DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.5.5
УДК 517.986.62
ББК 22.152

О СПЕКТРАЛЬНОМ СИНТЕЗЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ МЕДЛЕННОГО РОСТА НА КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

Сергей Сергеевич Платонов
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии и топологии,
Петрозаводский государственный университет
ssplatonov@yandex.ru, platonov@psu.karelia.ru
просп. Ленина, 33, 185910 г. Петрозаводск, Российская Федерация

Аннотация. Рассматриваются некоторые задачи спектрального синтеза в топологическом векторном пространстве $\mathscr{S}'(G)$, состоящем из функций медленного роста на дискретной абелевой группе G. Доказано, что для любой конечно порожденной дискретной абелевой группы G в пространстве $\mathscr{S}'(G)$ справедлив спектральный синтез, то есть что любое инвариантное относительно сдвигов замкнутое линейное подпространство $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{S}'(G)$ совпадает с замыканием линейной оболочки всех содержащихся в $\mathscr{H}$ экспоненциальных мономов.

Ключевые слова: спектральный синтез, локально компактные абелевы группы, конечно порожденные абелевы группы, функции медленного роста, функции Брюа — Шварца.

1. Введение и формулировка основных результатов

Пусть G — локально компактная абелева группа (LCA-группа), если не оговорено противное, то операция в G будет задаваться аддитивно. Пусть $\mathscr{F}$ — топологическое векторное пространство (ТВП), состоящее из комплекснозначных функций на G. Будем называть пространство $\mathscr{F}$ *трансляционно инвариантным*, если $\mathscr{F}$ инвариантно относительно преобразований (сдвигов)

$$\tau_y : f(x) \mapsto f(x-y), \quad f(x) \in \mathscr{F}, y \in G, \tag{1}$$

и все операторы τ_y являются непрерывными операторами в пространстве $\mathscr{F}$.

Замкнутое линейное подпространство $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{F}$ называется *инвариантным подпространством*, если $\tau_y(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{H}$ для любого $y \in G$.

Экспоненциальной функцией или *обобщенным характером* называется произвольный непрерывный гомоморфизм из группы G в мультипликативную группу $\mathbb{C}_* := := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ненулевых комплексных чисел. Частным случаем экспоненциальных функций являются характеры — непрерывные гомоморфизмы группы G в группу комплексных чисел, по модулю равных 1. Непрерывные гомоморфизмы из группы G в аддитивную группу комплексных чисел называются *аддитивными функциями*. Функция $x \mapsto P(a_1(x), \ldots, a_m(x))$ на G называется *полиномиальной*, если $P(z_1, \ldots, z_m)$ — комплексный полином от m переменных и $a_1, \ldots, a_m$ — аддитивные функции. Произведение полиномиальной и экспоненциальной функций называется *экспоненциальным мономом*, а сумма экспоненциальных мономов называется *экспоненциальным полиномом* на группе G.

Пусть $\mathscr{F}$ — трансляционно инвариантное функциональное пространство на группе G, $\mathscr{H}$ — инвариантное подпространство в $\mathscr{F}$.

Определение 1. *Инвариантное подпространство $\mathscr{H}$ допускает спектральный синтез, если оно совпадает с замыканием в $\mathscr{F}$ линейной оболочки всех содержащихся в $\mathscr{H}$ экспоненциальных мономов. В пространстве $\mathscr{F}$ справедлив спектральный синтез, если любое инвариантное подпространство $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{F}$ допускает спектральный синтез.*

Приведенное определение спектрального синтеза берет свое начало с работы Л. Шварца [16], в которой доказана справедливость спектрального синтеза для случая, когда $G = (\mathbb{R}, +)$, а пространство $\mathscr{F}$ может совпадать с пространством $C(\mathbb{R})$ всех непрерывных функций на $\mathbb{R}$ или с пространством $\mathscr{E}(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$ всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ (если не оговорено противное, то все функции предполагаются комплекснозначными и все классические функциональные пространства рассматриваются с обычными топологиями). Другие примеры функциональных пространств на $\mathbb{R}$, в которых справедлив спектральный синтез, см. в [9]. Справедливость или несправедливость спектрального синтеза зависит как от группы G, так и от ТВП $\mathscr{F}$. Так, если взять $G = (\mathbb{R}^n, +)$, $n \geq 2$, то в пространствах $C(\mathbb{R}^n)$ и $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ спектральный синтез не справедлив (см. [2]), а в пространстве $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ обобщенных функций медленного роста на $\mathbb{R}^n$ спектральный синтез справедлив (см. [15]).

Одним из естественных функциональных пространств, в которых можно изучать спектральный синтез, является пространство $C(G)$ всех непрерывных функций на LCA-группе G. Наиболее изучен здесь случай, когда G — дискретная абелева группа. Тогда пространство $C(G)$ состоит из всех комплекснозначных функций на G и снабжается топологией поточечной сходимости. Для дискретных абелевых групп в работе [13] получен критерий справедливости спектрального синтеза $C(G)$. Обзор результатов по спектральному синтезу на дискретных абелевых группах см. в [17]. Для произвольных LCA-групп вопрос об описании групп, для которых справедлив спектральный синтез в пространстве $C(G)$, остается открытым. Отметим, что в работах [6] и [7] установлена справедливость спектрального синтеза в пространстве $C(G)$ для любой поэлементно компактной LCA-группы G.

