DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.4.6

УДК 517.984
ББК 22.162

О ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ОГРАНИЧЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ [1]

Андрей Владимирович Светлов

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
andrew.svetlov@volsu.ru, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Работа посвящена исследованию структуры спектра оператора Шредингера на квазимодельном многообразии с концом, представимым искривленным произведением специального вида. Получены условия дискретности спектра в терминах поведения коэффициентов метрики многообразия и потенциала исследуемого оператора при наложении условий на ограниченность потенциала снизу. В заключении сделаны замечания о возможном обобщении результата на более сложные квазимодельные многообразия.

Ключевые слова: дискретность спектра, оператор Шредингера, римановы многообразия, квазимодельные многообразия, искривленные произведения.

Введение

Известно, что структура спектра оператора Лапласа — Бельтрами на римановом многообразии зависит от геометрии многообразия. Характер зависимости различных свойств спектра в различных условиях исследуется множеством авторов начиная с последней четверти прошлого века (см., например, [8; 9; 11; 16; 18; 19]). При этом свойства спектра оператора Шредингера, очевидно, зависят не только от геометрии многообразия, но и от поведения потенциала. Поэтому их исследование является более сложной задачей даже в случае $\mathbf{R}^n$. Результатов относительно структуры спектра оператора Шредингера на римановых многообразиях в несколько раз меньше, чем для лапласиана. В частности, можно отметить публикации [12; 17; 20]. Во всех этих работах накладываются разные условия на геометрию многообразия, но основным результатом в них являются утверждения о дискретности спектра оператора Шредингера при определенном поведении потенциала на бесконечности. В этом смысле процитированные исследования наиболее близки к представляемому в данной статье. Наиболее существенным отличием является класс изучаемых многообразий и методы работы с ним.

Рассмотрим полное риманово многообразие M, представимое в виде $K \cup D$, где K — компактное многообразие, а конец D — простое искривленное произведение. Простым искривленным произведением порядка k мы называем полное риманово многообразие D, изометричное произведению $\mathbf{R_0} \times \mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2 \times \cdots \times \mathrm{S}_k$ (где $\mathbf{R_0} = (r_0, +\infty)$, а S_i — компактные римановы многообразия без края размерности n_i) с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + q_1^2(r)d\theta_1^2 + \cdots + q_k^2(r)d\theta_k^2,$$

где $d\theta_i^2$ — метрика на S_i, а $q_i(r)$ — гладкие положительные на $\mathbf{R_0}$ функции.

На многообразии M нас будут интересовать оператор Лапласа — Бельтрами

$$-\Delta = -\operatorname{div} \nabla$$

и оператор Шредингера

$$L = -\Delta + c(r, \theta),$$

где $c(r, \theta)$ — произвольная функция на многообразии. Кроме того, введем обозначение $s(r) = q_1^{n_1}(r) \cdot \cdots \cdot q_k^{n_k}(r)$. Заметим, что такие многообразия являются простым обобщением искривленных произведений порядка k, поведение решений различных эллиптических уравнений на которых достаточно подробно изучено А.Г. Лосевым, Е.А. Мазепой, С.А. Корольковым (см., например, [2; 13–15]) и другими авторами.

Будем говорить, что спектр оператора дискретен, если он состоит лишь из собственных значений конечной кратности. Для оператора Лапласа — Бельтрами известен критерий дискретности спектра на рассматриваемых многообразиях [19]. При этом для оператора Шредингера удается получить критерий дискретности спектра только при наложении некоторых условий на потенциал и метрику многообразия. В частности, от потенциала требовалась радиальная симметричность (см.: [6; 7; 20]), то есть рассматривался оператор Шредингера вида

$$L_r = -\Delta + \tilde{c}(r).$$

В настоящей работе получены достаточные условия дискретности спектра оператора Шредингера с потенциалом общего вида на квазимодельных многообразиях.

Будем обозначать $V(\cdot)$ и $\operatorname{cap}(\cdot)$ объем и емкость соответствующих объектов, а $B(r) = \{(\rho, \theta) \in D : \ \rho < r\}$ — шар радиуса r с центром в начале координат на многообразии D.

