www.volsu.ru
МАТЕМАТИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.5.4
УДК 517.956.25
ББК 22.161.626

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Лариса Михайловна Кожевникова
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета
kosul@mail.ru
просп. Ленина, 37, 453103 г. Стерлитамак, Российская Федерация

Александр Шамилевич Камалетдинов
Аспирант,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета
просп. Ленина, 37, 453103 г. Стерлитамак, Российская Федерация

Аннотация. Для некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с переменными показателями нелинейностей в произвольных неограниченных областях рассматривается задача Дирихле с однородным граничным условием. В анизотропных пространствах Соболева с переменными показателями доказано существование слабых решений.

Ключевые слова: анизотропное эллиптическое уравнение, существование решения, переменные показатели, задача Дирихле, псевдомонотонный оператор.

Введение

Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $\Omega \subsetneq \subsetneq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Для анизотропных квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u))_{x_i} - a_0(\mathrm{x}, u, \nabla u) = 0, \quad \mathrm{x} \in \Omega; \tag{1}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Предполагается, что функции $a_i(\mathrm{x}, s_0, s_1, \ldots, s_n)$ имеют степенной рост по переменным s_i с показателями $p_i(\mathrm{x}) \in (1, \infty)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Условия на функции $a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$, $i = 0, 1, \ldots, n$, будут сформулированы в § 2. В качестве простейшего примера можно привести уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}(|u_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})-2}u_{x_i})_{x_i} - |u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u = \sum_{i=1}^{n}(\phi_i(\mathrm{x}))_{x_i} - \phi_0(\mathrm{x}).$$

В работе [4] для изотропного эллиптического уравнения с переменными показателями нелинейностей доказано существование решения задачи Дирихле в ограниченной области. Для изотропного уравнения с постоянными степенными нелинейностями существование решения задачи Дирихле в произвольной области установлено Ф. Браудером [5], оно основано на абстрактной теореме для псевдомонотонных операторов. В настоящей работе, следуя [5], при условии $p_i(\mathrm{x}) \le p_0(\mathrm{x})$, $i = 1, \ldots, n$, проведено доказательство существования решения задачи (1), (2) без предположения ограниченности области Ω и гладкости ее границы. Ранее Л.М. Кожевниковой, А.А. Хаджи [2] доказано существование решений задачи (1), (2) в произвольных неограниченных областях для анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями.

1. Предварительные сведения

Пусть Q — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим

$$C^+(\overline{Q}) = \{p(\mathrm{x}) \in C(\overline{Q}) \ : \ 1 < p(\mathrm{x}) < +\infty \quad \forall\, \mathrm{x} \in \overline{Q}\},$$

$$L^+_\infty(Q) = \{p(\mathrm{x}) \in L_\infty(Q) \ : \ 1 \le p(\mathrm{x}) < +\infty \quad \text{для п.в.} \quad \mathrm{x} \in Q\}.$$

Пусть $p(\mathrm{x}) \in L^+_\infty(Q)$, положим $p^- = \inf\limits_Q p(\mathrm{x}) \ge 1$, $p^+ = \sup\limits_Q p(\mathrm{x}) < \infty$.

Очевидно неравенство Юнга:

$$|zy| \le |y|^{p(\mathrm{x})} + |z|^{p'(\mathrm{x})}, \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad p'(\mathrm{x}) = p(\mathrm{x})/(p(\mathrm{x}) - 1). \tag{1}$$

Кроме того, ввиду выпуклости справедливо неравенство:

$$|y + z|^{p(\mathrm{x})} \le 2^{p^+-1}(|y|^{p(\mathrm{x})} + |z|^{p(\mathrm{x})}), \quad z, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Определим Лебегово пространство с переменным показателем $L_{p(\cdot)}(Q)$ как множество измеримых на Q вещественнозначных функций $v(\mathrm{x})$ таких, что:

$$\rho_{p(\cdot),Q}(v) = \int\limits_Q |v(\mathrm{x})|^{p(\mathrm{x})}d\mathrm{x} < \infty.$$

Норма Люксембурга в пространстве $L_{p(\cdot)}(Q)$ определяется равенством

$$\|v\|_{p(\cdot),Q} = \|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q)} = \inf\left\{k > 0 \;\middle|\; \rho_{p(\cdot),Q}(v/k) \le 1\right\}.$$

Ниже будут использоваться обозначения $\|v\|_{p(\cdot),\Omega} = \|v\|_{p(\cdot)}$, $\rho_{p(\cdot),\Omega}(v) = \rho_{p(\cdot)}(v)$. Пространство $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ является сепарабельным банаховым пространством. Если $1 < p^- \leq \leq p^+ < \infty$, то пространство $L_{p(\cdot)}(Q)$ рефлексивное.