Другим естественным функциональным пространством является пространство $\mathscr{S}'(G)$ всех обобщенных функций медленного роста на LCA-группе G. Определение пространства $\mathscr{S}'(G)$ для произвольной LCA-группы G дано в работе Ф. Брюа [12]. Как и в классическом случае $G = \mathbb{R}$, пространство $\mathscr{S}'(G)$ является двойственным пространством к пространству $\mathscr{S}(G)$ быстро убывающих функций на группе G. Функции из пространства $\mathscr{S}(G)$ называются функциями Брюа — Шварца на группе G. Определение и основные свойства функций Брюа — Шварца см. в работах [12] и [14].

В настоящей работе изучаются некоторые задачи спектрального синтеза в пространстве $\mathscr{S}'(G)$ для случая, когда G — дискретная абелева группа. В этом случае обобщенные функции из $\mathscr{S}'(G)$ совпадают с обычными функциями, поэтому будем называть пространство $\mathscr{S}'(G)$ пространством функций медленного роста на G.

Приведем удобное для дальнейшего определение пространства $\mathscr{S}'(G)$ на конечно порожденной дискретной абелевой группе G.

Пусть G — конечно порожденная абелева группа, $v_1, \dots, v_n$ — система образующих группы G. Любой элемент $x \in G$ можно представить в виде $x = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n$, где $t_j \in \mathbb{Z}$ (такое представление может быть не единственным). Для $x \in G$ определим число $|x| \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ равенством

$$|x| = |x|_G := \min\{|t_1| + \dots + |t_n| : x = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n,\ t_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \dots, n\}. \qquad (2)$$

Очевидно, что для функции $x \mapsto |x|$ справедливы следующие свойства: 1) $|x| \geq 0$ и $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; 2) $|-x| = |x|$; 3) $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\ x, y \in G$; 4) для любого $d \in \mathbb{Z}_+$ неравенству $|x| \leq d$ удовлетворяет только конечное множество элементов группы G.

Функция $|x|$ является частным случаем квазинормы на группе G (см., например, [1]). Будем называть ее квазинормой, порожденной системой образующих $v_1, \dots, v_n$.

Для любого $k > 0$ через $\mathscr{S}'_k(G)$ обозначим множество всех комплекснозначных функций $f(x)$ на G, удовлетворяющих условию

$$|f(x)|(1 + |x|)^{-k} \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \qquad (3)$$

Относительно нормы

$$\|f\|_{G,k} = \|f\|_k := \sup_{x \in G} |f(x)|(1 + |x|)^{-k} \qquad (4)$$

множество $\mathscr{S}'(G)$ является банаховым пространством. Очевидно, что $\mathscr{S}'_{k_1}(G) \subseteq \mathscr{S}'_{k_2}(G)$ при $k_1 < k_2$, причем вложение непрерывно.

Пусть

$$\mathscr{S}'(G) := \bigcup_{k > 0} \mathscr{S}'_k(G). \qquad (5)$$

Пространство $\mathscr{S}'(G)$ снабдим топологией индуктивного предела банаховых пространств $\mathscr{S}'_k(G)$ (см., например, [10]). Тогда $\mathscr{S}'(G)$ является локально выпуклым пространством. Используя свойства квазинормы, легко доказать, что каждое банахово пространство $\mathscr{S}'_k(G)$ является трансляционно инвариантным функциональным пространством на группе G, а из определения топологии индуктивного предела банаховых пространств вытекает, что и ТВП $\mathscr{S}'(G)$ будет трансляционно инвариантным пространством.

В определении пространства $\mathscr{S}'(G)$ участвует некоторая система образующих группы G. Проверим, что это пространство не зависит от выбора системы образующих. Пусть $v_1^1, \dots, v_n^1$ и $v_1^2, \dots, v_m^2$ — две системы образующих группы G и пусть $|x|_1$ и $|x|_2$ — квазинормы, построенные по этим системам образующих. Пространства $\mathscr{S}'(G)$, построенные по квазинормам $|\cdot|_1$ и $|\cdot|_2$, будем обозначать ${}^1\mathscr{S}'(G)$ и ${}^2\mathscr{S}'(G)$ соответственно.

