DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.5.2
УДК 517.956.224
ББК 2.22.161.6

ТЕОРЕМЫ ТИПА ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С КОНЕЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ ДИРИХЛЕ [1]

Александр Георгиевич Лосев

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
allosev59@gmail.com, alexander.losev@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Владимир Владимирович Филатов

Студент кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
vladimfilatov@yandex.ru, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В данной работе изучаются вопросы сохранения лиувиллева свойства для решений стационарного уравнения Шредингера с конечным интегралом Дирихле на произвольных некомпактных римановых многообразиях. Доказан аналог теоремы Альфорса о существовании нетривиальной ограниченной гармонической функции с конечным интегралом Дирихле.

Ключевые слова: интеграл Дирихле, стационарное уравнение Шредингера, теоремы типа Лиувилля, теорема Альфорса, римановы многообразия.

Введение

Данная работа посвящена изучению взаимосвязи между существованием нетривиальных ограниченных и неограниченных решений стационарного уравнения Шредингера

$$Lu = \Delta u - c(x)u = 0 \tag{1}$$

с конечным интегралом энергии (интегралом Дирихле)

$$D(M,u) = \int\limits_M \left(|\nabla u|^2 + c(x)u^2\right) dx \tag{2}$$

на произвольном некомпактном римановом многообразии M. Здесь $c(x)$ — гладкая неотрицательная на M функция.

Данная тематика имеет прямое отношение к теоремам типа Лиувилля. Считающаяся в настоящее время классической формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая функция в R^n есть тождественная постоянная. Нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений, называемых теоремами типа Лиувилля:

1) если u — неотрицательная гармоническая функция в R^n, то u является тождественной постоянной (иначе — выполнено $HP(R^n)$-лиувиллево свойство);
2) если гармоническая функция u в R^n имеет конечный интеграл Дирихле $\int\limits_{R^n} |\nabla u|^2 dx$, то u является тождественной постоянной (иначе — выполнено $HD(R^n)$-лиувиллево свойство);
3) если $u \in L^p(R^n)$ — гармоническая функция, где $1 \leq p < \infty$, то u является тождественным нулем (иначе — выполнено $HL^p(R^n)$-лиувиллево свойство).

В последние несколько десятилетий был опубликован ряд работ, посвященных получению аналогичных результатов на произвольных некомпактных римановых многообразиях. А именно, приводятся условия выполнения теорем типа Лиувилля на некомпактных римановых многообразиях в терминах роста объема, выполнения изопериметрических неравенств, условий на кривизну и так далее.

Одним из истоков указанной проблематики считается классификационная теория двумерных некомпактных римановых поверхностей. Отличительным свойством двумерных поверхностей параболического типа является выполнение для них теоремы Лиувилля, утверждающей, что всякая положительная супергармоническая функция на данной поверхности является тождественной постоянной. Данное свойство послужило основой для распространения понятий параболичности и гиперболичности на произвольные римановы многообразия.

А именно, многообразия, на которых всякая ограниченная снизу супергармоническая функция равна константе, называют многообразиями *параболического* типа (см. [10]).

К числу одного из первых результатов в определении типа риманова многообразия, использующих геометрические характеристики, относится теорема С.Я. Ченга и С.Т. Яу [8], утверждающая, что полное многообразие является параболическим, если объем геодезического шара радиуса R растет не быстрее, чем R^2 при $R \to \infty$. Однако существуют многообразия параболического типа с произвольным ростом объема геодезического шара.

В работе [3] А.А. Григорьян доказал, что параболичность типа полного риманова многообразия M эквивалентна тому, что вариационная емкость любого компакта в M равна нулю.

Вообще, поиски признаков параболичности типа имеют большую историю. Общее представление о современных исследованиях в данном вопросе можно получить, например, из работы А.А. Григорьяна [10].

В ряде работ рассматривались аналогичные задачи для линейных эллиптических уравнений более общих, чем уравнение Лапласа — Бельтрами. В частности, достаточно серьезный интерес вызывает изучение асимптотического поведения решений стационарного уравнения Шредингера (1). Отметим, что в этом случае ненулевая постоянная не является решением, поэтому и лиувиллево свойство для него формулируется несколько иначе.