Теорема 1. *Пусть $c(r, \theta) \geq 0$. Тогда спектр оператора Шредингера L на многообразии M дискретен, если на конце D выполнено одно из условий:*

$$V(D) < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{r \to \infty} \frac{V(D \setminus B(r))}{\operatorname{cap}(B(1), B(r))} = 0,$$

или

$$\operatorname{cap} B(1) > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{r \to \infty} \frac{V(B(r))}{\operatorname{cap} B(r)} = 0.$$

Отметим, что условия, выполнение которых требуется в данной теореме, для дискретности спектра оператора Лапласа — Бельтрами являются не только достаточными, но и необходимыми [19].

Далее нам потребуется еще одно обозначение:

$$F(r) = \left(\frac{s'(r)}{2s(r)}\right)' + \left(\frac{s'(r)}{2s(r)}\right)^2.$$

Имеет место также следующий результат.

Теорема 2. *Если на многообразии M существует функция $\tilde{c}(r)$ такая, что $c(r,\theta) \geq \tilde{c}(r)$ и $\tilde{c}(r) + F(r) > -C$ ($C = \mathrm{const} > 0$), то для дискретности спектра оператора Шредингера L на многообразии M достаточно, чтобы для произвольного $\omega > 0$ было выполнено*

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_r^{r+\omega} (\tilde{c}(r) + F(r))\, dr = +\infty.$$

Заметим, что для некоторых случаев потенциала данное утверждение так же является и необходимым условием дискретности спектра оператора Шредингера, а в простейшем случае, если вместо квазимодельного многообразия рассматривать числовую прямую, оно соответствует известному критерию дискретности спектра А.М. Молчанова на прямой [3].

1. Вспомогательные утверждения

Пусть X — гладкое связное многообразие размерности n. Считаем, что на X задана локальная система координат и риманова метрика. Очевидно, что риманова метрика на многообразии индуцирует риманово расстояние $d(x, y)$, где x, $y \in X$. Это позволяет, в частности, определить важный объект, связанный с римановой метрикой — градиент. Далее на многообразии определяется дивергенция div, как оператор, сопряженный с ∇ относительно меры многообразия. Наконец, оператор Лапласа — Бельтрами на многообразии X задается как

$$-\Delta = -\operatorname{div}\nabla.$$

Далее рассмотрим пространства функций на многообразии X и оператор на этом пространстве —

$$A = -\operatorname{div}\nabla\ + c, \tag{1}$$

где c — некоторая действительнозначная функция. Этот оператор задан на $\mathcal{L}^2(X)$, а его областью определения, плотной в этом пространстве, является $C_0^\infty(X)$. Будем называть A — полуограниченным, если коэффициент Релея

$$\lambda_1 = \lambda_1(A) = \inf_{\varphi\in C_0^\infty(X)} \frac{(A\varphi,\varphi)}{(\varphi,\varphi)}$$

конечен. Очевидно, что в силу полуограниченности оператора Лапласа — Бельтрами, для полуограниченности оператора A достаточно ограниченности снизу функции c. Отметим, что, хотя функции, используемые в этом определении, берутся из $C_0^\infty(X)$, скалярное произведение определено благодаря тому, что оператор, как было отмечено выше, задается в $\mathcal{L}^2(X)$. Известно, что коэффициент Релея совпадает с инфимумом спектра оператора A. Кроме того, заметим, что коэффициент Релея совпадает и с инфимумом спектра расширения по Фридрихсу оператора A в силу основного свойства этого расширения (см., например, [4]). Далее, следуя [4; 8] и др., говоря о спектре незамкнутого, но замыкаемого оператора, мы имеем в виду спектр замыкания. То есть слова «спектр оператора» на самом деле относятся к спектру расширения по Фридрихсу этого оператора.

Пусть $\{K\}$ — семейство всех компактных подмножеств многообразия X. Справедливо следующее утверждение о дискретности спектра расширения по Фридрихсу оператора (1).