Пусть $x \in G$ и $x = t_1 v_1^1 + \dots t_n v_n^1$, причем числа $t_1, \dots, t_n$ выбраны так, что $|x|_1 = |t_1| + \dots + |t_n|$. Тогда

$$|x|_2 \leq \sum_{j=1}^{n} |t_j||v_j^1|_2 \leq c_1 |x|_1, \qquad (6)$$

где $c_1 = \max\{|v_j^1|_2,\ j = 1, \ldots, n\}$ — не зависящее от x положительное число. Аналогично доказывается неравенство

$$|x|_1 \le c_2 |x|_2, \quad x \in G, \tag{7}$$

где $c_2 > 0$ — не зависящее от x число. Из неравенств (6) и (7) легко получить, что ${}^1\mathscr{S}'(G) = {}^2\mathscr{S}'(G)$ как топологические векторные пространства.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Для любой конечно порожденной абелевой группы G в пространстве $\mathscr{S}'(G)$ справедлив спектральный синтез.*

Доказательство теоремы 1 является основной целью настоящей работы. В § 3 приводится доказательство теоремы 1 для конечно порожденной свободной абелевой группы, а в § 4 приводится доказательство теоремы 1 для произвольной конечно порожденной абелевой группы.

2. Вспомогательные результаты

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые вспомогательные результаты о свойствах функций медленного роста и функций Брюа — Шварца на дискретных конечно порожденных абелевых группах. Эти результаты будут использоваться в § 3 и § 4 для доказательства теоремы 1. Всюду далее, если не оговорено противное, G — произвольная дискретная конечно порожденная абелева группа.

Предварительно получим некоторые вспомогательные результаты.

Предложение 1. *Если $\varphi(x)$ — экспоненциальная функция на группе G и $\varphi \in \mathscr{S}'(G)$, то φ является характером, то есть $|\varphi(x)| = 1$ для любого $x \in G$.*

Доказательство. Предположим, что $|\varphi(x_0)| \ne 1$ для некоторого $x_0 \in G$. Без ограничения общности можно считать, что $|\varphi(x_0)| > 1$, пусть $\alpha = \varphi(x_0)$. Пусть P — произвольная конечная система образующих группы G, содержащая элемент x_0, $|x|$ — квазинорма на группе G, построенная по системе образующих P (см. (2)). Если $x = nx_0$, $n \in \mathbb{Z}$, то из определения квазинормы вытекает, что $|nx_0| \le |n|$.

Так как $\varphi \in \mathscr{S}'(G)$, то для некоторого числа $k > 0$ справедливо неравенство

$$|\varphi(x)| \le c(1 + |x|)^k \quad \forall x \in G, \tag{8}$$

где c — не зависящая от x постоянная. Если $x = nx_0$, то из неравенства (8) и из $|nx_0| \le |n|$ вытекает

$$|\alpha|^n \le c(1 + |n|)^k \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

что невозможно при $n \to +\infty$, так как $|\alpha| > 1$. Следовательно, $|\alpha| = 1$ и функция φ является характером. $\square$

Для любой функции $f(x)$ на группе G обозначим через $L(f)$ линейную оболочку функций вида $(\tau_y f)(x) = f(x - y)$, $y \in G$.

Предложение 2. *Пусть $f(x) = \varphi(x)p(x)$ — ненулевой экспоненциальный моном на LCA-группе G, где $\varphi(x)$ — экспоненциальная функция; $p(x)$ — полиномиальная функция на G. Тогда экспоненциальная функция $\varphi(x)$ содержится в $L(f)$.*

Доказательство. См. [8, лемма 4]. $\square$

Если G — дискретная абелева группа, то из предложений 1 и 2 вытекает, что в пространстве $\mathscr{S}'(G)$ могут содержаться только ненулевые экспонециальные мономы вида $\chi(x)p(x)$, где $\chi(x)$ — характер группы G, $p(x)$ — полиномиальная функция на группе G.

Далее нам потребуются функции Брюа — Шварца на конечно порожденных дискретных абелевых группах и на компактных группах Ли, поэтому приведем определения пространств Брюа — Шварца $\mathscr{S}(G)$ для этих случаев. Общее определение пространства Брюа — Шварца для произвольной LCA-группы см. в [12] или [14].

Если G — конечно порожденная дискретная абелева группа, то, по определению, пространство $\mathscr{S}(G)$ состоит из всех функций $g(x)$ на G, удовлетворяющих условиям

$$|g(x)|(1+|x|)^k \to 0 \text{ при } |x| \to \infty \tag{9}$$

для любого $k > 0$, где квазинорма $|x|$ определена в (2).

Пространство $\mathscr{S}(G)$ является локально выпуклым пространством с топологией, порожденной семейством полунорм

$$\mathfrak{n}_{G,k}(g) = \mathfrak{n}_k(g) := \sup_{x \in G} |g(x)|(1+|x|)^k, \quad k > 0. \tag{10}$$

Пространство функций медленного роста $\mathscr{S}'(G)$ является двойственным пространством к пространству $\mathscr{S}(G)$ относительно двойственности

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in G} f(x)g(x), \quad f \in \mathscr{S}'(G),\, g \in \mathscr{S}(G). \tag{11}$$

