DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.4.7

УДК 517.5
ББК 22.162

НЕРАВЕНСТВО ТИПА БРУННА — МИНКОВСКОГО В ФОРМЕ ХАДВИГЕРА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕННЫХ МОМЕНТОВ [1]

Булат Саматович Тимергалиев

Ассистент кафедры теории функций и приближений,
Казанский (Приволжский) федеральный университет
timergalievbs@mail.ru
ул. Кремлевская, 18, 420048 г. Казань, Российская Федерация

Аннотация. Настоящая работа посвящена построению одного класса функционалов области в евклидовом пространстве и доказательству для них неравенства типа Брунна — Минковского. Полученное в работе неравенство обобщает соответствующее неравенство для моментов относительно центра масс и гиперплоскостей, доказанное Х. Хадвигером, на случай обобщенных степенных моментов.

Ключевые слова: неравенство Брунна — Минковского, неравенство Прекопа — Лайндлера, вогнутый функционал, выпуклая область, степенные моменты.

Введение

Классическое неравенство Брунна — Минковского позволяет сравнить площади и объемы областей. А именно, справедливо неравенство

$$|\Omega_0 + \Omega_1|^{1/n} \geq |\Omega_0|^{1/n} + |\Omega_1|^{1/n}, \tag{1}$$

где $|\Omega|$ — мера множества Ω; Ω_0, Ω_1 — выпуклые тела в $\mathbb{R}^n$, $\Omega_0+\Omega_1 := \{z_0+z_1 \in \mathbb{R}^n : z_0 \in \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$ — векторная сумма (сумма Минковского). В 1887 г. неравенство (1) было получено Брунном в случае $n = 3$. В 1910 г. Минковский указал Брунну на ошибку в доказательстве, которую тот исправил, а также придумал свое доказательство. И Брунн, и Минковский показали, что равенство достигается тогда и только тогда, когда Ω_0 и Ω_1 являются равными с точностью до переноса и расширения.

Долгое время считалось, что неравенство Брунна — Минковского относится только к геометрии, где его значение широко известно. Но в середине XX в. Х. Хадвигер и Охман (H. Hadwiger, D. Ohmann [10]), независимо от них Л.А. Люстерник (L.A. Lusternik, [14]), доказали, что неравенство (1) верно для произвольных ограниченных измеримых множеств Ω_0 и Ω_1. Неравенство (1) при произвольных Ω_0 и Ω_1 принято называть общим неравенством Брунна — Минковского. С тех пор неравенство начало свой путь в область анализа. В 1956 г. Х. Хадвигер (H. Hadwiger, [11]) доказал неравенство типа Брунна — Минковского для двух моментов выпуклой области, а именно, момента относительно центра масс и момента относительно гиперплоскости. В 1971–1972 гг. А. Прекопа (A. Prékopa, [16]) и Л. Лайндлер (L. Liendler, [13]) доказали следующую функциональную версию неравенства Брунна — Минковского.

Теорема 1. *Путь $0 < t < 1$, f_0, f_1, h — неотрицательные интегрируемые функции в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условию*

$$h((1-t)x + ty) \geq f_0(x)^{1-t} f_1(y)^t \tag{2}$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(x)dx \right)^{1-t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(x)dx \right)^t.$$

Последние 30–40 лет тематика, связанная с неравенством Брунна — Минковского, стремительно развивается. Неравенство широко используется в геометрическом анализе, математической физике и теории вероятностей. Усиления теоремы 1 и ряд новых результатов можно найти в статьях [5; 6]. Литература по неравенствам типа Брунна — Минковского и основные результаты, появившиеся до 2006 г., содержатся в обзорных статьях [4; 9]. В 2007 г. Г. Кэди (G. Keady [12]) доказал неравенство типа Брунна — Минковского для функционала, введенного Ф.Г. Авхадиевым [2]. Развитие результата Г. Кэди, а также неравенства для новых типов функционалов были получены в работах [1; 3]. Отметим также ряд статей, появившихся в последние годы [7; 8; 15].

Приведем формулировку результата Х. Хадвигера [11].

Пусть Ω — ограниченная, выпуклая область в $\mathbb{R}^n$. Через s обозначим центр масс области Ω. Определим функционал

$$I(\Omega) = \int\limits_{\Omega} |s,p|^2 dp, \quad p \in \Omega,$$

где $|s,p|$ — расстояние от точки s до p.

Теорема 2. *Пусть Ω_0, Ω_1 — ограниченные, выпуклые области в $\mathbb{R}^n$. Тогда функционал $I(\Omega_t)^{1/(n+2)}$ вогнут по t:*

$$I(\Omega_t)^{1/(n+2)} \geq (1-t)I(\Omega_0)^{1/(n+2)} + tI(\Omega_1)^{1/(n+2)}, \tag{3}$$

где $\Omega_t = \{(1-t)p_0 + tp_1 | p_0 \in \Omega_0, p_1 \in \Omega_1\}$, $0 \leq t \leq 1$.

В работе [3] было получено обобщение неравенства (3) для функционала

$$I(k,\Omega) = \int\limits_{\Omega} \left(\alpha_1 |x_1 - s_1|^k + \alpha_2 |x_2 - s_2|^k + \cdots + \alpha_n |x_n - s_n|^k \right) dx, \ k \in (1, +\infty), \tag{4}$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_n$ — координаты точки минимума функции

$$I(y) = \int\limits_{\Omega} \left(\alpha_1 |x_1 - y_1|^k + \alpha_2 |x_2 - y_2|^k + \cdots + \alpha_n |x_n - y_n|^k \right) dx, \ dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

переменных $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — декартовы координаты точки $x \in \Omega$, $k \in (1, +\infty)$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — произвольные действительные числа.

Теорема 3. *Пусть Ω_0, Ω_1 – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, представимые в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Тогда функционал $I(k, \Omega)^{1/(k+n)}$ вогнут:*

$$I(k, \Omega_t)^{1/(k+n)} \geq (1-t) I(k, \Omega_0)^{1/(k+n)} + t I(k, \Omega_1)^{1/(k+n)}, \tag{5}$$

где $\Omega_t = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$, $0 \leq t \leq 1$, $k \in (1, +\infty)$.

Целью данной работы является обобщение неравенства (5).

1. Основной результат

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Определим функционал

$$I(k; m; \Omega) = \int\limits_{\Omega} \left(\alpha_1 |x_1 - s_1|^k + \cdots + \alpha_n |x_n - s_n|^k\right)^m dx, \tag{6}$$

где $k \in (0, 1]$ при $m \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ и $k \in (0, +\infty)$ при $m = 1$; $\alpha_j (j = \overline{1, n}) \in \in (0, +\infty)$ — произвольные действительные числа, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ — координаты точки минимума функции

$$I(y) = \int\limits_{\Omega} \left(\alpha_1 |x_1 - y_1|^k + \alpha_2 |x_2 - y_2|^k + \cdots + \alpha_n |x_n - y_n|^k\right)^m dx, \ dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

переменных $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — декартовы координаты точки $x \in \Omega$.

