 81-114.
20. Sloane N.J.A. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Available at: <http://oeis.org>.

## RESONANCE SET OF A POLYNOMIAL AND PROBLEM OF FORMAL STABILITY

**Alexander Borisovich Batkhin**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher,  
Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences  
batkhin@gmail.com  
Miusskaya Sq., 4, 125047 Moscow, Russian Federation

**Abstract.** Let  $f_n(x)$  be a monic polynomial of degree  $n$  with real coefficients

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n.$$

The space  $\Pi \equiv \mathbb{R}^n$  of its coefficients  $a_1, \dots, a_n$  is called the *coefficient space* of  $f_n(x)$ . A pair of roots  $t_i, t_j, i, j = 1, \dots, n, i \neq j$ , of the polynomial  $f_n(x)$  is called *p : q-commensurable* if  $t_i : t_j = p : q$ .

*Resonance set*  $\mathcal{R}_{p,q}(f_n)$  of the polynomial  $f_n(x)$  is called the set of all points of  $\Pi$  at which  $f_n(x)$  has at least a pair of *p : q-commensurable* roots, i.e.

$$\mathcal{R}_{p,q}(f_n) = \{P \in \Pi : \exists i, j = 1, \dots, n, t_i : t_j = p : q\}.$$

The *chain*  $\text{Ch}_{p,q}^{(k)}(t_i)$  of *p : q-commensurable roots* of length  $k$  is called the finite part of geometric progression with common ratio  $p/q$  and scale factor  $t_i$ , each member of which is a root of the polynomial  $f_n(x)$ . The value  $t_i$  is called the **generating root** of the chain.

Any partition  $\lambda$  of degree  $n$  of  $f_n(x)$  defines a certain structure of its *p : q-commensurable roots* and it corresponds to some algebraic variety  $\mathcal{V}_l^i, i = 1, \dots, p_l(n)$  of dimension  $l$  in the coefficient space  $\Pi$ . The number of such varieties of dimension  $l$  is equal to  $p_l(n)$  and total number of all varieties consisting the resonance set  $\mathcal{R}_{p,q}(f_n)$  is equal to  $p(n) - 1$ .

Algorithm for parametric representation of any variety  $\mathcal{V}_l$  from the resonance set  $\mathcal{R}_{p,q}(f_n)$  is based on the following

**Theorem.** Let  $\mathcal{V}_l, \dim \mathcal{V}_l = l$ , be a variety on which  $f_n(x)$  has  $l$  different chains roots and the chain  $\text{Ch}_{p,q}^{(m)}(t_1)$  has length  $m > 1$ . Let  $\mathbf{r}_l(t_1, t_2, \dots, t_l)$  is a parametrization of variety  $\mathcal{V}_l$ . Therefore the following formula

$$\mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l, v) = \mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l) + \frac{p(v - p^{m-1}t_1)}{t_1(p^m - q^m)} [\mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l) - \mathbf{r}_l((q/p)t_1, \dots, t_l)]$$

gives parametrization of the part of variety  $\mathcal{V}_{l+1}$ , on which there exists  $\text{Ch}_{p,q}^{(m-1)}(t_1)$ , simple root  $v$  and other chains of roots are the same as on the initial variety  $\mathcal{V}_l$ .

From the geometrical point of view the Theorem means that part of variety  $\mathcal{V}_{l+1}$  is formed as ruled surface of dimension  $l+1$  by the secant lines, which cross its directrix  $\mathcal{V}_l$  at two points defined by such values of parameters  $t_1^1$  and  $t_1^2$  that  $t_1^1 : t_1^2 = q : p$ . If  $f_n(x)$  has on the variety  $\mathcal{V}_{l+1}$  pairs of complex-conjugate roots it is necessary to make continuation of obtained parametrization  $\mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l, v)$ .

Resonance set of a cubic polynomial  $f_3(x)$  can be used for solving the problem of formal stability of a stationary point (SP) of a Hamiltonian system with three degrees of freedom. Let Hamiltonian function  $H(\mathbf{z})$  expand in SP  $H(\mathbf{z}) = \sum_{i=2}^{\infty} H_i(\mathbf{z})$ , where  $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ,  $\mathbf{q}$  and  $\mathbf{p}$  — are coordinates and momenta,  $H_i(\mathbf{z})$  — are homogeneous functions of degree  $i$ . Characteristic polynomial  $f(\lambda)$  of the linearized system  $\dot{\mathbf{z}} = JA\mathbf{z}$ ,  $A = \text{Hess } H_2$ , can be considered as a monic cubic polynomial. Resonance sets  $\mathcal{R}_{p,q}(f_n)$  for  $p = 1, 4, 9, 16, q = 1$ , give the boundaries of subdomains in  $\Pi$ , where Bruno's Theorem of formal stability [9] can be applied.

**Key words:** elimination theory, subresultant, computer algebra, formal stability of a stationary point, resonance set.