Теорема 3. *Оператор A имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{\{K\}} \lambda_1(X \setminus K) = +\infty.$$

Аналог этой теоремы может быть получен как следствие из результатов [1, с. 15–62], а непосредственно в таком виде она может быть найдена в [8].

Следствие 1. *Если оператор A имеет дискретный спектр и q — неотрицательная функция, то спектр оператора $A + q$ также дискретен.*

Доказательство. Для оператора $A + q$, используя вариационное определение первого собственного числа и учитывая, что $q \geqslant 0$, имеем:

$$\sup_{K \subset \{K\}} \lambda_1((A+q) \restriction C_0^\infty(X \setminus K)) = \sup_{K \subset \{K\}} \inf_{C_0^\infty(X \setminus K)} \frac{((A+q)\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} =$$

$$= \sup_{K \subset \{K\}} \inf_{C_0^\infty(X \setminus K)} \left(\frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} + \frac{(q\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \right) \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{K \subset \{K\}} \inf_{C_0^\infty(X \setminus K)} \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \sup_{K \subset \{K\}} \lambda_1(A \restriction C_0^\infty(X \setminus K)).$$

И если теперь мы предположим, что оператор A имеет дискретный спектр на X, то отсюда немедленно будет следовать дискретность спектра оператора $A + q$ на этом многообразии (по теореме 3):

$$\sup_{K \subset \{K\}} \lambda_1(A + q \restriction C_0^\infty(X \setminus K)) \geqslant \sup_{K \subset \{K\}} \lambda_1(A \restriction C_0^\infty(X \setminus K)) = +\infty.$$

2. Доказательства теорем

Вернемся теперь к многообразию M, описанному во введении. Ранее нами были получены следующие утверждения о дискретности спектров операторов Лапласа — Бельтрами и Шредингера на таких многообразиях.

Теорема 4 ([19]). *Спектр оператора Лапласа — Бельтрами $-\Delta$ на многообразии M дискретен тогда и только тогда, когда на конце D выполнено одно из условий:*

$$V(D) < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{r \to \infty} \frac{V(D \setminus B(r))}{\operatorname{cap}(B(1), B(r))} = 0,$$

или

$$\operatorname{cap} B(1) > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{r \to \infty} \frac{V(B(r))}{\operatorname{cap} B(r)} = 0.$$

Теорема 5 ([20]). *Пусть* $\tilde{c}(r) + F(r) > -C$ $(C = \text{const} > 0)$. *Для дискретности спектра оператора Шредингера* L_r *на многообразии* M *необходимо и достаточно, чтобы для произвольного* $\omega > 0$ *было выполнено*

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{r}^{r+\omega} (\tilde{c}(r) + F(r))\, dr = +\infty.$$

Доказательства теорем 1 и 2 получаются на основе теорем 4, 5 и следствия 1. Действительно, если $c(r, \theta) \geq 0$, то получаем, что дискретность спектра оператора Шредингера следует из дискретности спектра лапласиана, которая эквивалентна выполнению условий теоремы 4. Таким образом, приходим к заключение теоремы 1. Аналогично, если на многообразии M существует функция $\tilde{c}(r)$ такая, что $c(r, \theta) \geq \tilde{c}(r)$ и $\tilde{c}(r) + F(r) > -C$ $(C = \text{const} > 0)$, то дискретность спектра оператора Шредингера L следует из дискретности спектра оператора Шредингера L_r, необходимое и достаточное условие для которой (при выполнении наложенных ограничений) описано теоремой 5. Таким образом, приходим к заключение теоремы 2.

Заметим, что доказанные теоремы, на самом деле, можно обобщить, поскольку аналогично может быть рассмотрено квазимодельное многообразие M более общего вида, то есть многообразие, представимое в виде объединения $K \cup D_1 \cup \dots \cup D_p$, где K — некоторый компакт, а концы D_i — простые искривленные произведения, аналогичные описанному выше многообразию D. Существуют аналоги теорем 4 и 5 на таком квазимодельном многообразии, благодаря чему теоремы 1 и 2 также останутся справедливы — достаточно лишь потребовать выполнения условий теорем на каждом конце D_i.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 15-41-02479-р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глазман, И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов / И. М. Глазман. — М. : Физматгиз, 1963. — 339 с.