Для любых $u \in L_{p(\cdot)}(Q)$, $v \in L_{p'(\cdot)}(Q)$ справедливо неравенство Гельдера

$$\left|\int_Q u(\mathrm{x})v(\mathrm{x})d\mathrm{x}\right| \leq 2\|u\|_{p(\cdot),Q}\|v\|_{p'(\cdot),Q}, \tag{3}$$

а также имеют место следующие соотношения [1]:

$$\|v\|^{p^-}_{p(\cdot),Q} - 1 \leq \rho_{p(\cdot),Q}(v) \leq \|v\|^{p^+}_{p(\cdot),Q} + 1, \tag{4}$$

$$\left(\rho_{p(\cdot),Q}(v) - 1\right)^{1/p^+} \leq \|v\|_{p(\cdot),Q} \leq \left(\rho_{p(\cdot),Q}(v) + 1\right)^{1/p^-}. \tag{5}$$

Обозначим $\overrightarrow{\mathrm{p}}(\mathrm{x}) = (p_1(\mathrm{x}), p_2(\mathrm{x}), ..., p_n(\mathrm{x})) \in (L^+_\infty(Q))^n$ и определим для $\mathrm{x} \in Q$,

$$p_-(\mathrm{x}) = \min_{i=\overline{1,n}}\{p_1(\mathrm{x}), p_2(\mathrm{x}), ..., p_n(\mathrm{x})\}, \quad p_+(\mathrm{x}) = \max_{i=\overline{1,n}}\{p_1(\mathrm{x}), p_2(\mathrm{x}), ..., p_n(\mathrm{x})\}.$$

Анизотропное пространство Соболева с переменными показателями $\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)$ определим как пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|v\|_{\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)} = \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{p_i(\cdot),Q}.$$

Если $1 < p_i^-$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то $\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)$ — рефлексивное банахово пространство [6].

Пусть

$$\overline{p}(\mathrm{x}) = n\left(\sum_{i=1}^n 1/p_i(\mathrm{x})\right)^{-1}, \quad p_*(\mathrm{x}) = \begin{cases} \frac{n\overline{p}(\mathrm{x})}{n-\overline{p}(\mathrm{x})}, & \overline{p}(\mathrm{x}) > n, \\ +\infty, & \overline{p}(\mathrm{x}) \leq n, \end{cases} \quad p_\infty(\mathrm{x}) = \max\{p_*(\mathrm{x}), p_+(\mathrm{x})\}.$$

Приведем теорему вложения для пространства $\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)$ [6].

Лемма 1. *Пусть Q — ограниченная область и $\overrightarrow{\mathrm{p}}(\mathrm{x}) = (p_1(\mathrm{x}), p_2(\mathrm{x}), ..., p_n(\mathrm{x})) \in \in (C^+(\overline{Q}))^n$. Если $q(\mathrm{x}) \in C^+(\overline{Q})$ и*

$$q(\mathrm{x}) < p_\infty(\mathrm{x}) \quad \forall\, \mathrm{x} \in Q, \tag{6}$$

то имеет место непрерывное и компактное вложение $\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q) \hookrightarrow\hookrightarrow L_{q(\cdot)}(Q)$.

Лемма 2. *Пусть $1 < p(\mathrm{x}) < \infty$, $v^m(\mathrm{x})$, $m = 1, \ldots, \infty$, $v(\mathrm{x})$ — такие функции из $L_{p(\cdot)}(\Omega)$, что*

$$\|v^m\|_{p(\cdot)} \leq C, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$v^m \to v \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad m \to \infty,$$

тогда $v^m \rightharpoonup v$ слабо в $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ при $m \to \infty$.

Доказательство леммы 2 для ограниченной области проведено в [4], для неограниченной области оно также справедливо.

2. Формулировка результата

Пусть $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\mathrm{x}) = (p_0(\mathrm{x}), p_1(\mathrm{x}), ..., p_n(\mathrm{x})) \in (L_\infty^+(\Omega))^{n+1} \cap (C^+(\overline{\Omega}))^{n+1}$. Предполагается, что функции $a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$, $i = 0, \ldots, n$, измеримы по $\mathrm{x} \in \Omega$ для $\mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s}) = (s_0, s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, непрерывны по $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n+1}$ для почти всех $\mathrm{x} \in \Omega$. Пусть существуют положительные числа $\widehat{a}, \overline{a}$ и измеримые неотрицательные функции $\phi(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega)$, $\Phi_i(\mathrm{x}) \in L_{p_i'(\cdot)}(\Omega), i = 0, 1, \ldots, n$, такие, что для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$ и любых $\mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ справедливы неравенства

$$|a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})| \leq \widehat{a}(|s_i|^{p_i(\mathrm{x})-1} + |s_0|^{p_0(\mathrm{x})/p_i'(\mathrm{x})}) + \Phi_i(\mathrm{x}), \quad i = 0, 1, \ldots, n; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) - a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{t}))(s_i - t_i) > 0, \quad \mathrm{s} \neq \mathrm{t}; \tag{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) s_i \geq \overline{a} \sum_{i=0}^{n} |s_i|^{p_i(\mathrm{x})} - \phi(\mathrm{x}). \tag{3}$$

Применяя (2), из неравенств (1) выводим оценки:

$$|a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})|^{p_i'(\mathrm{x})} \leq \widehat{A}(|s_i|^{p_i(\mathrm{x})} + |s_0|^{p_0(\mathrm{x})}) + \Psi_i(\mathrm{x}), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{1$'$}$$

с $\widehat{A} > 0$ и функциями $\Psi_i(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega),\ i = 0, 1, \ldots, n.$