А именно, говорят, что на римановом многообразии M выполнено $LB(M)$ — лиувиллево свойство, если любое ограниченное решение уравнения (1) есть тождественный нуль.

Приведем некоторые примеры. В работе А.А. Григорьяна [4] было показано, что выполнение $LB(M)$ — лиувиллева свойства для стационарного уравнения Шредингера с потенциалом $c(x)$, имеющим компактный носитель, эквивалентно параболичности типа риманова многообразия M.

Оценкам размерностей различных пространств решений стационарного уравнения Шредингера посвящены работы [5; 6].

Отдельный интерес вызывает вопрос о взаимосвязи выполнения теорем типа Лиувилля на некомпактных римановых многообразиях. Очевидно, что из выполнения $HD(M)$-лиувиллева свойства следует выполнение $HBD(M)$-лиувиллева свойства. Действительно, если любая гармоническая функция с конечным интегралом энергии есть тождественная постоянная, то любая ограниченная гармоническая функция с конечным интегралом энергии тоже будет являться константой. Вопрос: выполнено ли обратное включение, то есть следует ли из выполнения $HBD(M)$-лиувиллева свойства выполнение $HD(M)$-лиувиллева свойства?

Положительный ответ на данный вопрос дает известная теорема Л.В. Альфорса (см., например, [9]), которая утверждает, что если на многообразии M существует нетривиальная гармоническая функция с конечным интегралом Дирихле, то на M существует нетривиальная ограниченная гармоническая функция с конечным интегралом Дирихле. Целью данной работы было получить аналог теоремы Альфорса для решений уравнения (1), и, соответственно, показать эквивалентность $LBD(M)$ и $LD(M)$-лиувиллева свойства.

1. Вспомогательные утверждения

Доказательство основных результатов опирается на классические утверждения теории уравнений с частными производными: принцип максимума, теоремы сравнения и другие аналогичные утверждения (см., например, [1, с. 39–41, 94–95]). Их справедливость на предкомпактных подмножествах некомпактных римановых многообразий доказывается также, как для ограниченных областей в евклидовом пространстве.

Напомним некоторые свойства решений уравнения

$$Lu = \Delta u - c(x)u = 0. \qquad (1)$$

Всюду далее будем считать, что M — произвольное некомпактное риманово многообразие.

Лемма 1 (Принцип максимума). *Пусть B — предкомпактное подмножество M с гладкой границей, тогда если*

$$Lu = 0,$$

то

$$\sup_B |u| = \sup_{\partial B} |u|.$$

Лемма 2. *Пусть $B \subset M$ — произвольное предкомпактное открытое подмножество, $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — равномерно ограниченное на B семейство решений уравнения (1),*

$\phi_i \in C^{2,\alpha}(B)$. *Тогда семейство функций* $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ *компактно вместе с семейством их первых и вторых производных на любом компактном подмножестве* $B' \subset B$.

Далее, пусть B — предкомпактное, открытое подмножество M с гладкой границей, u — дважды непрерывно дифференцируемая на B функция. Интеграл

$$D(B,u) = \int\limits_B \left(|\nabla u|^2 + c(x)u^2\right) dx$$

будем называть интегралом Дирихле функции u по множеству B.

Дальнейшие утверждения по своим формулировкам и методам доказательства близки к [7].

Лемма 3. *Пусть B — предкомпактное подмножество M с гладкой границей. Семейство функций $F = \{y(x) \in C^2(B) : D(B,y) < \infty\}$ является линейным пространством со скалярноым произведением*

$$\langle a,b\rangle = \int\limits_B (\langle \nabla a, \nabla b\rangle + c(x)ab)\, dx, \forall a,b \in F.$$

Соответствующая этому скалярному произведению норма

$$\|a\| = \langle a,a\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_B |\nabla a|^2 + c(x)a^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

является интегралом Дирихле.