Проверим, что ряд в правой части формулы (11) абсолютно сходится. Пусть n — число образующих группы G. Так как $f \in \mathscr{S}'(G)$, то $f \in \mathscr{S}'_k(G)$ для некоторого $k > 0$ и, следовательно,

$$\|f\|_{G,k} = \sup_{x \in G} |f(x)|(1+|x|)^{-k} < \infty.$$

Тогда

$$\sum_{x \in G} |f(x)||g(x)| = \sum_{x \in G} |f(x)|(1+|x|)^{-k}\, |g(x)|(1+|x|)^{k+n+2}\, (1+|x|)^{-n-2} \le$$
$$\le c\, \|f\|_{G,k}\, \mathfrak{n}_{G,k+n+2}(g) < \infty,$$

где

$$c = \sum_{x \in G} (1+|x|)^{-n-2}.$$

Заметим, что из определения $|x|$ (см. (2)) вытекает, что

$$c = \sum_{x \in G} (1+|x|)^{-n-2} \le \sum_{(t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{Z}^n} (1+|t_1|+\dots+|t_n|)^{-n-2} < \infty. \tag{12}$$

Если G — компактная абелева группа Ли, то, по определению, пространство Брюа — Шварца $\mathscr{S}(G)$ совпадает с пространством $C^\infty(G)$ гладких (бесконечно дифференцируемых) функций на группе G. Отметим, что любая компактная абелева группа Ли изоморфна группе Ли вида $\mathbb{T}^m \times F$, где $\mathbb{T}^m$ — m-мерный тор; F — конечная дискретная абелева группа. Пространство $\mathscr{S}(G) = C^\infty(G)$ является локально выпуклым пространством с топологией равномерной сходимости на G вместе со всеми производными.

Пусть G — произвольная LCA-группа; dx — элемент меры Хаара на группе G; $L^1(G) = L^1(G, dx)$ — лебегово банахово пространство,

$$\|f\|_1 := \int\limits_G |f(x)|\, dx, \quad f \in L^1(G), \text{ —}$$

норма в $L^1(G)$. Банахово пространство $L^1(G)$ является алгеброй относительно свертки

$$(f * g)(x) = \int\limits_G f(x-y)g(y)\, dy, \quad f, g \in L^1(G).$$

Пусть $\widehat{G}$ — множество всех характеров группы G. Снабженное операцией поточечного умножения характеров и компактно открытой топологией множество $\widehat{G}$ становится LCA-группой, которая называется двойственной группой к группе G.

Преобразованием Фурье функции $f(x) \in L^1(G)$ называется функция $\widehat{f}(\chi)$ на двойственной группе $\widehat{G}$, которая определяется формулой

$$\widehat{f}(\chi) := \int\limits_G f(x)\, \overline{\chi(x)}\, dx, \tag{13}$$

где $\chi \in \widehat{G}$, $\overline{\chi(x)}$ — число, комплексно сопряженное к $\chi(x)$. Отметим, что в двойственной группе $\widehat{G}$ операция будет задаваться мультипликативно. В частном случае, когда G — дискретная абелева группа, преобразование Фурье имеет вид

$$\widehat{f}(\chi) = \sum_{x \in G} f(x)\, \overline{\chi(x)}. \tag{14}$$

Подробные сведения о преобразовании Фурье на LCA-группах см. в [11].

Приведем некоторые свойства функций Брюа — Шварца, которые справедливы для любой LCA-группы G (см. [12] или [14]):

1°. $\mathscr{S}(G) \subseteq L^1(G)$;

2°. $\mathscr{S}(G)$ является топологической алгеброй относительно поточечного умножения функций и топологической алгеброй относительно свертки функций. Чтобы различать эти алгебры, будем использовать обозначение $\mathscr{S}_{mult}(G)$, если $\mathscr{S}(G)$ рассматривается как топологическая алгебра относительно поточечного умножения функций, и обозначение $\mathscr{S}_{conv}(G)$, если $\mathscr{S}(G)$ рассматривается как топологическая алгебра относительно свертки функций.

3°. Преобразование Фурье $\Phi : f(x) \mapsto \widehat{f}(\chi)$ задает изоморфизм топологической алгебры $\mathscr{S}_{conv}(G)$ на топологическую алгебру $\mathscr{S}_{mult}(\widehat{G})$.

Отметим также, что *LCA-группа G дискретная тогда и только тогда, когда ее двойственная группа $\widehat{G}$ компактная.*

Лемма 1. *Пусть G — дискретная конечно порожденная абелева группа, $\mathscr{V}$ — замкнутое линейное подпространство в $\mathscr{S}(G)$. Следующие условия эквивалентны:*

1°. $\mathscr{V}$ является инвариантным подпространством в $\mathscr{S}(G)$;

2°. $\mathscr{V}$ является замкнутым идеалом в алгебре $\mathscr{S}_{conv}(G)$.