2. Корольков, С. А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера в неограниченных областях римановых многообразий / С. А. Корольков, А. В. Светлов // Наука и образование в современной конкурентной среде : материалы Междунар. науч.-практ. конф. : в 3 частях. Ч. II. — Уфа : РИО ИЦИПТ, 2014. — С. 215–221.

3. Молчанов, А. М. Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка / А. М. Молчанов // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1953. — № 2. — С. 169–199.

4. Рид, М. Методы современной математической физики / М. Рид, Б. Саймон. — М. : Мир, 1977. — Т. 1. — 360 с.

5. Светлов, А. В. О дискретности спектра оператора Шредингера на квазимодельных многообразиях / А. В. Светлов // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 17-й Междунар. Сарат. зим. шк. — Саратов : Научная книга, 2016. — С. 248–250.

6. Светлов, А. В. О спектре оператора Шредингера на многообразиях специального вида / А. В. Светлов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14, № 4–2. — С. 584–589.

7. Светлов, А. В. Спектр оператора Шредингера на скрещенных произведениях / А. В. Светлов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1,

Математика. Физика. — 2002. — Вып. 7. — С. 12–19.

8. Baider, A. Noncompact Riemannian manifolds with discrete spectra / A. Baider // J. Diff. Geom. — 1979. — Vol. 14. — P. 41–57.

9. Brooks, R. A relation between growth and the spectrum of the Laplacian / R. Brooks // Math. Z. — 1981. — Vol. 178. — P. 501–508. — DOI: 10.1007/BF01174771.

10. Grigor'yan, A. A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. A. Grigor'yan // Bull. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 36. — P. 135–249. — DOI: 10.1090/S0273-0979-99-00776-4.

11. Harmer, M. Discreteness of the spectrum of the Laplacian and stochastic incompleteness / M. Harmer // Journal of Geometric Analysis. — 2009. — Vol. 19 (2). — P. 358–372. — DOI: 10.1007/s12220-008-9055-6.

12. Kondratev, V. Discreteness of spectrum for the Schrödinger operators on manifolds of bounded geometry / V. Kondratev, M. Shubin // Operator theory: Advances and Applications. — 1999. — Vol. 110. — P. 185–226. — DOI: 10.1007/978-3-0348-8672-7_12.

13. Korolkova, E. On solvability of boundary value problems for solutions of the stationary Schrödinger equation on unbounded domains of Riemannian manifolds / E. Korolkova, S. Korolkov, A. Svetlov // International Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2014. — Vol. 97, № 2. — P. 231–240. — DOI: 10.12732/ijpam.v97i2.12.

14. Losev, A. G. Bounded solutions of the Schrödinger equation on Riemannian products / A. G. Losev, E. A. Mazepa // St. Petersburg Math. J. — 2001. — Vol. 13, № 1. — P. 57–73.

15. Losev, A. G. On some Liouville theorems on noncompact Riemannian manifolds / A. G. Losev // Siberian Math. J. — 1998. — Vol. 39, № 1. — P. 74–80. — DOI: 10.1007/BF02732362.

16. Pinsky, M. The spectrum of the Laplacian on a manifold of negative curvature I / M. Pinsky // J. Diff. Geom. — 1978. — Vol. 13. — P. 87–91.

17. Shen, Z. The spectrum of Schrödinger operators with positive potentials in Riemannian manifolds / Z. Shen // Proc. of Amer. Math. Soc. — 2003. — Vol. 131, № 11. — P. 3447–3456. — DOI: 10.1090/S0002-9939-03-06968-5.

18. Schechter, M. Spectra of partial differential operators / M. Schechter. — Amsterdam : North-Holland, 1971. — 295 p.

19. Svetlov, A. V. A discreteness criterion for the spectrum of the Laplace — Beltrami operator on quasimodel manifolds / A. V. Svetlov // Siberian Mathematical Journal. — 2002. — Vol. 43 (6). — P. 1103–1111. — DOI: 10.1023/A:1021129703899.