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть Ω_0, Ω_1 – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, представимые в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Тогда функционал $I(k; m; \Omega)^{1/(km+n)}$ вогнут, то есть имеет место неравенство*

$$I(k; m; \Omega_t)^{1/(km+n)} \geq (1-t) I(k; m; \Omega_0)^{1/(km+n)} + t I(k; m; \Omega_1)^{1/(km+n)}, \tag{7}$$

где $\Omega_t = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$, $0 \leq t \leq 1$, $k \in (0, 1]$ при $m \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ и $k \in (0, +\infty)$ при $m = 1$.

При $m = 1$ функционал $I(k; 1; \Omega)$ изучен в работе [3]. Поэтому далее везде $m \neq \neq 1$. Отметим, что метод, разработанный Г. Кэди в [12], не подходит для получения неравенства (7), но используется нами при получении вспомогательных результатов, а именно леммы 4.

2. Вспомогательные леммы и их доказательства

В дальнейшем нам понадобится следующая известная (см. например, [9]) лемма.

Лемма 1. *Пусть P, P_0, P_1 — ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, F — положительный, однородный первой степени функционал, то есть*

$$F(sP) = sF(P) \ \ \forall \ s > 0,$$

является квазивогнутым:

$$F(P_t) \geq \min(F(P_0)), F(P_1)) \ \ \forall\, t \in [0,\ 1].$$

Тогда он вогнут, то есть

$$F(P_t) \geq (1-t)F(P_0) + tF(P_1) \ \ \forall\, t \in [0,\ 1],$$

где $P_t = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid z_0 \in P_0, z_1 \in P_1\}, \ \ 0 \leq t \leq 1.$

Для доказательства теоремы 4 нам понадобится ряд вспомогательных результатов. Займемся их получением.

Пусть E — гиперплоскость размерности $n-1$, содержащая начало координат $O \in \mathbb{R}^n$, u — нормированный вектор с началом в точке O, ортогональный E. Гиперплоскость E разбивает $\mathbb{R}^n$ на два полупространства:

$$H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x,\ u) \geq 0\}, \ \ H_- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x,\ u) \leq 0\},$$

где $(x,\ u)$ — скалярное произведение векторов $x,\ u$ в $\mathbb{R}^n$.

Обозначим $d = |E, z|$ — расстояние от точки $z \in \Omega$ до гиперплоскости E и введем функцию $h(d) = d^k$, $k \in (0,1]$ расстояния d.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Имеет место неравенство*

$$h(d_t) \geq (1-t)h(d_1) + th(d_2), \ d_t = (1-t)d_1 + td_2, \ 0 \leq t \leq 1,$$

то есть функция $h(d)$ *вогнута.*

Доказательство. Пусть для определенности $d_1 < d_2$. Имеем

$$A \equiv h(d_t) - (1-t)h(d_1) - th(d_2) = (1-t)[h(d_t) - h(d_1)] + t[h(d_t) - h(d_2)].$$

Применяя к разностям в квадратных скобках теорему Лагранжа о конечных приращениях, получаем

$$h(d_t) - h(d_1) = h'(c_1)(d_t - d_1), \ \ h(d_t) - h(d_2) = h'(c_2)(d_t - d_2),$$

где $c_1 \in (d_1, d_t)$, $c_2 \in (d_t, d_2)$. Поэтому с учетом $d_t - d_1 = t(d_2 - d_1)$, $d_t - d_2 = (1-t)(d_1 - d_2)$ будем иметь:

$$A = t(1-t)(d_2 - d_1)(h'(c_1) - h'(c_2)),$$

откуда, используя снова теорему Лагранжа, получим

$$A = t(1-t)(d_2 - d_1)h''(c_0) \cdot (c_1 - c_2), \ c_0 \in (c_1, c_2).$$

Но $h''(d) = k(k-1)d^{k-2} \leq 0 \ \forall k \in (0,1], \ \forall d > 0$. Поэтому с учетом $c_1 - c_2 < 0$ имеем $A \geq 0 \ \forall t \in [0,1], \ \forall k \in (0,1]$. Следовательно, $h(d_t) \geq (1-t)h(d_1) + th(d_2)$. Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 непосредственно следует следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть $\Omega_0,\ \Omega_1 \in H_+$ или H_- — ограниченные области в $\mathbb{R}^n$. Тогда справедливо неравенство*

$$|E, z_t|^k \geq (1-t)|E, z_0|^k + t|E, z_1|^k \ \forall k \in (0,1],\ \forall t \in [0,1],$$

где $\Omega_t = (1-t)\Omega_0 + t\Omega_1,\ z_t = (1-t)z_0 + tz_1 \in \Omega_t,\ z_0 \in \Omega_0,\ z_1 \in \Omega_1$.

Доказательство. Обозначим $d_t = |E, z_t|,\ d_0 = |E, z_0|,\ d_1 = |E, z_1|$. Заметим, что $d_t = (1-t)d_0 + td_1$. Используя лемму 2, получаем

$$d_t^k \geq (1-t)d_0^k + td_1^k,$$

то есть

$$|E, z_t|^k \geq (1-t)|E, z_0|^k + t|E, z_1|^k \ \forall k \in (0,1],\ \forall t \in [0,1].$$

Лемма 3 доказана.

Далее, без ограничения общности рассуждений, будем считать, что точка минимума $s = (s_1, \ldots, s_n)$ функционала $I(k; m; \Omega)$ совпадает с началом координат O. Через E_j обозначим гиперплоскость $x_j = 0$. Пусть u_j — нормированный вектор с началом в точке O, ортогональный $E_j,\ j = \overline{1,n}$. Заметим, что $|E_j, z| = |x_j|,\ j = \overline{1,n}$. Поэтому функционал $I(k; m; \Omega)$, определенный формулой (6), можно представить в виде

$$I(k; m; \Omega) \equiv I(k; m; \Omega; E_\Omega) = \int\limits_\Omega \Big(\alpha_1|E_1, z|^k + \alpha_2|E_2, z|^k + \cdots + \alpha_n|E_n, z|^k\Big)^m dz,$$

$$k \in (0,1],\ m \in (0,1) \cup (1, +\infty), \tag{8}$$

где обозначение $I(k; m; \Omega; E_\Omega)$ подчеркивает тот факт, что гиперплоскости E_j $(j = \overline{1,n})$ проходят через точку минимума функционала $I(k; m; \Omega)$, которая совпадает с началом координат.

Каждая гиперплоскость E_j разбивает $\mathbb{R}^n$ на два полупространства:

$$H_j^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, u_j) \geq 0\},\quad H_j^1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, u_j) \leq 0\},\ j = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим всевозможные пересечения полупространств $H_j^{i_j},\ i_j = 0, 1,\ j = \overline{1,n}$:

$$\bigcap_{j=1}^n H_j^{i_j} = H_{(i)} \equiv H_{(i_1 i_2 \ldots i_n)}, \tag{9}$$

где $H_j^{i_j} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, (-1)^{i_j} u_j) \geq 0\}$, $i_j = 0, 1$, $j = \overline{1,n})$; $(i) = (i_1 \cdots i_n)$ — мультииндекс. Отметим, что всего пересечений $H_{(i)}$ 2^n единиц.