Доказательство. $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Пусть $\mathscr{V}$ — инвариантное подпространство в $\mathscr{S}(G)$, тогда $\mathscr{V}$ инвариантно относительно сдвигов $\tau_y : f(x) \mapsto f(x-y)$ для любых $y \in G$. Чтобы доказать, что $\mathscr{V}$ является замкнутым идеалом в $\mathscr{S}_{conv}(G)$, нужно доказать, что если $f \in \mathscr{V}$ и $g \in \mathscr{S}(G)$, то $f * g \in \mathscr{V}$. Так как группа G дискретная, то

$$f * g(x) = \sum_{y \in G} f(x-y)g(y). \tag{15}$$

Пусть P — конечная система образующих группы G; n — число элементов системы P; $|\cdot|$ — квазинорма на группе G (см. (2)). Проверим, что для любых $f, g \in \mathscr{S}(G)$ и для любого $k > 0$ справедливо неравенство

$$\mathfrak{n}_k(f * g) \le c\, \mathfrak{n}_k(f)\, \mathfrak{n}_{k+n+2}(g), \tag{16}$$

где $c = c(n)$ — некоторая постоянная; $\mathfrak{n}_k(\cdot)$ — полунорма в пространстве $\mathscr{S}(G)$ (см. (10)). Предварительно заметим, что для любых $x, y \in G$ справедливо неравенство

$$(1 + |x|) \le (1 + |x-y| + |y|) \le (1 + |x-y|)(1 + |y|). \tag{17}$$

Используя (17), получим, что

$$\begin{aligned} |(f*g)(x)|\,(1+|x|)^k &\le \sum_{y\in G} |f(x-y)|\,|g(y)|\,(1+|x|)^k \le \\ &\le \sum_{y\in G} |f(x-y)|(1+|x-y|)^k\,|g(y)|(1+|y|)^{k+n+2}(1+|y|)^{-n-2}. \end{aligned} \tag{18}$$

Из определения полунормы $\mathfrak{n}_k(\cdot)$ вытекает, что

$$\begin{gathered} |f(x-y)|\,(1+|x-y|)^k \le \mathfrak{n}_k(f), \\ |g(y)|\,(1+|y|)^{k+n+2} \le \mathfrak{n}_{k+n+2}(g). \end{gathered}$$

Тогда из (18) следует, что

$$|f * g(x)|\,(1+|x|)^k \le c\,\mathfrak{n}_k(f)\,\mathfrak{n}_{k+n+2}(g), \tag{19}$$

где

$$c = \sum_{y\in G} (1+|y|)^{-n-2} < \infty$$

(см. (12)). Неравенство (16) вытекает из (19) и из определения $\mathfrak{n}_k(\cdot)$.

Пусть $\mathscr{V}$ — инвариантное подпространство в $\mathscr{S}(G)$, $f \in \mathscr{V}$, $g \in \mathscr{S}(G)$. Для любого $N \in \mathbb{N}$ определим функцию

$$g_N(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } |x| \le N; \\ 0 & \text{при } |x| > N. \end{cases}$$

Тогда

$$f * g_N = \sum_{y\in G} (\tau_y f)\, g_N(y) = \sum_{y:|y|\le N} g(y)\,\tau_y f. \tag{20}$$

Так как $\tau_y f \in \mathscr{V}$ и правая часть (20) является линейной комбинацией конечного числа функций вида $\tau_y f$, то $f * g_N \in \mathscr{V}$.

Из неравенства (16) вытекает, что

$$\mathfrak{n}_k(f * g - f * g_N) = \mathfrak{n}_k(f * (g - g_N)) \leq c\, \mathfrak{n}_k(f)\, \mathfrak{n}_{k+n+2}(g - g_N).$$

Из определения пространства $\mathscr{S}(G)$ следует, что для любого $k > 0$ последовательность $\mathfrak{n}_{k+n+2}(g - g_N)$ стремится к 0 при $N \to \infty$. Тогда $\mathfrak{n}_k(f * (g - g_N)) \to 0$ при $N \to \to \infty$, следовательно, $f * g_N \to f * g$ в пространстве $\mathscr{S}(G)$. Так как $\mathscr{V}$ — замкнутое подпространство в $\mathscr{S}(G)$ и $f * g_N \in \mathscr{V}$, то и $f * g \in \mathscr{V}$, то есть $\mathscr{V}$ является идеалом в алгебре $\mathscr{S}_{conv}(G)$.

□

3. Спектральный синтез в пространстве $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$

В этом параграфе доказывается теорема 1 о справедливости спектрального синтеза в пространстве $\mathscr{S}'(G)$ для частного случая, когда группа G совпадает со свободной абелевой группой $\mathbb{Z}^n$. Доказательство теоремы для группы $\mathbb{Z}^n$ проводится по следующей схеме. От пространства $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$ переходим к двойственному пространству $\mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$, которое является топологической алгеброй относительно свертки. Для того чтобы замкнутое линейное подпространство $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{S}'(G)$ было инвариантным подпространством, необходимо и достаточно, чтобы его аннулятор $\mathscr{H}^\perp$ был замкнутым идеалом в алгебре $\mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$. Так как двойственной группой к дискретной группе $\mathbb{Z}^n$ является компактная группа $\mathbb{T}^n$ (n-мерный тор), то преобразование Фурье Φ задает изоморфизм сверточной топологической алгебры $\mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$ на топологическую алгебру $\mathscr{S}(\mathbb{T}^n) = C^\infty(\mathbb{T}^n)$ с операцией поточечного умножения функций. Далее доказывается, что инвариантное подпространство $\mathscr{H}$ допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда соответствующий ему идеал $\Phi(\mathscr{H}^\perp)$ локализуем в алгебре $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, а локализуемость всех замкнутых идеалов в алгебре $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ вытекает из классической теоремы Уитни. Приведенная схема доказательства справедливости спектрального синтеза в различных функциональных пространствах на основе дуальности и локализуемости является одной из основных схем в задачах спектрального синтеза (см., например, обзор Н.К. Никольского [5], книги В.В. Напалкова [4] и Б. Мальгранжа [3]). В доказательстве теоремы 1 эта схема реализуется для функционального пространства $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$.