Через $\mathbf{L}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}'(\cdot)}(\Omega)$ обозначим пространство $L_{p_0'(\cdot)}(\Omega) \times L_{p_1'(\cdot)}(\Omega) \times \ldots \times L_{p_n'(\cdot)}(\Omega)$ с нормой

$$\|\mathbf{v}\|_{\overrightarrow{\mathbf{p}}'(\cdot)} = \|v_0\|_{p_0'(\cdot)} + \|v_1\|_{p_1'(\cdot)} + \ldots + \|v_n\|_{p_n'(\cdot)}, \quad \mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{L}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}'(\cdot)}(\Omega).$$

Введем обозначение $v_{x_0} = v$. Определим пространство Соболева с переменными показателями $\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)} = \|v\|_{p_0(\cdot)} + \|v\|_{\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)} = \sum_{i=0}^{n} \|v_{x_i}\|_{p_i(\cdot)}.$$

Будем считать, что

$$p_0(\mathrm{x}) < p_*(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \Omega; \tag{4}$$

$$p_+(\mathrm{x}) \leq p_0(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \Omega. \tag{5}$$

Из неравенства (1$'$), пользуясь (5), для $u \in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ выводим оценку

$$\|\mathbf{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)\|_{\overrightarrow{\mathbf{p}}'(\cdot)} = \sum_{i=0}^{n} \|a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u)\|_{p_i'(\cdot)} \leq \sum_{i=0}^{n} \left[\rho_{p_i'(\cdot)}(a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u)) + 1\right]^{1/p_i'^-} \leq \tag{6}$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n} \left[\widehat{A}\left(\rho_{p_i(\cdot)}(u_{x_i}) + \rho_{p_0(\cdot)}(u)\right) + \|\Psi_i\|_1 + 1\right]^{1/p_i'^-} < \infty.$$

Далее, по элементу $\mathbf{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) \in \mathbf{L}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}'(\cdot)}(\Omega)$ для $v(\mathrm{x}) \in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ определим функционал $\mathbf{A}(u)$ равенством:

$$\langle \mathbf{A}(u), v \rangle = \int_\Omega \sum_{i=0}^{n} a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u) v_{x_i} d\mathrm{x}. \tag{7}$$

Используя неравенство Гельдера (3), для функций $u(\mathrm{x}), v(\mathrm{x}) \in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ выводим неравенства:

$$|\langle \mathbf{A}(u), v\rangle| \le 2\sum_{i=0}^{n} \|a_i\|_{p_i'(\cdot)}\|v_{x_i}\|_{p_i(\cdot)} \le 2\|\mathbf{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)\|_{\overrightarrow{\mathbf{p}}'(\cdot)}\|v\|_{\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)}. \tag{8}$$

Из (8), (6) следует, что функционал $\mathbf{A}(u)$, определяемый равенством (7) в пространстве $\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$, является ограниченным.

Определение 1. *Обобщенным решением задачи* (1), (2) *назовем функцию* $u(\mathrm{x}) \in$ $\in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$, *удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\langle \mathbf{A}(u), v\rangle = 0 \tag{9}$$

для любой функции $v(\mathrm{x}) \in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *Если выполнены условия* (1)–(5), *то существует обобщенное решение задачи* (1), (2).

3. Доказательство существования

Доказательство теоремы основано на утверждении о псевдомонотонности оператора $\mathbf{A}$.

Определение 2. *Оператор $A : V \to V'$ называется псевдомонотонным, если*

(i) A — ограниченный оператор;

(ii) из условия $u^j \rightharpoonup u$ слабо в V и $\lim\limits_{j\to\infty}\sup\langle A(u^j), u^j - u\rangle \le 0$ следует, что для любого $v \in V$

$$\lim_{j\to\infty}\inf\langle A(u^j), u^j - v\rangle \ge \langle A(u), u - v\rangle. \tag{1}$$

Лемма 3. *Пусть V — рефлексивное сепарабельное банахово пространство. Пусть оператор $A : V \to V'$ обладает следующими свойствами: оператор A псевдомонотонный и коэрцитивный, то есть*

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|} \to \infty \tag{2}$$

при $\|u\| \to \infty$. Тогда отображение $A : V \to V'$ сюръективно, то есть для всякого $F \in V'$ существует такой $u \in V$, что $A(u) = F$ [3, гл. II, § 2, теорема 2.7].

Замечание 2. Чтобы избежать громоздкости в рассуждениях, вместо утверждения типа «из последовательности u^j можно выделить подпоследовательность (обозначим ее также), сходящуюся п.в. в Ω при $j \to \infty$», будем писать просто «последовательность u^j выборочно сходится п.в. в Ω при $j \to \infty$». Соответственно, будем использовать термин «выборочно слабо сходится» и т. п.

Утверждение 1. *Пусть выполнены условия* (1)–(5), *тогда оператор*

$$\mathbf{A} : \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega) \to \left(\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)\right)',$$

определяемый равенством (7), *является псевдомонотонным.*

Доказательство. Ограниченность оператора $\mathbf{A}$ следует из оценок (6), (8). Рассмотрим последовательность $\{u^j\}_{j=1}^{\infty}$ в пространстве $\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ такую, что

$$u^j \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega), \quad j \to \infty; \tag{3}$$

$$\lim_{j\to\infty} \sup\langle \mathbf{A}(u^j), u^j - u\rangle \le 0. \tag{4}$$

Покажем, что

$$\mathbf{A}(u^j) \rightharpoonup \mathbf{A}(u) \quad \text{слабо в} \quad \left(\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)\right)', \quad j \to \infty; \tag{5}$$

$$\langle \mathbf{A}(u^j), u^j - u\rangle \to 0, \quad j \to \infty. \tag{6}$$

Очевидно, что из (5), (6) следует (1).