Лемма 4 (Принцип Дирихле). *Пусть $B \subset M$ — предкомпактное открытое подмножество M с гладкой границей. Для функций $u, v \in C^2(B)$ таких, что*

$$\begin{cases} \Delta u - c(x)u = 0, x \in B, \\ u|_{\partial B} = v|_{\partial B}, \end{cases}$$

выполнено

$$D(B,u) \le D(B,v).$$

2. Взаимосвязь теорем типа Лиувилля

Теорема 1. *Если на M существует нетривиальное решение уравнения*

$$Lu = \Delta u - c(x)u = 0 \tag{1}$$

с конечным интегралом Дирихле

$$\int\limits_M |\nabla u|^2 + c(x)u^2 dx < \infty, \tag{2}$$

то на M существует нетривиальное ограниченное решение уравнения (1) с конечным интегралом Дирихле (2).

Доказательство. При доказательстве данного утверждения авторы воспользовались идеями, примененными в [2] при доказательстве теоремы, устанавливающей взаимосвязь между выполнением $HD(M)$-лиувиллева свойства и существованием нетривиального решения некоторой внешней краевой задачи.

Предположим, что на M всякое ограниченное решение уравнения (1) с конечным интегралом Дирихле есть тождественный нуль, однако существует функция v, являющаяся нетривиальным неограниченным решением уравнения (1) с конечным интегралом Дирихле.

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание, то есть последовательность предкомпактных открытых подмножеств M с гладкими границами, так, что $B_k \subset B_{k+1}$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k = M$. Так как $v(x) \neq 0$, то обозначим

$$\int\limits_{B_1} |\nabla v|^2 + c(x)v^2 dx = a > 0.$$

Из сходимости интеграла $\int\limits_M |\nabla v|^2 + c(x)v^2 dx$ следует, что существует N такое, что

$$\int\limits_{\{x:|v(x)|\geq N\}} |\nabla v|^2 + c(x)v^2 dx \leq a/4.$$

Определим функцию-срезку v^N функции v следующим образом

$$v^N(x) = \begin{cases} v(x), x : |v(x)| < N \\ N, x : v(x) \geq N \\ -N, x : v(x) \leq -N \end{cases}.$$

Обозначим через u_k решение следующей краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u_k - c(x)u_k = 0, x \in B_k \\ u_k|_{\partial B_k} = v^N(x)|_{\partial B_k} \end{cases}.$$

Пусть $G \subset M$ — некоторое предкомпактное открытое подмножество M. Используя принцип максимума, получаем

$$\sup_G |u_k| \leq \sup_{B_k} |u_k| = \sup_{\partial B_k} |u_k| = \sup_{\partial B_k} |v^N| \leq N$$

при достаточно больших k. Следовательно, $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — равномерно ограниченное на G семейство решений уравнения (1). В силу леммы 2 оно компактно в классе $C^2(G)$. То есть на G существует подпоследовательность $\{u_{k_i}\}$ такая, что $\lim\limits_{k_i\to\infty} u_{k_i} = u$. Покажем, что на M существует сходящаяся подпоследовательность.

Далее будем в качестве множества G брать последовательно множества B_k для $k = 1, 2, \ldots$. Так как на B_1 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ компактно, то существует сходящаяся подпоследовательность $\{u_k^1\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} u_k^1 = u^1$. В свою очередь, семейство $\{u_k^1\}$ компактно на B_2 в классе $C^2(B_2)$, и, следовательно, существует сходящаяся подпоследовательность

$\{u_k^2\}$ последовательности $\{u_k^1\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} u_k^2 = u^2$. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем последовательность функций $\{u^k\}$, определенных на B_k. Определим функцию u следующим образом

$$u = \begin{cases} u^1, x \in B_1 \\ u^2, x \in B_2 \backslash B_1 \\ \dots \\ u^k, x \in B_k \backslash B_{k-1} \\ \dots \end{cases}$$

Выберем подпоследовательность последовательности $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся к функции u. Пусть $m_1 = u_1^1, m_2 = u_2^2, \dots, m_n = u_n^n, \dots$, заметим, что m_k сходится к функции u, по крайней мере поточечно. По лемме 2 из нее можно извлечь последовательность, сходящуюся по норме $C^2(G)$. Применяя переобозначения, будем считать, что $\{u_k\}$ и есть эта подпоследовательность.