Рассмотрим случай, когда дискретная группа G совпадает со свободной абелевой группой $\mathbb{Z}^n$. Элементы из группы $\mathbb{Z}^n$ имеют вид $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_j \in \mathbb{Z}$. В качестве системы образующих в $\mathbb{Z}^n$ возьмем систему элементов $v_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, v_n = = (0, \ldots, 0, 1)$. Из определения $|x|$ (см. (2)) следует, что $|x| = |x_1| + \cdots + |x_n|$. Пространства $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$ и $\mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$ являются частными случаями пространств $\mathscr{S}'(G)$ и $\mathscr{S}(G)$, определенных в § 1 и § 2 для произвольной дискретной абелевой группы G.

Будем обозначать через $\mathbb{T}$ фактор-группу $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, то есть элементами $\mathbb{T}$ являются классы $t + 2\pi\mathbb{Z}$, где $t \in \mathbb{R}$. Можно считать, что элементами $\mathbb{T}$ являются числа $t \in \in \mathbb{R}$, но при этом числа t и $t + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, определяют одну и ту же точку на $\mathbb{T}$. Естественным образом $\mathbb{T}$ отождествляется с единичной окружностью, а функции на $\mathbb{T}$ отождествляются с 2π-периодическими функциями на $\mathbb{R}$. Обычным образом на $\mathbb{T}$

вводится мера Лебега: если $f(t)$ — функция на $\mathbb{T}$, то по определению

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt := \int_{a}^{a+2\pi} f(t)\,dt,$$

где a — произвольное действительное число (интеграл не зависит от a).

Пусть $\mathbb{T}^n = \mathbb{T} \times \ldots \times \mathbb{T}$ — n-мерный тор, то есть декартово произведение n экземпляров окружности $\mathbb{T}$. Элементы из $\mathbb{T}^n$ будем обозначать $t = (t_1, \ldots, t_n)$, $t_j \in \mathbb{T}$. Пусть $dt := dt_1 \ldots dt_n$ — мера Лебега на $\mathbb{T}^n$. Множество $\mathbb{T}^n$ является компактной абелевой группой Ли. Пусть $\mathscr{E}(\mathbb{T}^n) = C^\infty(\mathbb{T}^n)$ — множество всех гладких (бесконечно дифференцируемых) комплекснозначных функций на $\mathbb{T}^n$.

Если $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, то пусть $|r| := r_1 + \cdots + r_n$, $r! := r_1! \ldots r_n!$. Для любой функции $h(t) = h(t_1, \ldots, t_n)$ будем использовать обозначения

$$\partial_j h := \frac{\partial h}{\partial t_j}, \quad \partial^r h := \partial_1^{r_1} \ldots \partial_n^{r_n} h.$$

Множество $\mathscr{E}(\mathbb{T}^n)$ снабжается топологией равномерной сходимости на $\mathbb{T}^n$ вместе со всеми производными и становится локально выпуклым пространством. Топологию в $\mathscr{E}(\mathbb{T}^n)$ можно задать семейством полунорм

$$d_k(h) := \sum_{r:|r|\le k} \max_{t\in\mathbb{T}^n} |\partial^r h(t)|, \quad h \in \mathscr{E}(\mathbb{T}^n),\ k \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Относительно поточечного умножения множество $\mathscr{E}(\mathbb{T}^n)$ является топологической алгеброй.

Двойственное пространство $\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ к пространству $\mathscr{E}(\mathbb{T}^n)$ совпадает с пространством обобщенных функций на $\mathbb{T}^n$. Для $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ и $h \in \mathscr{E}(\mathbb{T}^n)$ через $\langle f, h\rangle$ будем обозначать значение линейного функционала f на функции h. Пространство $\mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$ обычным образом вкладывается в $\mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$: если $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$, то полагаем

$$\langle f, h\rangle := \int_{\mathbb{T}^n} f(t)\,h(t)\,dt, \quad h \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^n). \tag{22}$$

Действие дифференциального оператора ∂^r обычным образом переносится на обобщенные функции, то есть

$$\langle \partial^r f, h\rangle := (-1)^{|r|}\langle f, \partial^r h\rangle, \quad f \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n),\ h \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^n). \tag{23}$$

Через δ_β будем обозначать δ-функцию с носителем в точке $\beta \in \mathbb{T}^n$, то есть $\langle \delta_\beta, h\rangle := h(\beta)$, $h \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$. Любой характер группы $\mathbb{Z}^n$ имеет вид

$$x \mapsto e^{itx}, \quad t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{T}^n,\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n, \tag{24}$$

где $tx = t_1x_1 + \cdots + t_nx_n$, $i = \sqrt{-1}$. Поэтому группа $\mathbb{T}^n$ является двойственной группой к группе $\mathbb{Z}^n$.