Прежде всего, из сходимости (3) и неравенства (4) имеем оценки:

$$\|u^j\|_{\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)} \le C_1, \quad j = 1, 2, \ldots; \tag{7}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \rho_{p_i(\cdot)}(u^j_{x_i}) \le C_2, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Кроме того, соединяя (6), (8), выводим оценку

$$\|\mathbf{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)\|_{\overrightarrow{\mathbf{p}}'(\cdot)} = \sum_{i=0}^{n} \|a_i(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)\|_{p_i'(\cdot)} \le C_3, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Зафиксируем произвольное $R > 0$. По лемме 1 пространство $\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega(R+1))$ компактно вложено в $L_{q(\cdot)}(\Omega(R+1))$ для любой функции $q(\mathrm{x})$, удовлетворяющей условию (6). Согласно условиям (4), (5), пространство $\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega(R+1))$ компактно вложено в пространства $L_{p_i(\cdot)}(\Omega(R+1)),\ i = 0, \ldots, n$.

Пусть $\eta_R(r) = \min(1, \max(0, R+1-r))$. Пользуясь (2), (5), (8), выводим неравенства

$$\int\limits_{\Omega(R+1)} \left(\sum_{i=1}^{n} |(u^j\eta_R(|\mathrm{x}|))_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})} + |u^j\eta_R(|\mathrm{x}|)|^{p_0(\mathrm{x})}\right) d\mathrm{x} \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega(R+1)} \left(\sum_{i=1}^{n} (|u^j_{x_i}| + |u^j|)^{p_i(\mathrm{x})} + |u^j|^{p_0(\mathrm{x})}\right) d\mathrm{x} \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega(R+1)} \left(\sum_{i=1}^{n} 2^{p_i^+-1}(|u^j_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})} + |u^j|^{p_i(\mathrm{x})}) + |u^j|^{p_0(\mathrm{x})}\right) d\mathrm{x} \le$$

$$\le C_4 \int\limits_{\Omega(R+1)} \left(\sum_{i=0}^{n} |u^j_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})} + 1\right) d\mathrm{x} =$$

$$= C_4 \left(\sum_{i=0}^{n} \rho_{p_i(\cdot)}(u^j_{x_i}) + \operatorname{mes}\Omega(R+1)\right) \le C_5(R), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, последовательность $\{u^j \eta_R\}_{j=1}^{\infty}$ ограничена в пространстве $\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega(R+$ $+1))$. Ввиду компактности вложений

$$\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega(R+1)) \subset L_{p_i(\cdot)}(\Omega(R+1)), \quad i = 0, \ldots, n,$$

имеют место выборочные сильные сходимости

$$u^j \eta_R \to u \eta_R \quad \text{в} \quad L_{p_i(\cdot)}(\Omega(R+1)), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad j \to \infty,$$

из которых следуют сильные сходимости

$$u^j \to u \quad \text{в} \quad L_{p_i(\cdot)}(\Omega(R)), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad j \to \infty, \tag{10}$$

а также выборочная сходимость $u^j \to u$ почти всюду в $\Omega(R)$. Диагональным процессом устанавливается сходимость

$$u^j \to u \quad \text{п.в.} \quad \text{в} \quad \Omega, \quad j \to \infty. \tag{11}$$

Положим

$$p^j(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j) - a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u)\right)(u^j - u)_{x_i} +$$
$$+ \left(a_0(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j) - a_0(\mathrm{x}, u, \nabla u)\right)(u^j - u), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

тогда

$$\langle \mathbf{A}(u^j) - \mathbf{A}(u), u^j - u\rangle = \int_{\Omega} p^j(\mathrm{x}) d\mathrm{x}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Согласно (3), (4), имеем

$$\lim_{j\to\infty} \sup \int_{\Omega} p^j(\mathrm{x}) d\mathrm{x} \leq 0. \tag{12}$$

Запишем $p^j(\mathrm{x})$ в следующем виде:

$$p^j(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j) - a_i(\mathrm{x}, u^j, \nabla u)\right)(u^j - u)_{x_i} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(a_i(\mathrm{x}, u^j, \nabla u) - a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u)\right)(u^j - u)_{x_i} +$$
$$+ \left(a_0(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j) - a_0(\mathrm{x}, u, \nabla u)\right)(u^j - u) = q^j(\mathrm{x}) + r^j(\mathrm{x}) + s^j(\mathrm{x}), \quad j = 1, \ldots. \tag{13}$$

Покажем, что

$$r^j(\mathrm{x}) \to 0 \quad \text{п.в.} \quad \text{в} \quad \Omega, \quad j \to \infty, \tag{14}$$

$$s^j(\mathrm{x}) \to 0 \quad \text{п.в.} \quad \text{в} \quad \Omega, \quad j \to \infty. \tag{15}$$

Рассмотрим операторы Немыцкого $A_i(u) = a_i(\mathrm{x}, u, \nabla v)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, при фиксированном $v \in \mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ для $\mathrm{x} \in \Omega(R)$, $R > 0$. Применяя оценку (1), имеем неравенства

$$|a_i(\mathrm{x}, u, \nabla v)| \leq \widehat{a}(|v_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})-1} + |u|^{p_0(\mathrm{x})/p_i'(\mathrm{x})}) + \Phi_i(\mathrm{x}), \quad i = 1, \ldots, n,$$

с функциями $\widehat{a}|v_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})-1} + \Phi_i(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega)$. Согласно [7], операторы A_i действуют из $L_{p_0(\cdot)}(\Omega(R))$ в $L_{p'_i(\cdot)}(\Omega(R))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, они непрерывны и ограничены в $L_{p_0(\cdot)}(\Omega(R))$ при любом $R > 0$.