Пусть Ω — ограниченная область, полностью лежащая в одном из пересечений $H_{(i)}$. Такую область обозначим через $\Omega^{(i)}$. Рассмотрим функционал

$$I(k; m; \Omega^{(i)}) = \int\limits_{\Omega^{(i)}} D^m(k; z) dz,\ m \in (0, +\infty),$$

где принято обозначение

$$D(k; z) = \alpha_1|E_1, z|^k + \alpha_2|E_2, z|^k + \ldots + \alpha_n|E_n, z|^k,\ k \in (0,1]. \tag{10}$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть* $\Omega_0^{(i)}$, $\Omega_1^{(i)}$ *— ограниченные области в* $\mathbb{R}^n$*, полностью лежащие в пересечении* $H_{(i)}$*. Тогда функционал* $I^{1/(km+n)}(k;m;\Omega^{(i)})$ *вогнут, то есть справедливо неравенство*

$$I^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_t^{(i)}) \geq (1-t)I^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_0^{(i)}) +$$

$$+\, tI^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_1^{(i)}),\ t\in[0,1], k\in(0,1],\ m\in(0,+\infty).$$

Доказательство. Пусть $\Omega_t^{(i)} = \{z_t = (1-t)z_0 + tz_1 \mid z_0 \in \Omega_0^{(i)},\ z_1 \in \Omega_1^{(i)}\}$ — сумма Минковского областей $(1-t)\Omega_0^{(i)}$ и $t\Omega_1^{(i)}$. Заметим, что $\Omega_t^{(i)} \in H_{(i)}$. Принимая во внимание лемму 3, из (10) будем иметь:

$$D(k;z_t) \geq (1-t)D(k;z_0) + tD(k;z_1). \tag{11}$$

Применим к правой части (11) неравенство о среднем, после чего обе части возведем в степень m. Получим

$$D^m(k;z_t) \geq D^{(1-t)m}(k;z_0)\cdot D^{tm}(k;z_1),\ t\in[0,1]. \tag{12}$$

Введем в рассмотрение функции:

$$f(z) = D^m(k;z)\chi^m_{\Omega_t^{(i)}}(z), \quad f_0(z) = D^m(k;z)\chi^m_{\Omega_0^{(i)}}(z),$$

$$f_1(z) = D^m(k;z)\chi^m_{\Omega_1^{(i)}}(z),$$

где $\chi_\Omega(z)$ — характеристическая функция области Ω. Тогда, используя (12) и известное неравенство для характеристических функций $\chi_{\Omega_t^{(i)}}(z_t)$ (см. например, [9])

$$\chi_{\Omega_t}\left((1-t)z + tw\right) \geq [\chi_{\Omega_0}(z)]^{1-t}\cdot[\chi_{\Omega_1}(w)]^t,$$

получаем

$$f(z_t) = D^m(k;z_t)\chi^m_{\Omega_t^{(i)}}(z_t) \geq \Big[D^m(k;z_0)\chi^m_{\Omega_0^{(i)}}(z_0)\Big]^{1-t}\cdot$$

$$\cdot\Big[D^m(k;z_1)\chi^m_{\Omega_1^{(i)}}(z_1)\Big]^t = f_0^{1-t}(z_0)\cdot f_1^t(z_1),$$

то есть условие теоремы Прекопа — Лайндлера (теорема 1) выполняется. Поэтому

$$I(k;m;\Omega_t^{(i)}) \geq I^{1-t}(k;m;\Omega_0^{(i)})\cdot I^t(k;m;\Omega_1^{(i)}),\ \forall t\in[0,1],$$

откуда следует, что функционал $I^{1/(km+n)}(k;m;\Omega^{(i)})$ квазивогнут. Кроме того, имеем

$$I(k;m;\lambda\Omega^{(i)}) = \lambda^{km+n}I(k;m;\Omega^{(i)}),$$

то есть $I(k;m;\Omega^{(i)})$ — однородный функционал степени $km+n$, откуда следует, что $I^{1/(km+n)}(k;m;\Omega^{(i)})$ — однородный функционал первой степени. Таким образом, для функционала $I^{1/(km+n)}(k;m;\Omega^{(i)})$ все условия леммы 1 выполнены. Поэтому функционал $I^{1/(km+n)}(k;m;\Omega^{(i)})$ вогнут. Лемма 4 доказана.

Пусть теперь Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, представимая в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Обозначим

$$\Omega^{(i)} = \Omega \cap H_{(i)},\ (i) = (i_1 \cdots i_n),\ i_j = 0,1;\ j = \overline{1,n}.$$

Тогда область Ω есть объединение областей $\Omega^{(i)}:\ \Omega = \bigcup\limits_{|i|=0}^{n} \Omega^{(i)},\ |i| = i_1 + \ldots + i_n$, причем число слагаемых в этом объединении равно 2^n. В соответствии с этим разбиением области Ω для функционала $I(k;m;\Omega) \equiv I(k;m;\Omega;E_\Omega)$, определенного формулой (8), имеем представление

$$I(k;m;\Omega;E_\Omega) = \sum_{|i|=0}^{n} I(k;m;\Omega^{(i)};E_\Omega), \tag{13}$$

где $\Omega^{(i)} \subset H_{(i)}$.

Перейдем к доказательству теоремы 4.

3. Доказательство основного результата

Для большей наглядности теорему 4 сначала докажем при $n = 2$. В этом случае имеем:

$$H_{(00)} = H_1^0 \cap H_2^0,\ H_{(01)} = H_1^0 \cap H_2^1,\ H_{(10)} = H_1^1 \cap H_2^0,\ H_{(11)} = H_1^1 \cap H_2^1,$$

где H_1^0 — правая, H_1^1 — левая, H_2^0 — верхняя, H_2^1 — нижняя полуплоскости. Обозначим:

$$\Omega_j^{(i_1 i_2)} = \Omega_j \cap H_{(i_1 i_2)},\ i_1, i_2 = 0,1;\ j = 0,1,t.$$

Тогда

$$\Omega_j = \Omega_j^{(00)} \cup \Omega_j^{(10)} \cup \Omega_j^{(11)} \cup \Omega_j^{(01)},\ j = 0,1,t.$$

Заметим, что

$$(1-t)\Omega_0^{(i_1 i_2)} + t\Omega_1^{(i_1 i_2)} \subset \Omega_t^{(i_1 i_2)},\ i_1, i_2 = 0,1. \tag{14}$$

Определим новые области $\Omega_{0\tau},\ \Omega_{1\tau}$ так, что точки $z_0^\tau \in \Omega_{0\tau},\ z_1^\tau \in \Omega_{1\tau}$ будут получаться из точек $z_0 \in \Omega_0,\ z_1 \in \Omega_1$ следующим образом:

$$z_0^\tau = z_0 + t\tau u_1,\ z_1^\tau = z_1 - (1-t)\tau u_1. \tag{15}$$

Легко заметить, что $(1-t)z_0^\tau + tz_1^\tau = z_t$, то есть $\Omega_t = (1-t)\Omega_{0\tau} + t\Omega_{1\tau}$. Введем функции

$$\xi_1(\tau) = \frac{I(k;m;\Omega_{0\tau}^{(00)};E_{\Omega_t})}{I(k;m;\Omega_{0\tau}^{(10)};E_{\Omega_t})},\quad \eta_1(\tau) = \frac{I(k;m;\Omega_{1\tau}^{(00)};E_{\Omega_t})}{I(k;m;\Omega_{1\tau}^{(10)};E_{\Omega_t})}. \tag{16}$$