Исходя из общего определения преобразования Фурье на дискретной группе (см. (14)), преобразование Фурье функции $g(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$ имеет вид

$$\hat{g}(t) := \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} g(x)e^{-itx}, \quad t \in \mathbb{T}^n. \tag{25}$$

Так как $\mathbb{T}^n$ является компактной абелевой группой Ли, то пространство Брюа — Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{T}^n)$ совпадает с пространством $\mathscr{E}(\mathbb{T}^n) = C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Тогда из свойств преобразования Фурье на LCA-группах (см. §2) вытекает, что преобразование Фурье $\Phi : g(x) \mapsto \widehat{g}(t)$ задает изоморфизм топологической алгебры $\mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$ на топологическую алгебру $\mathscr{S}(\mathbb{T}^n) = \mathscr{E}(\mathbb{T}^n)$ (топологическая алгебра $\mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$ всегда будет рассматриваться с операцией свертки, а топологическая алгебра $\mathscr{E}(\mathbb{T}^n)$ с операцией поточечного умножения).

Для $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{T}^n$ через $\mathcal{F}_\beta$ обозначим множество формальных степенных рядов от n коплексных переменных с центром в точке β. Элементы из $\mathcal{F}_\beta$ имеют вид

$$S = \sum_{r\in\mathbb{Z}_+^n} a_r(t-\beta)^r, \quad a_r \in \mathbb{C}, \tag{26}$$

где $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{T}^n$, $(t-\beta)^r := (t_1-\beta_1)^{r_1}\ldots(t_n-\beta_n)^{r_n}$.

Множество $\mathcal{F}_\beta$ является кольцом и даже алгеброй над $\mathbb{C}$. Если ввести топологию покоэффициентной сходимости (см. [4, гл. I, § 5]), то $\mathcal{F}_\beta$ становится локально выпуклым пространством и топологической алгеброй. Известно, что всякий идеал в кольце $\mathcal{F}_\beta$ замкнут (см., например, [4, гл. I, § 5]).

Двойственное пространство $\mathcal{F}'_\beta$ можно отождествить с пространством обобщенных функций из $\mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$ с носителем в точке β, то есть с множеством обобщенных функций вида

$$F = \sum_{|r|\le N} c_r \partial^r \delta_\beta, \tag{27}$$

где $N \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{Z}_+^n$, $c_r \in \mathbb{C}$. Двойственность между пространствами $\mathcal{F}'_\beta$ и $\mathcal{F}_\beta$ задается формулой

$$\langle F, S\rangle = \sum_{r\in\mathbb{Z}_+^n} (-1)^{|r|} r! a_r c_r, \tag{28}$$

где F задается формулой (27), а S — формулой (26).

Через θ_β обозначим линейное отображение из $\mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$ в $\mathcal{F}_\beta$, которое сопоставляет каждой функции $h \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$ ее ряд Тейлора с центром в точке β, то есть

$$\theta_\beta(h) = \sum_{r\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{1}{r!}\partial^r h(\beta)\,(t-\beta)^r. \tag{29}$$

Отображение θ_β является непрерывным гомоморфизмом из топологической алгебры $\mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$ в топологическую алгебру $\mathcal{F}_\beta$. Известно, что отображение θ_β сюръективно, то есть $\theta_\beta(\mathcal{E}(\mathbb{T}^n)) = \mathcal{F}_\beta$ (см., например, [3]), но не инъективно. Отметим, что если $h \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$, а F — обобщенная функция вида (27), то справедливо равенство

$$\langle F, h\rangle = \langle F, \theta_\beta(h)\rangle. \tag{30}$$

Через $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ будем обозначать множество комплексных многочленов от n переменных $x_1, \ldots, x_n$. Если $P(x) = P(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, то через $P(i\partial)$ будем обозначать дифференциальный оператор, который получается подстановкой в $P(x)$ вместо каждой переменной x_j дифференциального оператора $i\partial_j$, то есть $P(i\partial) := P(i\partial_1, \ldots, i\partial_n)$. Аналогично, пусть $P(-i\partial) := P(-i\partial_1, \ldots, -i\partial_n)$. С учетом (27) очевидно, что любой элемент $F \in \mathcal{F}'_\beta$ можно представить в виде $F = P(i\partial)\delta_\beta$ для некоторого многочлена $P(x) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Отметим также, что любой экспоненциальный моном на группе $\mathbb{Z}^n$, принадлежащий пространству $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$, имеет вид

$$f(x) = P(x)e^{-i\beta x},\ x \in \mathbb{Z}^n,\ \beta \in \mathbb{T}^n, P(x) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]. \tag{31}$$