Применяя неравенство (3), выводим

$$\int\limits_{\Omega(R)} |r^j(\mathrm{x})|d\mathrm{x} \leq 2\sum_{i=1}^{n} \|a_i(\mathrm{x}, u^j, \nabla u) - a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u)\|_{p'_i(\cdot),\Omega(R)} \|(u^j - u)_{x_i}\|_{p_i(\cdot),\Omega(R)}.$$

Ввиду сходимости $u^j \to u$ в $L_{p_0(\cdot)}(\Omega(R))$, $j \to \infty$ (см. (10)), и непрерывности операторов $A_i : L_{p_0(\cdot)}(\Omega(R)) \to L_{p_i(\cdot)}(\Omega(R))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, первый сомножитель стремится к нулю, а второй равномерно ограничен (см. (7)). Таким образом, установлено, что для любого $R > 0$ $r^j(\mathrm{x}) \to 0$, $j \to \infty$, в $L_1(\Omega(R))$. Отсюда диагональным процессом устанавливается сходимость (14).

Используя неравенство (3), получаем

$$\int\limits_{\Omega(R)} |s^j(\mathrm{x})|d\mathrm{x} \leq 2\|a_0(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j) - a_0(\mathrm{x}, u, \nabla u)\|_{p'_0(\cdot),\Omega(R)} \|u^j - u\|_{p_0(\cdot),\Omega(R)}.$$

Первый сомножитель равномерно ограничен (см. (9)), а второй стремится к нулю (см. (10)), поэтому для любого $R > 0$ $s^j(\mathrm{x}) \to 0$, $j \to \infty$, в $L_1(\Omega(R))$. Отсюда диагональным процессом устанавливается сходимость (15).

Далее запишем $p^j(\mathrm{x})$ в виде:

$$p^j(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)u^j_{x_i} + a_0(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)u^j - g^j(\mathrm{x}), \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

где

$$g^j(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u)(u^j - u)_{x_i} + a_0(\mathrm{x}, u, \nabla u)(u^j - u) +$$
$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)u_{x_i} + a_0(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)u \in L_1(\Omega), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Используя неравенство (1), для $\varepsilon \in (0, 1)$ получаем

$$|g^j(\mathrm{x})| \leq \varepsilon \left(\sum_{i=0}^{n} |u^j_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})} + \sum_{i=0}^{n} |a_i(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)|^{p'_i(\mathrm{x})}\right) +$$
$$+ C_6(\varepsilon)\left(\sum_{i=0}^{n} |u_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})} + \sum_{i=0}^{n} |a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u)|^{p'_i(\mathrm{x})})\right).$$

Применяя $(1')$, выводим неравенства

$$|g^j(\mathrm{x})| \leq \varepsilon C_7 \sum_{i=0}^{n} |u^j_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})} + C_8(\varepsilon)\left(\sum_{i=0}^{n} |u_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})} + \sum_{i=0}^{n} \Psi_i(\mathrm{x})\right). \tag{17}$$

Используя (3), перепишем (16) в виде:

$$p^j(\mathrm{x}) \geq \overline{a} \sum_{i=0}^{n} |u^j_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})} - \phi(\mathrm{x}) - |g^j(\mathrm{x})|. \tag{18}$$

Соединяя (17), (18), выбирая $\varepsilon < \overline{a}/C_7$, устанавливаем оценку

$$p^j(\mathrm{x}) \geq C_9 \sum_{i=0}^{n} |u^j_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})} - \phi(\mathrm{x}) - C_8 \left(\sum_{i=0}^{n} |u_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})} + \sum_{i=0}^{n} \Psi_i(\mathrm{x}) \right), \quad j = 1, \ldots. \tag{19}$$

Пусть $p^j(\mathrm{x}) = p^{j+}(\mathrm{x}) - p^{j-}(\mathrm{x})$, $p^{j+}(\mathrm{x})$, $p^{j-}(\mathrm{x})$ — положительная и отрицательная части $p^j(\mathrm{x})$ соответственно. Из (19) следует оценка

$$p^{j+}(\mathrm{x}) \geq C_9 \sum_{i=0}^{n} |u^j_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})} - \Psi_u(\mathrm{x}), \quad j = 1, \ldots, \tag{20}$$

с неотрицательной функцией $\Psi_u(\mathrm{x}) = \phi(\mathrm{x}) + C_8 \left(\sum\limits_{i=0}^{n} |u_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})} + \sum\limits_{i=0}^{n} \Psi_i(\mathrm{x}) \right) \in L_1(\Omega)$, конечной п.в. в Ω. Если $\chi^j(\mathrm{x})$ — характеристическая функция множества $\{\mathrm{x} : p^{j-}(\mathrm{x}) > > 0\}$, тогда

$$-p^{j-} = \chi^j q^j + \chi^j r^j + \chi^j s^j,$$

причем, согласно (14), (15), $\chi^j r^j(\mathrm{x}) \to 0$, $\chi^j s^j(\mathrm{x}) \to 0$ п.в. в Ω при $j \to \infty$. Ввиду (2), $\chi^j q^j(\mathrm{x}) \geq 0$ п.в. в Ω, тогда $p^{j-}(\mathrm{x}) \to 0$ п.в. в Ω при $j \to \infty$.