Функции $\xi_1(\tau),\ \eta_1(\tau)$ будем рассматривать на конечном интервале $(\alpha_0,\ \alpha_1)$, где α_0 — достаточно малое отрицательное, α_1 — достаточно большое положительное числа. Легко видеть, что на $(\alpha_0,\ \alpha_1)$ функция $\xi_1(\tau)$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$, а функция $\eta_1(\tau)$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0. При достаточно малых отрицательных τ $(\alpha_0 < \tau < \beta_0)$ получаем, что $\xi_1(\tau) = 0,\ \eta_1(\tau) = +\infty$, а при достаточно больших положительных τ $(\beta_1 < \tau < \alpha_1)$ имеем $\xi_1(\tau) = +\infty$, $\eta_1(\tau) = 0$. Тогда, принимая во внимание свойства монотонных и непрерывных функций, получаем, что существует точка τ_1 такая, что

$$\xi_1(\tau_1) = \eta_1(\tau_1) = \zeta_1, \ 0 < \zeta_1 \neq \infty.$$

Тогда из (16) получим

$$I(k;m;\Omega^{(00)}_{0\tau_1};E_{\Omega_t}) = \zeta_1 I(k;m;\Omega^{(10)}_{0\tau_1};E_{\Omega_t}),$$

$$I(k;m;\Omega^{(00)}_{1\tau_1};E_{\Omega_t}) = \zeta_1 I(k;m;\Omega^{(10)}_{1\tau_1};E_{\Omega_t}). \qquad (17)$$

Кроме того, учитывая соотношения (14) и используя лемму 4, будем иметь:

$$I(k;m;\Omega^{(i_1 i_2)}_{t};E_{\Omega_t}) \geq \Big[(1-t)I^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(i_1 i_2)}_{0\tau_1};E_{\Omega_t}) +$$

$$+ tI^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(i_1 i_2)}_{1\tau_1};E_{\Omega_t})\Big]^{km+2}, \ i_1, i_2 = 0,1. \qquad (18)$$

Теперь, если учесть (18), (17), то получим

$$I(k;m;\Omega^{(00)}_{t};E_{\Omega_t}) + I(k;m;\Omega^{(10)}_{t};E_{\Omega_t}) \geq$$

$$\geq (1+\zeta_1)\Big[(1-t)I^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(10)}_{0\tau_1};E_{\Omega_t}) + tI^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(10)}_{1\tau_1};E_{\Omega_t})\Big]^{km+2},$$

откуда, возводя обе части неравенства в степень $1/(km+2)$ и снова используя соотношения (17), будем иметь:

$$\Big[I(k;m;\Omega^{(00)}_{t};E_{\Omega_t}) + I(k;m;\Omega^{(10)}_{t};E_{\Omega_t})]^{1/(km+2)} \geq$$

$$\geq (1+\zeta_1)^{1/(km+2)}\Big[(1-t)I^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(10)}_{0\tau_1};E_{\Omega_t}) + tI^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(10)}_{1\tau_1};E_{\Omega_t})\Big] =$$

$$= (1-t)I^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(0)}_{0\tau_1};E_{\Omega_t}) + tI^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(0)}_{1\tau_1};E_{\Omega_t}).$$

Следовательно,

$$I(k;m;\Omega^{(00)}_{t};E_{\Omega_t}) + I(k;m;\Omega^{(10)}_{t};E_{\Omega_t}) \geq$$

$$\geq \Big[(1-t)I^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(0)}_{0\tau_1};E_{\Omega_t}) + tI^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(0)}_{1\tau_1};E_{\Omega_t})\Big]^{km+2}, \qquad (19)$$

где $\Omega^{(0)}_{j\tau_1} = \Omega^{(00)}_{j\tau_1} \cup \Omega^{(10)}_{j\tau_1}$, $j = 0,1$. С учетом (9) легко видеть, что $\Omega^{(0)}_{j\tau_1} = \Omega_{j\tau_1} \cap H^0_2$.

Теперь, если принять во внимание соотношение (13) и неравенство (19), то будем иметь:

$$I(k;m;\Omega_t;E_{\Omega_t}) \geq \Big[(1-t)I^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(0)}_{0\tau_1};E_{\Omega_t}) +$$

$$+ tI^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(0)}_{1\tau_1};E_{\Omega_t})\Big]^{km+2} + I(k;m;\Omega^{(11)}_{t};E_{\Omega_t}) +$$

$$+ I(k;m;\Omega^{(01)}_{t};E_{\Omega_t}), \qquad (20)$$

где $\Omega_{0\tau_1} = \Omega_0 + t\tau_1 u_1$, $\Omega_{1\tau_1} = \Omega_1 - (1-t)\tau_1 u_1$, $\Omega^{(0)}_{j\tau_1} = \Omega_{j\tau_1} \cap H^0_2$, $j = 0,1$.

Неравенство (20) справедливо для любых областей $\Omega_0,\ \Omega_1$, удовлетворяющих условиям теоремы 4. Пользуясь этим фактом, области $\Omega_0,\ \Omega_1$ снова подвергнем переносу (15) в направлении оси OX_1. Получаем новые области

$$\Omega_{0\tau_1\tau} = \Omega_0 + t(\tau_1 u_1 + \tau u_1), \quad \Omega_{1\tau_1\tau} = \Omega_1 - (1-t)(\tau_1 u_1 + \tau u_1).$$

Заметим, что $\Omega_t = (1-t)\Omega_{0\tau_1\tau} + t\Omega_{1\tau_1\tau}$.

Введем функции

$$\xi_2(\tau) = \frac{I(k;m;\Omega^{(01)}_{0\tau_1\tau};E_{\Omega_t})}{I(k;m;\Omega^{(11)}_{0\tau_1\tau};E_{\Omega_t})}, \quad \eta_2(\tau) = \frac{I(k;m;\Omega^{(01)}_{1\tau_1\tau};E_{\Omega_t})}{I(k;m;\Omega^{(11)}_{1\tau_1\tau};E_{\Omega_t})},$$

которые обладают теми же свойствами, что и функции $\xi_1(\tau)$, $\eta_1(\tau)$ вида (16). Поэтому существует точка τ_2 такая, что $\xi_2(\tau_2) = \eta_2(\tau_2) = \zeta_2$, $0 < \zeta_2 \neq \infty$, следовательно, имеют место формулы

$$I(k;m;\Omega^{(01)}_{0\tau_1\tau_2};E_{\Omega_t}) = \zeta_2 I(k;m;\Omega^{(11)}_{0\tau_1\tau_2};E_{\Omega_t}),$$

$$I(k;m;\Omega^{(01)}_{1\tau_1\tau_2};E_{\Omega_t}) = \zeta_2 I(k;m;\Omega^{(11)}_{1\tau_1\tau_2};E_{\Omega_t}).$$

Далее, рассуждая как и выше, приходим к неравенству

$$I(k;m;\Omega^{(11)}_t;E_{\Omega_t}) + I(k;m;\Omega^{(01)}_t;E_{\Omega_t}) \geq \Big[(1-t)I^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(1)}_{0\tau_1\tau_2};E_{\Omega_t}) +$$

$$+ tI^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(1)}_{1\tau_1\tau_2};E_{\Omega_t})\Big]^{1/(km+2)}, \ \Omega^{(1)}_{j\tau_1\tau_2} = \Omega^{(01)}_{j\tau_1\tau_2} \cup \Omega^{(11)}_{j\tau_1\tau_2}, \ j = 0,1. \tag{21}$$