Для функции u выполнено $Lu = 0$ на произвольном предкомпактном подмножестве M, $|u| \le N$. Покажем, что u имеет конечный интеграл Дирихле. Используя принцип Дирихле, получаем

$$\int\limits_{B_k} |\nabla u_k|^2 + c(x)u^2 dx \le \int\limits_{B_k} |\nabla v^N|^2 + c(x)(v^N)^2 dx \le \int\limits_{M} |\nabla v|^2 + c(x)v^2 dx.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\int\limits_{M} |\nabla u|^2 + c(x)u^2 dx \le \int\limits_{M} |\nabla v|^2 + c(x)v^2 dx.$$

Так как интеграл энергии от v сходится, то сходится и интеграл энергии от u.

Следовательно, u — ограниченное решение уравнения (1) с конечным интегралом энергии. В силу нашего предположения, u есть тождественный нуль. Следовательно, $\{u_k\}$ сходится к нулю в норме $C^2(G)$ (в частности, при $G = B_2$). Из этого следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{B_2} |\nabla u_k|^2 + c(x)u_k^2 dx = 0.$$

Иначе говоря, существует k_1 такая, что при $k > k_1$ выполнено

$$\int\limits_{B_2} |\nabla u_k|^2 + c(x)u_k^2 dx \le a/6.$$

Рассмотрим последовательность $z_k = v - u_k$. Для z_k выполнено

$$\begin{cases} \Delta z_k - c(x)z_k = 0, x \in B_k \\ z_k|_{\partial B_k} = v - v^N|_{\partial B_k} \end{cases}.$$

Покажем, что

$$\frac{a}{3} \le \int\limits_{B_2} |\nabla z_k|^2 + c(x)z_k^2 dx.$$

Из $B_1 \subset B_2$ получаем

$$a = \int\limits_{B_1} |\nabla v|^2 + c(x)v^2 dx \leq \int\limits_{B_2} |\nabla((v - u_k) + u_k)|^2 + c(x)((v - u_k) + u_k)^2 dx.$$

Используя неравенство треугольника $|a + b| \leq |a| + |b|$, получаем

$$\int\limits_{B_2} |\nabla((v-u_k)+u_k)|^2 + c(x)((v-u_k)+u_k)^2 dx \leq \int\limits_{B_2} (|\nabla z_k|+|\nabla u_k|)^2 + c(x)(z_k^2+2z_k u_k+u_k^2) dx =$$

$$= \int\limits_{B_2} (|\nabla z_k|^2 + c(x)z_k^2) dx + \int\limits_{B_2} (|\nabla u_k|^2 + c(x)u_k^2) dx + 2\int\limits_{B_2} (|\nabla z_k||\nabla u_k| + c(x)z_k u_k) dx.$$

Используя неравенство Коши $2ab \leq a^2 + b^2$, получаем

$$2\int\limits_{B_2} |\nabla z_k||\nabla u_k| + c(x)z_k u_k dx \leq \int\limits_{B_2} |\nabla z_k|^2 + c(x)z_k^2 dx + \int\limits_{B_2} |\nabla u_k|^2 + c(x)u_k^2 dx.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$a = \int\limits_{B_1} |\nabla v|^2 + c(x)v^2 dx \leq 2\left(\int\limits_{B_2} |\nabla z_k|^2 + c(x)z_k^2 dx + \int\limits_{B_2} |\nabla u_k|^2 + c(x)u_k^2 dx\right).$$

Следовательно, при $k \geq k_1$ получаем

$$a = \int\limits_{B_1} |\nabla v|^2 + c(x)v^2 dx \leq 2\int\limits_{B_2} |\nabla z_k|^2 + c(x)z_k^2 dx + 2a/6,$$

или,

$$\frac{a}{3} \leq \int\limits_{B_2} |\nabla z_k|^2 + c(x)z_k^2 dx.$$

Покажем, что

$$\int\limits_{B_2} |\nabla z_k|^2 + c(x)z_k^2 dx \leq \frac{a}{4}$$

Используя принцип Дирихле, получаем

$$\int\limits_{B_k} |\nabla z_k|^2 + c(x)z_k^2 \leq \int\limits_{B_k} |\nabla(v - v^N)|^2 + c(x)(v - v^N)^2 dx.$$