Кроме того, из (19) следует оценка

$$p^j(\mathrm{x}) \geq -\phi(\mathrm{x}) - C_8 \left(\sum_{i=0}^{n} |u_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})} + \sum_{i=0}^{n} \Psi_i(\mathrm{x}) \right) = -\Psi_u(\mathrm{x}), \quad j = 0, 1, \ldots.$$

Отсюда имеем: $p^{j-}(\mathrm{x}) \leq \Psi_u(\mathrm{x})$, $j = 1, \ldots$. Тогда, согласно теореме Лебега,

$$p^{j-}(\mathrm{x}) \to 0 \quad \text{в} \quad L_1(\Omega), \quad j \to \infty. \tag{21}$$

Поэтому, согласно (12),

$$0 \leq \limsup_{j\to\infty} \int_\Omega p^{j+}(\mathrm{x}) d\mathrm{x} = \limsup_{j\to\infty} \int_\Omega p^j(\mathrm{x}) d\mathrm{x} + \limsup_{j\to\infty} \int_\Omega p^{j-}(\mathrm{x}) d\mathrm{x} \leq 0.$$

Следовательно,

$$p^{j+}(\mathrm{x}) \to 0 \quad \text{в} \quad L_1(\Omega), \quad j \to \infty. \tag{22}$$

Таким образом, из (21), (22) имеем сходимость

$$p^j(\mathrm{x}) \to 0 \quad \text{в} \quad L_1(\Omega), \quad j \to \infty, \tag{23}$$

а также выборочную сходимость

$$p^{j+}(\mathrm{x}) \to 0, \quad p^j(\mathrm{x}) \to 0 \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad j \to \infty. \tag{24}$$

Установим сходимость

$$u^j_{x_i}(\mathrm{x}) \to u_{x_i}(\mathrm{x}) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j \to \infty. \tag{25}$$

Обозначим через $\Omega' \subset \Omega$ подмножество точек полной меры, для которых имеют место сходимости (11), (24) и выполнены неравенства (1)–(3).

От противного, пусть в некоторой точке $\mathrm{x}^* \in \Omega'$ нет сходимости. Обозначим $s_0^j = u^j(\mathrm{x}^*)$, $s_0 = u(\mathrm{x}^*)$, $s_i^j = u^j_{x_i}(\mathrm{x}^*)$, $s_i = u_{x_i}(\mathrm{x}^*)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Предположим, что последовательность $\sum\limits_{i=0}^{n} |s_i^j|^{p_i(\mathrm{x}^*)}$, $j = 1, 2, \ldots$ не ограничена. Тогда из оценки (20) следует неограниченность последовательности $p^{j+}(\mathrm{x}^*)$, $j = 1, 2, \ldots$, что противоречит (24). Отсюда следует ограниченность последовательностей $\{s_i^j\}_{j=1}^{\infty}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\mathrm{s}^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ — один из частичных пределов $\mathrm{s}^j = (s_1^j, s_2^j, \ldots, s_n^j)$ при $j \to \infty$, тогда, с учетом (11), имеем

$$s_0^j \to s_0, \quad s_i^j \to s_i^*, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j \to \infty.$$

Поэтому, применяя (14), (15), (24), из (13) и непрерывности $a_i(\mathrm{x}^*, s_0, \mathrm{s})$ по $\mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s})$ вытекает, что

$$p^j(\mathrm{x}^*) \to \sum_{i=1}^{n} \left(a_i(\mathrm{x}^*, s_0, \mathrm{s}^*) - a_i(\mathrm{x}^*, s_0, \mathrm{s})\right)(s_i^* - s_i) = 0,$$

следовательно, согласно (2), $\mathrm{s} = \mathrm{s}^*$. Это противоречит тому, что в точке x^* нет сходимости.

Таким образом, из (11), (25) и непрерывности $a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$ по $\mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s})$ следует, что

$$a_i(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j) \to a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad j \to \infty.$$

Кроме того, ввиду (9), последовательности $\{a_i(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)\}_{j=1}^{\infty}$ ограничены в $L_{p_i'(\cdot)}(\Omega)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Согласно лемме 2 имеем слабые сходимости

$$a_i(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j) \rightharpoonup a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u) \quad \text{в} \quad L_{p_i'(\cdot)}(\Omega), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{26}$$

Очевидно, из (26) вытекает слабая сходимость (5).