Заметим, что $\Omega^{(1)}_{j\tau_1\tau_2} = \Omega_{j\tau_1\tau_2} \cap H^1_2$. Тогда из (20) с учетом (21) будем иметь:

$$I(k;m;\Omega_t;E_{\Omega_t}) \geq \Big[(1-t)I^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(0)}_{0\tau_1\tau_2};E_{\Omega_t}) +$$

$$+ tI^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(0)}_{1\tau_1\tau_2};E_{\Omega_t})\Big]^{km+2} + \Big[(1-t)I^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(1)}_{0\tau_1\tau_2};E_{\Omega_t}) +$$

$$+ tI^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(1)}_{1\tau_1\tau_2};E_{\Omega_t})\Big]^{km+2}, \tag{22}$$

где $\Omega_{0\tau_1\tau_2} = \Omega_0 + t(\tau_1+\tau_2)u_1$, $\Omega_{1\tau_1\tau_2} = \Omega_1 - (1-t)(\tau_1+\tau_2)u_1$, $\Omega^{(i_2)}_{j\tau_1\tau_2} = \Omega_{j\tau_1\tau_2} \cap H^{i_2}_2$, $j, i_2 = 0,1$.

Области $\Omega_0,\ \Omega_1$ третий раз подвергаем переносу, но на этот раз в направлении оси OX_2:

$$z^\tau_0 = z_0 + t\tau u_2, \quad z^\tau_1 = z_1 - (1-t)\tau u_2, \ z_j \in \Omega_j, \ j = 0,1.$$

При этом области $\Omega_{j\tau_1\tau_2}$ перейдут в области

$$\Omega_{0\tau_1\tau_2\tau} = \Omega_0 + t(\tau u_2 + (\tau_1+\tau_2)u_1),$$

$$\Omega_{1\tau_1\tau_2\tau} = \Omega_1 - (1-t)(\tau u_2 + (\tau_1+\tau_2)u_1).$$

Заметим, что $\Omega_t = (1-t)\Omega_{0\tau_1\tau_2\tau} + t\Omega_{1\tau_1\tau_2\tau}$, где τ — любое число.

Введем функции

$$\xi_3(\tau) = \frac{I(k;m;\Omega^{(0)}_{0\tau_1\tau_2\tau};E_{\Omega_t})}{I(k;m;\Omega^{(1)}_{0\tau_1\tau_2\tau};E_{\Omega_t})}, \quad \eta_3(\tau) = \frac{I(k;m;\Omega^{(0)}_{1\tau_1\tau_2\tau};E_{\Omega_t})}{I(k;m;\Omega^{(1)}_{1\tau_1\tau_2\tau};E_{\Omega_t})},$$

где $\Omega^{(i_2)}_{j\tau_1\tau_2\tau} = \Omega_{j\tau_1\tau_2\tau} \cap H_2^{i_2}$, $j, i_2 = 0, 1$. При помощи аналогичных рассуждений приходим к тому, что существует точка τ_3 такая, что

$$\xi_3(\tau_3) = \eta_3(\tau_3) = \zeta_3, \quad 0 < \zeta_3 \neq \infty$$

и, следовательно, имеем

$$I(k;m;\Omega^{(0)}_{0\tau_1\tau_2\tau_3};E_{\Omega_t}) = \zeta_3 I(k;m;\Omega^{(1)}_{0\tau_1\tau_2\tau_3};E_{\Omega_t}),$$

$$I(k;m;\Omega^{(0)}_{1\tau_1\tau_2\tau_3};E_{\Omega_t}) = \zeta_3 I(k;m;\Omega^{(1)}_{1\tau_1\tau_2\tau_3};E_{\Omega_t}). \tag{23}$$

С учетом (23) из (22) получим

$$I(k;m;\Omega_t;E_{\Omega_t}) \geq (1+\zeta_3)\Big[(1-t)I^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(1)}_{0\tau_1\tau_2\tau_3};E_{\Omega_t}) +$$

$$+ tI^{1/(km+2)}(k;m;\Omega^{(1)}_{1\tau_1\tau_2\tau_3};E_{\Omega_t})\Big]^{km+2},$$

откуда, возводя обе части неравенства в степень $1/(km+2)$, после этого используя снова соотношения (23), получаем

$$I^{1/(km+2)}(k;m;\Omega_t;E_{\Omega_t}) \geq (1-t)I^{1/(km+2)}(k;m;\Omega_{0\tau_1\tau_2\tau_3};E_{\Omega_t}) +$$

$$+ tI^{1/(km+2)}(k;m;\Omega_{1\tau_1\tau_2\tau_3};E_{\Omega_t}), \tag{24}$$

где $\Omega_{j\tau_1\tau_2\tau_3} = \Omega^{(0)}_{j\tau_1\tau_2\tau_3} \cup \Omega^{(1)}_{j\tau_1\tau_2\tau_3}$, $j = 0, 1$.

По определению функционалов $I(k;m;\Omega;E_\Omega)$ имеем неравенства

$$I(k;m;\Omega_{j\tau_1\tau_2\tau_3};E_{\Omega_t}) \geq I(k;m;\Omega_{j\tau_1\tau_2\tau_3};E_{\Omega_{j\tau_1\tau_2\tau_3}}), \ j = 0, 1.$$

Но функционал $I(k;m;\Omega_{j\tau_1\tau_2\tau_3};E_{\Omega_{j\tau_1\tau_2\tau_3}})$ $(j = 0, 1)$ инвариантен относительно переноса областей. Поэтому

$$I(k;m;\Omega_{j\tau_1\tau_2\tau_3};E_{\Omega_{j\tau_1\tau_2\tau_3}}) = I(k;m;\Omega_j;E_{\Omega_j}), \ j = 0, 1. \tag{25}$$

С учетом этого из (24) получим

$$I^{1/(km+2)}(k;m;\Omega_t;E_{\Omega_t}) \geq (1-t)I^{1/(km+2)}(k;m;\Omega_0;E_{\Omega_0}) +$$

$$+ tI^{1/(km+2)}(k;m;\Omega_1;E_{\Omega_1}),$$

то есть теорема 4 при $n = 2$ доказана.

Заметим, что в силу (25) при каждом переносе областей, не ограничивая общности рассуждений, мы последовательно можем считать, что $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$. Этим фактом воспользуемся при доказательстве теоремы 4 в общем случае.

Общий случай. В соответствии с формулой (13) имеем

$$I(k;m;\Omega_t;E_{\Omega_t}) = \sum_{|i|=0}^{n} I(k;m;\Omega_t^{(i)};E_{\Omega_t}) =$$

$$= \sum_{|\gamma_2|=0}^{n-1} \Big[I(k;m;\Omega_t^{(0\gamma_2)};E_{\Omega_t}) + I(k;m;\Omega_t^{(1\gamma_2)};E_{\Omega_t})\Big], \tag{26}$$

где $(\gamma_2) = (i_2 \dots i_n)$ — мультииндекс, $i_j = 0,1$; $j = \overline{2,n}$.