Далее получаем

$$\int\limits_{B_k} |\nabla(v - v^N)|^2 + c(x)(v - v^N)^2 dx \leq \int\limits_{M} |\nabla(v - v^N)|^2 + c(x)(v - v^N)^2 dx =$$

$$= \int\limits_{\{x:|v(x)|\geq N\}} |\nabla(v - v^N)|^2 + c(x)(v - v^N)^2 dx + \int\limits_{\{x:|v(x)|<N\}} |\nabla(v - v^N)|^2 + c(x)(v - v^N)^2 dx.$$

Второй интеграл равен 0, так как на этом множестве $v = v^N$. Для первого интеграла не сложно показать, что

$$\int\limits_{\{x:|v(x)|\geq N\}} |\nabla(v - v^N)|^2 + c(x)(v - v^N)^2 dx \leq \int\limits_{\{x:|v(x)|\geq N\}} |\nabla v|^2 + c(x)v^2 dx \leq \frac{a}{4}.$$

В результате имеем

$$\int\limits_{B_2} |\nabla z_k|^2 + c(x)z_k^2 dx \leq \int\limits_{B_k} |\nabla z_k|^2 + c(x)z_k^2 dx \leq \frac{a}{4}.$$

Таким образом, получили противоречие

$$a/3 \leq \int\limits_{B_2} |\nabla z_k|^2 + c(x)z_k^2 dx \leq a/4,$$

что и доказывает теорему.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02479 р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, М. Трудингер. — М. : Наука, 1989. — 464 с.
2. Григорьян, А. А. Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи / А. А. Григорьян, Н. С. Надирашвили // Изв. вузов. Математика. — 1987. — № 5. — С. 25–33.
3. Григорьян, А. А. О существовании положительных фундаментальных решений уравнения Лапласа на римановых многообразиях / А. А. Григорьян // Мат. сб. — 1985. — Т. 128, № 3. — С. 354–363.
4. Григорьян, А. А. Ограниченные решения уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях / А. А. Григорьян // Труды семинара И.Г. Петровского. — 1989. — № 14. — С. 66–77.
5. Курмакаев, Р. Ф. Асимптотические свойства неограниченных решений эллиптических уравнений на модельных римановых многообразиях / Р. Ф. Курмакаев, А. Г. Лосев // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2012. — № 2. — С. 30–40.
6. Лосев, А. Г. Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 6. — С. 41–49.
7. Тиман, А. Ф. Введение в теорию гармонических функций / А. Ф. Тиман, В. Н. Трофимов. — М. : Наука, 1968. — 207 с.
8. Cheng, S. Y. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications / S. Y. Cheng, S. T. Yau // Comm. Pure and Appl. Math. — 1975. — Vol. 28, № 3. — P. 333–354.
9. Classification theory of Riemannian manifolds / S. R. Sario, M. Nakai, C. Wang, L. O. Chung. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1977. — 498 p.

10. Grigor'yan, A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. Grigor'yan // Bulletin of Amer. Math. Soc. — 1999. — № 36. — P. 135–249.

11. Korolkov, S. A. Generalized Harmonic Functions of Riemannian Manifolds with Ends / S. A. Korolkov, A. G. Losev // Mathematische Zeitschrift. — 2012. — Vol. 272, iss. 1. — P. 459–472.

REFERENCES

1. Gilbarg D., Trudinger M. *Ellipticheskie differentsialnye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Elliptic Partial Differential Equations of Second Order]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 464 p.

2. Grigor'yan A.A., Nadirashvili N.S. Liuvillevy teoremy i vneshnie kraevye zadachi [Liouville-Type Theorems and External Bound Problems]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1987, no. 5, pp. 25-33.

3. Grigor'yan A.A. O sushchestvovanii polozhitelnykh fundamentalnykh resheniy uravneniya Laplasa na rimanovykh mnogoobraziyakh [About Existing of Positive Fundomental Solutions of Laplass's Equation on Riemannian Manifolds]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 1985, vol. 128, no. 3, pp. 354-363.

4. Grigor'yan A.A. Ogranichennye resheniya uravneniya Shredingera na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Bounded Solutions of Stationary Shrödinger Equations on Non-Compact Riemannian Manifolds]. *Trudy seminara I.G. Petrovskogo*, 1989, no. 14, pp. 66-77.