Чтобы завершить доказательство, заметим, что из (3), (23) следует (6)

$$\langle \mathbf{A}(u^j), u^j - u \rangle = \langle \mathbf{A}(u^j) - \mathbf{A}(u), u^j - u \rangle + \langle \mathbf{A}(u), u^j - u \rangle \to 0, \quad j \to \infty.$$

Доказательство теоремы. Докажем коэрцитивность оператора $\mathbf{A}$. Пользуясь (3), (4), выводим

$$\langle \mathbf{A}(u), u \rangle = \sum_{i=0}^{n} \int_{\Omega} a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u) u_{x_i} d\mathrm{x} \geq \overline{a} \sum_{i=0}^{n} \rho_{p_i(\cdot)}(u_{x_i}) - \|\phi\|_1 \geq \tag{27}$$

$$\geq \overline{a} \sum_{i=0}^{n} \|u_{x_i}\|_{p_i(\cdot)}^{p_i^-} - \overline{a}(n+1) - \|\phi\|_1.$$

Пусть $\|u^j\|_{\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)} \to \infty$ при $j \to \infty$. Тогда для любого $l > 0$ найдется j_0 такое, что для всех $j \geq j_0$ справедливы неравенства

$$\sum_{i=0}^{n} \|u^j_{x_i}\|_{p_i(\cdot)} > l(n+1). \tag{28}$$

При каждом $j \geq j_0$ найдется хотя бы одно слагаемое больше l. Пусть для определенности при фиксированном $j \geq j_0$ наибольшим является первое слагаемое $\|u^j\|_{p_0(\cdot)} > l$. Соединяя (27), (28), получаем

$$\frac{\langle \mathbf{A}(u), u\rangle}{\|u^j\|_{\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)}} \geq \overline{a}\frac{\|u^j\|^{p_0^- -1}_{p_0(\cdot)}}{(n+1)} - \frac{C_1}{(n+1)l} > C_2 l^{p_0^- -1} - \frac{C_3}{l}.$$

Отсюда, ввиду произвольности l и j, $j \geq j_0$, следует (2).

Из утверждения 1, согласно лемме 3, следует существование функции $u \in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ такой, что $\mathbf{A}(u) = \mathbf{O}$. Таким образом, для любого $v \in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ справедливо тождество (9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жиков, В. В. О вариационных задачах и нелинейных эллиптических уравнениях с нестандартными условиями роста / В. В. Жиков // Проблемы математического анализа. — 2011. — Вып. 54. — С. 23–112.
2. Кожевникова, Л. М. О решениях эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях / Л. М. Кожевникова, А. А. Хаджи // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. — 2015. — Т. 19, № 1. — С. 44–62.
3. Лионс, Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж. Л. Лионс. — М. : Мир, 1972. — 596 с.
4. Benboubker, M. B. Quasilinear elliptic problems with nonstandard growths / M. B. Benboubker, E. Azroul, A. Barbara // Electronic Journal of Differential Equations. — 2011. — № 62. — P. 1–16.
5. Browder, F. E. Pseudo-monotone operators and nonlinear elliptic boundary value problems on unbounded domains / F. E. Browder // Proc. Nation. Acad. Sci. USA. — 1977. — Vol. 74, № 7. — P. 2659–2661.
6. Fan, X. Anisotropic variable exponent Sobolev spaces and $p(x)$-Laplacian equations / X. Fan // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2011. — Vol. 56, № 7–9. — P. 623–642. — DOI: http://dx.doi.org/10.1080/17476931003728412.
7. Fan, X. On the Spases $L^p(x)$ and $W^{m,p(x)}$ / X. Fan, D. Zhao // J. Math. Anal. Appl. — 2001. — Vol. 263. — P. 424–446. — DOI: http://doi:10.1006/jmaa.2000.7617.

REFERENCES

1. Zhikov V.V. O variatsionnykh zadachakh i nelineynykh ellipticheskikh uravneniyakh s nestandartnymi usloviyami rosta [On Variational Problems and Nonlinear Elliptic Equations with Non-Standard Growth Conditions]. *Problemy matematicheskogo analiza*, 2011, iss. 54, pp. 23-112.
2. Kozhevnikova L.M., Khadzhi A.A. O resheniyakh ellipticheskikh uravneniy s nestepennymi nelineynostyami v neogranichennykh oblastyakh [On Solutions of Elliptic Equations with Nonpower Nonlinearities in Unbounded Domains]. *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta*, 2015, vol. 19, no. 1, pp. 44-62.
3. Lions Zh.L. *Nekotorye metody resheniya nelineynykh kraevykh zadach* [Some Methods of Solving Nonlinear Boundary Value Problems]. Moscow, Mir Publ., 1972. 596 p.
4. Benboubker M.B., Azroul E., Barbara A. Quasilinear Elliptic Problems with Nonstandard Growths. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2011, no. 62, pp. 1-16.
5. Browder F.E. Pseudo-Monotone Operators and Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems on Unbounded Domains. *Proc. Nation. Acad. Sci. USA*, 1977, vol. 74, no. 7, pp. 2659-2661.

6. Fan X. Anisotropic Variable Exponent Sobolev Spaces and $p(X)$-Laplacian Equations. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2011, vol. 56, no. 7–9, pp. 623-642. DOI: http://dx.doi.org/10.1080/17476931003728412.
7. Fan X., Zhao D. On the Spases $L^p(X)$ and $W^m, p(x)$. *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, vol. 263, pp. 424-446. DOI: http://doi:10.1006/jmaa.2000.7617.