Так как $(1-t)\Omega_0^{(i_1\gamma_2)} + t\Omega_1^{(i_1\gamma_2)} \subset \Omega_t^{(i_1\gamma_2)}$, $i_1 = 0,1$, то в силу леммы 4 имеем

$$I(k;m;\Omega_t^{(i_1\gamma_2)};E_{\Omega_t}) \geq [(1-t)I^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_0^{(i_1\gamma_2)};E_{\Omega_t}) +$$

$$+ tI^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_1^{(i_1\gamma_2)};E_{\Omega_t})\Big]^{km+n}, \ i_1 = 0,1, \ |\gamma_2| = \overline{0,n-1}. \tag{27}$$

Образуем новые области $\Omega_{0\tau}$, $\Omega_{1\tau}$, подвергая Ω_0, Ω_1 последовательно 2^{n-1} переносам в направлении вектора u_1:

$$\Omega_{0\tau} = \Omega_0 + t\tau u_1, \quad \Omega_{1\tau} = \Omega_1 - (1-t)\tau u_1.$$

Ясно, что $\Omega_t = (1-t)\Omega_{0\tau} + t\Omega_{1\tau}$. При каждом таком переносе рассмотрим функции

$$\xi_1^{(\gamma_2)}(\tau) = \frac{I(k;m;\Omega_{0\tau}^{(0\gamma_2)};E_{\Omega_t})}{I(k;m;\Omega_{0\tau}^{(1\gamma_2)};E_{\Omega_t})}, \ \eta_1^{(\gamma_2)}(\tau) = \frac{I(k;m;\Omega_{1\tau}^{(0\gamma_2)};E_{\Omega_t})}{I(k;m;\Omega_{1\tau}^{(1\gamma_2)};E_{\Omega_t})},$$

$$(\gamma_2) = (i_2,\dots,i_n), \ |\gamma_2| = \overline{0,n-1}. \tag{28}$$

Функции $\xi_1^{(\gamma_2)}$, $\eta_1^{(\gamma_2)}$ при каждом наборе (γ_2) обладают теми же свойствами, что и соответствующие функции при $n = 2$. Поэтому существует точка $\tau_1^{(\gamma_2)}$ такая, что

$$\xi_1^{(\gamma_2)}(\tau_1^{(\gamma_2)}) = \eta_1^{(\gamma_2)}(\tau_1^{(\gamma_2)}) = \zeta_1^{(\gamma_2)}, \ 0 < \zeta_1^{(\gamma_2)} \neq \infty, \ |\gamma_2| = \overline{0,n-1}.$$

В силу вышесказанного, не ограничивая общности рассуждений, положим $\tau_1^{(\gamma_2)} = 0$ для каждого $(\gamma_2) = (i_2,\dots,i_n)$, $i_j = 0,1$, $j = \overline{2,n}$. Тогда $\Omega_{j\tau_1^{(\gamma_2)}} = \Omega_j$, $j = 0,1$. Следовательно, из (28) получим

$$I(k;m;\Omega_0^{(0\gamma_2)};E_{\Omega_t}) = \zeta_1^{(\gamma_2)} I(k;m;\Omega_0^{(1\gamma_2)};E_{\Omega_t}),$$

$$I(k;m;\Omega_1^{(0\gamma_2)};E_{\Omega_t}) = \zeta_1^{(\gamma_2)} I(k;m;\Omega_1^{(1\gamma_2)};E_{\Omega_t}). \tag{29}$$

Теперь, если учесть неравенства (27) и соотношения (29), то будем иметь:

$$I(k;m;\Omega_t^{(0\gamma_2)};E_{\Omega_t}) + I(k;m;\Omega_t^{(1\gamma_2)};E_{\Omega_t}) \geq$$

$$\geq \Big[(1-t)I^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_0^{(\gamma_2)};E_{\Omega_t}) + tI^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_1^{(\gamma_2)};E_{\Omega_t})\Big]^{km+n},$$

$$\forall(\gamma_2) = (i_2,\dots,i_n), \ i_j = 0,1, \ j = \overline{2,n}. \tag{30}$$

Таким образом, при каждом переносе областей $\Omega_0,\ \Omega_1$ в направлении вектора u_1 справедливо неравенство (30). После 2^{n-1} переносов из (26) получим

$$I(k;m;\Omega_t;E_{\Omega_t}) \geq \sum_{|\gamma_2|=0}^{n-1}\Big[(1-t)I^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_0^{(\gamma_2)};E_{\Omega_t})+$$

$$+\,tI^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_1^{(\gamma_2)};E_{\Omega_t})\Big]^{km+n}, \tag{31}$$

где $\Omega_j^{(\gamma_2)}=\Omega_j\cap H_{(\gamma_2)},\ H_{(\gamma_2)}=\bigcap\limits_{j=2}^{n}H_j^{i_j},\ i_j=0,1,\ j=\overline{2,n}.$

На втором шаге доказательства теоремы 4 неравенство (31) представим в виде

$$I(k;m;\Omega_t;E_{\Omega_t}) \geq \sum_{|\gamma_3|=0}^{n-2}\Big\{[(1-t)I^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_0^{(0\gamma_3)};E_{\Omega_t})+$$

$$+\,tI^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_1^{(0\gamma_3)};E_{\Omega_t})]^{km+n}+[(1-t)I^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_0^{(1\gamma_3)};E_{\Omega_t})+$$

$$+\,tI^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_1^{(1\gamma_3)};E_{\Omega_t})]^{km+n}\Big\}, \tag{32}$$

где $\gamma_3=(i_3\ldots i_n),\ i_j=0,1,\ j=\overline{3,n}.$

Области $\Omega_0,\ \Omega_1$ подвергаем последовательным переносам в направлении вектора u_2:

$$\Omega_{0\tau}=\Omega_0+t\tau u_2,\quad \Omega_{1\tau}=\Omega_1-(1-t)\tau u_2,$$

при этом $\Omega_t=(1-t)\Omega_{0\tau}+t\Omega_{1\tau}\ \forall\tau.$

Введем функции

$$\xi_2^{(\gamma_3)}=\frac{I(k;m;\Omega_{0\tau}^{(0\gamma_3)};E_{\Omega_t})}{I(k;m;\Omega_{0\tau}^{(1\gamma_3)};E_{\Omega_t})},\quad \eta_2^{(\gamma_3)}=\frac{I(k;m;\Omega_{1\tau}^{(0\gamma_3)};E_{\Omega_t})}{I(k;m;\Omega_{1\tau}^{(1\gamma_3)};E_{\Omega_t})},\ \forall\gamma_3=(i_3\ldots i_n).$$

При помощи аналогичных рассуждений приходим к тому, что существует точка $\tau_2^{(\gamma_3)}$ такая, что

$$\xi_2^{(\gamma_3)}(\tau_2^{(\gamma_3)})=\eta_2^{(\gamma_3)}(\tau_2^{(\gamma_3)})=\zeta_2^{(\gamma_3)},\quad 0<\zeta_2^{(\gamma_3)}\neq\infty\ \forall\gamma_3.$$