20. Svetlov, A. Discreteness criterion for the spectrum of the Schrödinger operator on weighted quasimodel manifolds / A. Svetlov // International Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2013. — Vol. 89, № 3. — P. 393–400. — DOI: 10.12732/ijpam.v89i3.10.

REFERENCES

1. Glazman I.M. *Pryamye metody kachestvennogo spektralnogo analiza singulyarnykh differentsialnykh operatorov* [Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. 339 p.

2. Korolkov S.A., Svetlov A.V. Kraevye zadachi dlya statsionarnogo uravneniya Shredingera v neogranichennykh oblastyakh rimanovykh mnogoobraziy [Boundary Value Problems for Stationary Schrödinger Equation on Unbounded Domains of Riemannian Manifolds]. *Nauka i obrazovanie v sovremennoy konkurentnoy srede : materialy Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. : v 3 chastyakh. Ch. II.* Ufa, RIO ITsIPT Publ., 2014, pp. 215-221.

3. Molchanov A.M. Ob usloviyakh diskretnosti spektra samosopryazhennykh differentsialnykh uravneniy vtorogo poryadka [On the Spectrum Discreteness Conditions for Self-Adjoint Differential Equations of the Second Order]. *Tr. Mosk. mat. o-va*, 1953, no. 2, pp. 169-199.

4. Reed M., Simon B. *Metody sovremennoy matematicheskoy fiziki* [Methods of Modern Mathematical Physics]. Moscow, Mir Publ., 1977, vol. 1. 360 p.

5. Svetlov A.V. O diskretnosti spektra operatora Shredingera na kvazimodelnykh mnogoobraziyakh [On Discreteness of the Schrödinger Operator Spectrum on Quasi-Model Manifolds]. *Sovremennye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya : materialy 17-y Mezhdunar. Sarat. zim. shk.*. Saratov, Nauchnaya kniga Publ., 2016, pp. 248-250.

6. Svetlov A.V. O spektre operatora Shredingera na mnogoobraziyakh spetsialnogo vida [On Spectrum of Schrödinger Operator on Manifold of a Special Type]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2014, vol. 14, no. 4-2, pp. 584-589.

7. Svetlov A.V. Spektr operatora Shredingera na skreshchennykh proizvedeniyakh [The Spectrum of the Schrodinger Operator on the Warped Products]. *Vestnik Vologradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2002, iss. 7, pp. 12-19.

8. Baider A. Noncompact Riemannian Manifolds with Discrete Spectra. *J. Diff. Geom.*, 1979, vol. 14, pp. 41-57.

9. Brooks R. A Relation Between Growth and the Spectrum of the Laplacian. *Math. Z.*, 1981, vol. 178, pp. 501-508. DOI: 10.1007/BF01174771.

10. Grigor'yan A.A. Analytic and Geometric Background of Recurrence and Non-Explosion of the Brownian Motion on Riemannian Manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1999, vol. 36, pp. 135-249. DOI: 10.1090/S0273-0979-99-00776-4.

11. Harmer M. Discreteness of the Spectrum of the Laplacian and Stochastic Incompleteness. *Journal of Geometric Analysis*, 2009, vol. 19 (2), pp. 358-372. DOI: 10.1007/s12220-008-9055-6.

12. Kondratev V., Shubin M. Discreteness of Spectrum for the Schrödinger Operators on Manifolds of Bounded Geometry. *Operator theory: Advances and Applications*, 1999, vol. 110, pp. 185-226. DOI: 10.1007/978-3-0348-8672-7_12.

13. Korolkova E., Korolkov S., Svetlov A. On Solvability of Boundary Value Problems for Solutions of the Stationary Schrödinger Equation on Unbounded Domains of Riemannian Manifolds. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2014, vol. 97, no. 2, pp. 231-240. DOI: 10.12732/ijpam.v97i2.12.

14. Losev A.G., Mazepa E.A. Bounded Solutions of the Schrödinger Equation on Riemannian Products. *St. Petersburg Math. J.*, 2001, vol. 13, no. 1, pp. 57-73.