EXISTENCE OF SOLUTIONS OF ANISOTROPIC ELLIPTIC EQUATIONS WITH VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY IN UNBOUNDED DOMAINS

Larisa Mikhaylovna Kozhevnikova

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Mathematical Analysis,
Sterlitamak Branch of Bashkir State University
kosul@mail.ru
Prosp. Lenina, 37, 453103 Sterlitamak, Russian Federation

Alexander Shamilevich Kamaletdinov

Postgraduate Student,
Sterlitamak Branch of Bashkir State University
Prosp. Lenina, 37, 453103 Sterlitamak, Russian Federation

Abstract. For anisotropic quasilinear second order elliptic equations in divergence form with a non-standard growth conditions

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u))_{x_i} - a_0(\mathrm{x}, u, \nabla u) = 0, \quad \mathrm{x} \in \Omega; \tag{1}$$

in domain Ω of the space $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, the Dirichlet problem is considered with homogeneous boundary condition

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

It is assumed that the functions $a_i(\mathrm{x}, s_0, s_1, \ldots, s_n)$ have a polinomial growth on variable s_i with powers $p_i(\mathrm{x}) \in (1, \infty)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. As example we can use the equation

$$\sum_{i=1}^{n}(|u_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})-2}u_{x_i})_{x_i} - |u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u = \sum_{i=1}^{n}(\phi_i(\mathrm{x}))_{x_i} - \phi_0(\mathrm{x}).$$

In the paper by M.B. Benboubker, E. Azroul, A. Barbara (Quasilinear elliptic problems with nonstandard growths, Electronic Journal of Differential Equations, 2011) the existence of solutions of the Dirichlet problem in a bounded domain was proved for an isotropic elliptic equations with variable nonlinearities. For isotropic equations with constant power of nonlinearity the existence of solutions of the Dirichlet problem in an arbitrary domain was established by F.E. Browder (Pseudo-monotone operators and nonlinear elliptic boundary value

problems on unbounded domains, Proc. Nati. Acad. Sci. USA, 1977). The proof is based on an abstract theorem for pseudomonotone operators. In this paper we prove the existence of solutions of the problem (1), (2) without the assumption of boundedness of Ω and the smoothness of its boundary.

Note by $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ Lebesgue spaces with variable exponent $p(\mathrm{x})$ and the Luxemburg norm $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$. Let the $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\mathrm{x}) = (p_0(\mathrm{x}), p_1(\mathrm{x}), ..., p_n(\mathrm{x})) \in (L_\infty^+(\Omega))^{n+1} \cap$ $\cap\, (C^+(\overline{\Omega}))^{n+1}$. The Sobolev — Orlicz space with variable exponents $\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ is defined as the completion of the space $C_0^\infty(\Omega)$ in the norm

$$\|v\|_{\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)} = \|v\|_{p_0(\cdot)} + \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{p_i(\cdot)}.$$

It is assumed that

$$p_+(\mathrm{x}) \le p_0(\mathrm{x}) < p_*(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \Omega, \tag{3}$$

where

$$p_+(\mathrm{x}) = \max\{p_1(\mathrm{x}), p_2(\mathrm{x}), ..., p_n(\mathrm{x})\}, \quad p_*(\mathrm{x}) = \begin{cases} \frac{n\overline{p}(\mathrm{x})}{n-\overline{p}(\mathrm{x})}, & \overline{p}(\mathrm{x}) > n, \\ +\infty, & \overline{p}(\mathrm{x}) \le n, \end{cases},$$

$$\overline{p}(\mathrm{x}) = n\left(\sum_{i=1}^n 1/p_i(\mathrm{x})\right)^{-1}.$$

And it is also assumed that $a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$, $i = 0, \dots, n$, $\mathrm{x} \in \Omega$, $\mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s}) =$ $= (s_0, s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, are the Caratheodory functions, and there exist positive numbers $\widehat{a}, \overline{a}$ and measurable non-negative function $\phi(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega)$, $\Phi_i(\mathrm{x}) \in$ $\in L_{p_i'(\cdot)}(\Omega)$, $p_i'(\mathrm{x}) = p_i(\mathrm{x})/(p_i(\mathrm{x}) - 1)$, $i = 0, 1, \dots, n$, such that for almost all $\mathrm{x} \in \Omega$ and any $\mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ the inequalities hold:

$$|a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})| \le \widehat{a}(|s_i|^{p_i(\mathrm{x})-1} + |s_0|^{p_0(\mathrm{x})/p_i'(\mathrm{x})}) + \Phi_i(\mathrm{x}), \quad i = 0, 1, \dots, n; \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) - a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{t}))(s_i - t_i) > 0, \quad \mathrm{s} \ne \mathrm{t}; \tag{5}$$

$$\sum_{i=0}^n a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) s_i \ge \overline{a} \sum_{i=0}^n |s_i|^{p_i(\mathrm{x})} - \phi(\mathrm{x}). \tag{6}$$

Elliptic operators $\mathbf{A} : \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega) \to \left(\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)\right)'$, corresponding to the problem (1), (2), defined by the equation:

$$\langle \mathbf{A}(u), v \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i=0}^n a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u) v_{x_i} d\mathrm{x}, \quad u(\mathrm{x}), v(\mathrm{x}) \in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega).$$

It is proved that operator $\mathbf{A}$ is pseudomonotone, bounded and coercitive. On the basis of these properties we prove the theorem.

Theorem. If the conditions (3)–(6), there is a generalized solution of the problem (1), (2).

Key words: anisotropic elliptic equation, existence of solution, variable exponents, Dirichlet problem, pseudomonotone operator.