Далее считаем, что $\tau_2^{(\gamma_3)}=0$. Тогда

$$I(k;m;\Omega_0^{(0\gamma_3)};E_{\Omega_t})=\zeta_2^{(\gamma_3)}I(k;m;\Omega_0^{(1\gamma_3)};E_{\Omega_t}),$$

$$I(k;m;\Omega_1^{(0\gamma_3)};E_{\Omega_t})=\zeta_2^{(\gamma_3)}I(k;m;\Omega_1^{(1\gamma_3)};E_{\Omega_t}),$$

и с учетом этих соотношений после 2^{n-2} переносов в направлении вектора u_2 из (32) будем иметь:

$$I(k;m;\Omega_t;E_{\Omega_t}) \geq \sum_{|\gamma_3|=0}^{n-2}\Big[(1-t)I^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_0^{(\gamma_3)};E_{\Omega_t})+$$

$$+\,tI^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_1^{(\gamma_3)};E_{\Omega_t})\Big]^{km+n},\ \gamma_3=(i_3\ldots i_n),\ i_j=0,1,\ j=\overline{3,n}.$$

Продолжая этот процесс, после l-го $(l < n)$ шага получим

$$I(k;m;\Omega_t;E_{\Omega_t}) \geq \sum_{|\gamma_{l+1}|=0}^{n-l} \Big[(1-t)I^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_0^{(\gamma_{l+1})};E_{\Omega_t}) +$$

$$+\,tI^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_1^{(\gamma_{l+1})};E_{\Omega_t})\Big]^{km+n},\ \gamma_{l+1} = (i_{l+1}\dots i_n). \tag{33}$$

На $l+1$-м шаге неравенство (33) представим в виде

$$I(k;m;\Omega_t;E_{\Omega_t}) \geq \sum_{|\gamma_{l+2}|=0}^{n-l-1} \Big\{\big[(1-t)I^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_0^{(0\gamma_{l+2})};E_{\Omega_t}) +$$

$$+\,tI^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_1^{(0\gamma_{l+2})};E_{\Omega_t})\big]^{km+n} + \big[(1-t)I^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_0^{(1\gamma_{l+2})};E_{\Omega_t}) +$$

$$+\,tI^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_1^{(1\gamma_{l+2})};E_{\Omega_t})\big]^{km+n}\Big\} \tag{34}$$

и области $\Omega_0,\ \Omega_1$ подвергаем последовательным переносам в направлении вектора u_{l+1}:

$$\Omega_{0\tau} = \Omega_0 + t\tau u_{l+1},\quad \Omega_{1\tau} = \Omega_1 - (1-t)\tau u_{l+1},$$

при этом $\Omega_t = (1-t)\Omega_{0\tau} + t\Omega_{1\tau}$.

Введем функции

$$\xi_{l+1}^{(\gamma_{l+2})} = \frac{I(k;m;\Omega_{0\tau}^{(0\gamma_{l+2})};E_{\Omega_t})}{I(k;m;\Omega_{0\tau}^{(1\gamma_{l+2})};E_{\Omega_t})},\quad \eta_{l+1}^{(\gamma_{l+2})} = \frac{I(k;m;\Omega_{1\tau}^{(0\gamma_{l+2})};E_{\Omega_t})}{I(k;m;\Omega_{1\tau}^{(1\gamma_{l+2})};E_{\Omega_t})},$$

$$\gamma_{l+2} = (i_{l+2}\dots i_n),$$

для которых существует точка $\tau_{l+1}^{\gamma_{l+2}}$ такая, что

$$\xi_{l+1}^{(\gamma_{l+2})}(\tau_{l+1}^{(\gamma_{l+2})}) = \eta_{l+1}^{(\gamma_{l+2})}(\tau_{l+1}^{(\gamma_{l+2})}) = \zeta_{l+1}^{(\gamma_{l+2})},\ 0 < \zeta_{l+1}^{(\gamma_{l+2})} \neq \infty.$$

Далее считаем, что $\tau_{l+1}^{(\gamma_{l+2})} = 0$. Тогда

$$I(k;m;\Omega_0^{(0\gamma_{l+2})};E_{\Omega_t}) = \zeta_{l+1}^{(\gamma_{l+2})} I(k;m;\Omega_0^{(1\gamma_{l+2})};E_{\Omega_t}),$$

$$I(k;m;\Omega_1^{(0\gamma_{l+2})};E_{\Omega_t}) = \zeta_{l+1}^{(\gamma_{l+2})} I(k;m;\Omega_1^{(1\gamma_{l+2})};E_{\Omega_t})$$

и с учетом этих соотношений после 2^{n-l-1} переносов в направлении вектора u_{l+1} из (34) будем иметь:

$$I(k;m;\Omega_t;E_{\Omega_t}) \geq \sum_{|\gamma_{l+2}|=0}^{n-l-1} \Big[(1-t)I^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_0^{(\gamma_{l+2})};E_{\Omega_t}) +$$

$$+\,tI^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_1^{(\gamma_{l+2})};E_{\Omega_t})\Big]^{km+n},\ \gamma_{l+2} = (i_{l+2}\dots i_n),\ i_j = 0,1,\ j = \overline{l+2,n},$$

где $\Omega_j^{(\gamma_{l+2})} = \Omega_j \cap H_{(\gamma_{l+2})}$, $H_{(\gamma_{l+2})} = \bigcap\limits_{j=l+2}^{n} H_j^{i_j}$.

Таким образом, после n-го шага получаем

$$I(k;m;\Omega_t;E_{\Omega_t}) \geq \Big[(1-t)I^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_0;E_{\Omega_t})+$$

$$+tI^{1/(km+n)}(k;m;\Omega_1;E_{\Omega_t})\Big]^{km+n},$$

откуда, с учетом неравенств

$$I(k;m;\Omega_j;E_{\Omega_t}) \geq I(k;m;\Omega_j;E_{\Omega_j}),\ j=0,1,$$

получим утверждение теоремы 4. Теорема 4 полностью доказана.

Выражаю благодарность своему научному руководителю Ф.Г. Авхадиеву за постановку задачи и ценные указания.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 14-01-00351.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авхадиев, Ф. Г. Неравенства типа Брунна — Минковского для конформных и евклидовых моментов областей / Ф. Г. Авхадиев, Б. С. Тимергалиев // Изв. вузов. Математика. — 2014. — № 5. — С. 64–67.

2. Авхадиев, Ф. Г. Решение обобщенной задачи Сен-Венана / Ф. Г. Авхадиев // Математический сборник. — 1998. — № 12. — С. 3–12.

3. Тимергалиев, Б. С. Неравенства типа Брунна — Минковского в форме Хадвигера для степенных моментов / Б. С. Тимергалиев // Учен. зап. Казан. ун-та. — 2016. — № 1. — С. 90–106.

4. Barthe, F. The Brunn — Minkowski theorem and related geometric and functional inequalities / F. Barthe // International Congress of Mathematicians. — 2006. — № 2. — P. 1529–1546.

5. Borell, C. Diffusion equations and geometric inequalities / C. Borell // Potential Anal. — 2000. — № 12. — P. 49–71.

6. Brascamp, H. J. On Extensions of the Brunn — Minkowski and Prékopa — Leindler Theorems, Including Inequalities for Log concave Functions, and with an Application to the Diffusion Equation / H. J. Brascamp, E. H. Lieb // Journal of Functional Analysis. — 1976. — № 22. — P. 366–389.