15. Losev A.G. On Some Liouville Theorems on Noncompact Riemannian Manifolds. *Siberian Math. J.*, 1998, vol. 39, no. 1, pp. 74-80. DOI: 10.1007/BF02732362.

16. Pinsky M. The Spectrum of the Laplacian on a Manifold of Negative Curvature I. *J. Diff. Geom.*, 1978, vol. 13, pp. 87-91.

17. Shen Z. The Spectrum of Schrödinger Operators with Positive Potentials in Riemannian Manifolds. *Proc. of Amer. Math. Soc.*, 2003, vol. 131, no. 11, pp. 3447-3456. DOI: 10.1090/S0002-9939-03-06968-5.

18. Schechter M. *Spectra of partial differential operators*. Amsterdam, North-Holland, 1971. 295 p.

19. Svetlov A.V. A Discreteness Criterion for the Spectrum of the Laplace — Beltrami Operator on Quasimodel Manifolds. *Siberian Mathematical Journal*, 2002, vol. 43 (6), pp. 1103-1111. DOI: 10.1023/A:1021129703899.

20. Svetlov A. Discreteness Criterion for the Spectrum of the Schrödinger Operator on Weighted Quasimodel Manifolds. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2013, vol. 89, no. 3, pp. 393-400. DOI: 10.12732/ijpam.v89i3.10.

ON DISCRETENESS OF SPECTRUM OF SCHRÖDINGER OPERATOR WITH BOUNDED POTENTIAL

Andrey Vladimirovich Svetlov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University

andrew.svetlov@volsu.ru, matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. Let's consider a complete noncompact Riemannian manifold M without boundary which is representable as $K \cup D$, where K is a compact set and D is isometric to the product $\mathbf{R_0} \times \mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2 \times \cdots \times \mathrm{S}_k$ (где $\mathbf{R_0} = (r_0, +\infty)$, a S_i are compact Riemannian manifolds without boundary) with metric

$$ds^2 = dr^2 + q_1^2(r)d\theta_1^2 + \cdots + q_k^2(r)d\theta_k^2,$$

where $d\theta_i^2$ is the metric on $\mathbb{S}_i$ and $q_i(r)$ is a smooth positive function on R_0. We assume $\dim \mathbb{S}_i = n_i$ and denote $s(r) = q_1^{n_1}(r) \cdots q_k^{n_k}(r)$. The manifold M is called a manifold with end. Since its end D is a simple warped product, M is the simplest case of a quasimodel manifold.

On the manifold M we study the Laplace—Beltrami operator

$$-\Delta = -\mathrm{div}\nabla$$

and the Schrödinger operator

$$-\Delta = -\mathrm{div}\nabla + c(r, \theta).$$

We denote

$$F(r) = \left(\frac{s'(r)}{2s(r)}\right)' + \left(\frac{s'(r)}{2s(r)}\right)^2.$$

Theorem 1. *Let's $c(r,\theta) \geq 0$. The spectrum of the Schrödinger operator L on the manifold M is discrete if one of the following conditions is satisfied:*

$$V(D) < \infty \quad \textit{and} \quad \lim_{r\to\infty} \frac{V(D \setminus B(r))}{\mathrm{cap}(B(1), B(r))} = 0,$$

or

$$\mathrm{cap}\, B(1) > 0 \quad \textit{and} \quad \lim_{r\to\infty} \frac{V(B(r))}{\mathrm{cap}\, B(r)} = 0.$$

We can note that the conditions of the theorem 1 are not just sufficient, but necessary for discreteness of the Laplacian spectrum.

Theorem 2. *If there is a function $\tilde{c}(r)$ on manifold M such that $c(r,\theta) \geq \tilde{c}(r)$ and $\tilde{c}(r) + F(r) > -C$ ($C = \mathrm{const} > 0$), then the spectrum of the Schrödinger operator L on the manifold M is discrete if*

$$\forall \omega > 0 \quad \lim_{r\to\infty} \int\limits_r^{r+\omega} (\tilde{c}(r) + F(r))\, dr = +\infty.$$

Key words: spectrum discreteness, Schrödinger operator, Riemannian manifolds, quasimodel manifolds, warped products.