5. Kurmakaev R.F., Losev A.G. Asimptoticheskie svoystva neogranichennykh resheniy ellipticheskikh uravneniy na modelnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Asimptotic Property of Non Bounded Solutions of Ellepitic Equation Model Riemannian Manifolds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2012, no. 2, pp. 30-40.

6. Losev A.G., Mazepa E.A. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy nekotorykh uravneniy ellipticheskogo tipa na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [About Asimptotic Property of Solutions of Ellepitic Equation on Non-Compact Riemannian Manifolds]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1999, no. 6, pp. 41-49.

7. Timan A.F., Trofimov V.N. *Vvedenie v teoriyu garmonicheskikh funktsiy* [Introducing in Theory of Harmonic Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 207 p.

8. Cheng S.Y., Yau S.T. Differential Equations on Riemannian Manifolds and Their Geometric Applications. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1975, vol. 28, no. 3, pp. 333-354.

9. Sario S.R., Nakai M., Wang C., Chung L.O. *Classification theory of Riemannian manifolds*. Berlin; Heidelberg, Springer-Verlag, 1977. 498 p.

10. Grigor'yan A. Analytic and Geometric Background of Recurrence and Non-Explosion of the Brownian Motion on Riemannian Manifolds. *Bulletin of Amer. Math. Soc.*, 1999, no. 36, pp. 135-249.

11. Korolkov S.A., Losev A.G. Generalized Harmonic Functions of Riemannian Manifolds with Ends. *Mathematische Zeitschrift*, 2012, vol. 272, iss. 1, pp. 459-472.

THE LIOUVILLE-TYPE THEOREMS FOR SOLUTION OF STATIONARY SCHRÖDINGER EQUATION WITH FINITE DIRICHLET INTEGRAL

Alexander Georgievich Losev

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
allosev59@gmail.com, alexander.losev@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Vladimir Vladimirovich Filatov

Student, Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
vladimfilatov@yandex.ru, matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In this article we learn some property of solutions of stationary Shrodinger equation

$$Lu = \Delta u - c(x)u = 0, \tag{1}$$

where $c(x) \geq 0$ smooth function, with finite Dirichlet integral

$$\int\limits_M |u|^2 + c(x)u^2 dx \tag{2}$$

on non-compact Riemannian manifolds. We prove an analog of Ahlfors's theorem on existence of non-trivial boundary harmonic function with finite energy integral.

Main result of this article is the next theorem. Let M be non-compact Riemannian manifold.

Theorem 1. If non-trivial solution of equation (1) with finite integral (2) exists on M (this solution may be not bounded), then there exists bounded solution of equation (1) with finite energy integral (2).

To prove this theorem we use the following lemmas.

Lemma 1. (Maximum principle) Let B be precompact open set in M with smooth boundary. If

$$Lu = 0, \; x \in B,$$

then

$$\sup_B |u| = \sup_{\partial B} |u|.$$

Lemma 2. Let $B \subset M$ precompact open subset on M, $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ is uniformly bounded on B family of solutions (1), $\phi_i \in C^{2,\alpha}(B)$. Then the family $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ is compact in class $C^2(B')$, where $B' \subset B$.

Let F be set of functions from class $C^2(B)$ with finite Dirichlet integral

$$\int\limits_B |\nabla y|^2 + c(x)y^2 dx.$$

Lemma 3. F is linear space, also on F can be defined dot product as

$$\langle a, b\rangle = \int\limits_B (\langle \nabla a, \nabla b\rangle + c(x)ab)\, dx, \quad \forall a, b \in F.$$

and norm for this dot product as

$$\|a\| = \langle a, a\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_B |\nabla a|^2 + c(x)a^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemma 4. (Dirichlet principle). Let $B \subset M$ — precompact open subset on M with smooth boundary. If for functions $u, v \in C^2(B)$

$$\begin{cases} \Delta u - c(x)u = 0, x \in B, \\ u|_{\partial B} = v|_{\partial B}, \end{cases}$$

then

$$\int\limits_B |\nabla u|^2 + c(x)u^2 dx \leq \int\limits_B |\nabla v|^2 + c(x)v^2 dx.$$

Key words: Dirichlet integral, stationary Schrödinger equation, Liouville-type theorems, Ahlfors's theorem, Riemannian manifolds.