7. Figalli, A. A refined Brunn — Minkowski inequality for convex sets / A. Figalli, F. Maggi, A. Pratelli // Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis. — 2009. — № 26. — P. 2511–2519.

8. Gardner, R. J. Gaussian Brunn — Minkowski inequalities / R. J. Gardner, A. Zvavitch // Trans. Amer. Math. Soc. — 2010. — № 362 (10). — P. 5333–5353.

9. Gardner, R. J. The Brunn — Minkowski inequality / R. J. Gardner // Bulletin of the American Mathematical Society. — 2002. — № 39. — P. 355–405.

10. Hadwiger, H. Brunn — Minkowskischer Satz und Isoperimetrie / H. Hadwiger, D. Ohmann // Mathematische Zeitschrift. — 1956. — № 66. — P. 1–8.

11. Hadwiger, H. Konkave eikerperfunktionale und hoher tragheitsmomente / H. Hadwiger // Comment Math. Helv. — 1956. — № 30. — P. 285–296.

12. Keady, G. On a Brunn — Minkowski theorem for a geometric domain functional considered by Avhadiev / G. Keady // Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. — 2007. — № 8. — P. 1–10.

13. Liendler, L. On a certain converse of Hölder's inequality II / L. Liendler // Acta Sci. Math. — 1972. — № 33. — P. 217–223.

14. Lusternik, L. A. Die Brunn — Minkowskische Ungleichung fur beliebige messbare Mengen / L. A. Lusternik // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Series I, Mathematics. — 1935. — № 8. — P. 55–58.

15. Lv, S. Dual Brunn — Minkowski inequality for volume differences / S. Lv // Geom. Dedicata. — 2010. — № 145. — P. 169–180.

16. Prékopa, A. Logariphmic concave measures with application to stochastic programming / A. Prékopa // Acta Sci. Math. — 1971. — № 32. — P. 301–315.

REFERENCES

1. Avkhadiev F.G., Timergaliev B.S. Neravenstva tipa Brunna — Minkovskogo dlya konformnykh i evklidovykh momentov oblastey [Brunn — Minkowski Type Inequality for Conformal and Euclidean Moments of Domains]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2014, no. 5, pp. 64-67.

2. Avkhadiev F.G. Reshenie obobshchennoy zadachi Sen-Venana [Solution of the Generalized Saint-Venant Problem]. *Matematicheskiy sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1998, no. 12, pp. 3-12.

3. Timergaliev B.S. Neravenstva tipa Brunna — Minkovskogo v forme Khadvigera dlya stepennykh momentov [Brunn — Minkowski Type Inequality in Hadwiger's Form for Power Moments]. *Uchen. zap. Kazan. un-ta*, 2016, no. 1, pp. 90-106.

4. Barthe F. The Brunn — Minkowski Theorem and Related Geometric and Functional Inequalities. *International Congress of Mathematicians*, 2006, no. 2, pp. 1529-1546.

5. Borell C. Diffusion Equations and Geometric Inequalities. *Potential Anal.*, 2000, no. 12, pp. 49-71.

6. Brascamp H.J., Lieb E.H. On Extensions of the Brunn — Minkowski and Prékopa — Leindler Theorems, Including Inequalities for Log Concave Functions, and with an Application to the Diffusion Equation. *Journal of Functional Analysis*, 1976, no. 22, pp. 366-389.

7. Figalli A., Maggi F., Pratelli A. A Refined Brunn — Minkowski Inequality for Convex Sets. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, 2009, no. 26, pp. 2511-2519.

8. Gardner R.J., Zvavitch A. Gaussian Brunn — Minkowski Inequalities. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2010, no. 362 (10), pp. 5333-5353.

9. Gardner R.J. The Brunn — Minkowski Inequality. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2002, no. 39, pp. 355-405.

10. Hadwiger H., Ohmann D. Brunn — Minkowskischer Satz Und Isoperimetrie. *Mathematische Zeitschrift*, 1956, no. 66, pp. 1-8.

11. Hadwiger H. Konkave Eikerperfunktionale Und Hoher Tragheitsmomente. *Comment Math. Helv.*, 1956, no. 30, pp. 285-296.

12. Keady G. On a Brunn — Minkowski Theorem for a Geometric Domain Functional Considered By Avhadiev. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 2007, no. 8, pp. 1-10.

13. Liendler L. On a Certain Converse of Hölder's Inequality II. *Acta Sci. Math.*, 1972, no. 33, pp. 217-223.

14. Lusternik L.A. Die Brunn — Minkowskische Ungleichung Fur Beliebige Messbare Mengen. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Series I, Mathematics*, 1935, no. 8, pp. 55-58.

15. Lv S. Dual Brunn — Minkowski Inequality for Volume Differences. *Geom. Dedicata*, 2010, no. 145, pp. 169-180.

16. Prékopa A. Logariphmic Concave Measures with Application to Stochastic Programming. *Acta Sci. Math.*, 1971, no. 32, pp. 301-315.

BRUNN — MINKOWSKI TYPE INEQUALITY FOR GENERALIZED POWER MOMENTS IN THE FORM OF HADWIGER

Bulat Samatovich Timergaliev

Assistant, Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Kazan Federal University
timergalievbs@mail.ru
Kremlevskaya St., 18, 420048 Kazan, Russian Federation

Abstract. In this paper we built a class of domain functionals in Euclidian space and proved Brunn — Minkowski type inequality applied to the mentioned class. The resulting inequality generalizes corresponding inequality for moments of inertia in relation to the center of mass and hyperplanes proven by H. Hadwiger.

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^n$. Define the functional

$$I(k;m;\Omega)=\int\limits_{\Omega}\left(\alpha_1|x_1-s_1|^k+\dots+\alpha_n|x_n-s_n|^k\right)^m dx,$$

where $k\in(0,1]$ at $m\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ and $k\in(0,+\infty)$ at $m=1$; $\alpha_j(j==\overline{1,n})\in(0,+\infty)$ — arbitrary real numbers, $s_1,s_2,\dots,s_n$ — coordinates of the minimum point of the function

$$I(y)=\int\limits_{\Omega}\left(\alpha_1|x_1-y_1|^k+\alpha_2|x_2-y_2|^k+\dots\right.$$
$$\left.+\dots+\alpha_n|x_n-y_n|^k\right)^m dx,\ dx=dx_1dx_2\cdots dx_n$$

of the variables $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, where $x_1,x_2,\dots,x_n$ — Cartesian coordinates of the point $x\in\Omega$. The main result of this paper is the following

Theorem. *Let Ω_0,Ω_1 be a bounded domains in $\mathbb{R}^n$, that can be represented as the the union of a finite number of convex domains. Then the functional $I(k;m;\Omega)^{1/(km+n)}$ concave:*

$$I(k;m;\Omega_t)^{1/(km+n)}\ge(1-t)I(k;m;\Omega_0)^{1/(km+n)}+tI(k;m;\Omega_1)^{1/(km+n)},$$

where $\Omega_t=\{(1-t)z_0+tz_1\mid z_0\in\Omega_0,z_1\in\Omega_1\}$, $0\le t\le1$, $k\in(0,1]$ at $m\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ and $k\in(0,+\infty)$ at $m=1$.

Key words: Brunn — Minkowski inequality, Prékopa — Leindler inequality, concave function, convex body, power moments.