Лемма 2. *Пусть $f(x)$ — экспоненциальный моном вида* (31). *Тогда для любой функции $g(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$ справедливо равенство*

$$\langle g, f\rangle = \langle P(-i\partial)\delta_\beta, \hat{g}\rangle, \tag{32}$$

где $\hat{g}(t) = \Phi(g)$ — преобразование Фурье функции g (см. (25)*).*

Доказательство. По определению

$$\langle g, f\rangle = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} g(x)P(x)e^{-i\beta x}. \tag{33}$$

Из (23) следует, что для любых $F \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$ и $h \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$ справедливо равенство

$$\langle P(-i\partial)F, h\rangle = \langle F, P(i\partial)h\rangle. \tag{34}$$

Заметим, что

$$P(i\partial)e^{-itx} = P(x)e^{-itx}. \tag{35}$$

Используя (34) и (35), получаем

$$\langle P(-i\partial)\delta_\beta, \hat{g}\rangle = \langle \delta_\beta, P(i\partial)\hat{g}\rangle = \left\langle \delta_\beta, \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} g(x)P(x)e^{-itx}\right\rangle = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} g(x)P(x)e^{-i\beta x}. \tag{36}$$

Равенство (32) следует из (33) и (36). $\square$

Пусть $\mathscr{H}$ — инвариантное подпространство в $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$; $\mathscr{H}^\perp$ — его ортогональное дополнение в $\mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$; $\mathscr{I} = \Phi(\mathscr{H}^\perp)$ — образ $\mathscr{H}^\perp$ при преобразовании Фурье. Тогда $\mathscr{I}$ является замкнутым идеалом в топологической алгебре $\mathcal{E}(\mathbb{T}^n) = \mathscr{S}(\mathbb{T}^n)$. Для любой точки $\beta \in \mathbb{T}^n$ обозначим через $\mathscr{I}_\beta$ образ идеала $\mathscr{I}$ при отображении $\theta_\beta : \mathcal{E}(\mathbb{T}^n) \mapsto \mathcal{F}_\beta$ (см. (29)). Так как θ_β является сюръективным гомоморфизмом алгебр, то $\mathscr{I}_\beta$ является идеалом в алгебре $\mathcal{F}_\beta$, а так как в $\mathcal{F}_\beta$ любой идеал замкнут, то $\mathscr{I}_\beta$ — замкнутый идеал в $\mathcal{F}_\beta$. Будем называть $\mathscr{I}_\beta$ локальным идеалом идеала $\mathscr{I}$ в точке β. Через $\mathscr{I}_\beta^\perp$ обозначим ортогональное дополнение к $\mathscr{I}_\beta$ в двойственном пространстве $\mathcal{F}'_\beta$.

Лемма 3. *Экспоненциальный моном $f(x) = P(x)e^{-i\beta x}$ содержится в инвариантном подпространстве $\mathscr{H}$ тогда и только тогда, когда $P(-i\partial)\delta_\beta \in \mathscr{I}_\beta^\perp$.*

Доказательство. Пусть $f(x) = P(x)e^{-i\beta x}$, $\beta \in \mathbb{T}^n$, $x \in \mathbb{Z}^n$, $P(x)$ — полином. Из леммы 2 и равенства (30) вытекает, что для любой функции $g \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$ справедливо равенство

$$\langle P(-i\partial)\delta_\beta, \theta_\beta(\hat{g})\rangle = \langle P(-i\partial)\delta_\beta, \hat{g}\rangle = \langle g, f\rangle. \tag{37}$$

Пусть $f \in \mathscr{H}$, $g \in \mathscr{H}^\perp$, тогда из (37) следует, что $\langle P(-i\partial)\delta_\beta, \theta_\beta(\hat{g})\rangle = 0$, а так как идеал $\mathscr{I}_\beta$ состоит из степенных рядов $\theta_\beta(\hat{g})$ при $g \in \mathscr{H}^\perp$, то $P(-i\partial)\delta_\beta \in \mathscr{I}_\beta^\perp$.

Обратно, пусть $P(-i\partial)\delta_\beta \in \mathscr{I}_\beta^\perp$, тогда из (37) следует, что $\langle g, f\rangle = 0$ для любого $g \in \mathscr{H}^\perp$, следовательно $f \in \mathscr{H}$. $\square$

Лемма 4. *Пусть $g \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$, $\beta \in \mathbb{T}^n$, $\mathscr{H}$ — инвариантное подпространство в $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$, $\mathscr{I} = \Phi(\mathscr{H}^\perp)$, $\mathscr{I}_\beta = \theta_\beta(\mathscr{I})$ — локальный идеал идеала $\mathscr{I}$ в кольце $\mathcal{F}_\beta$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(*i*) *степенной ряд* $\theta_\beta(\hat{g})$ *принадлежит идеалу* $\mathscr{I}_\beta$;

(*ii*) *для любого принадлежащего* $\mathscr{H}$ *экспоненциального монома* $f(x) = P(x)e^{-i\beta x}$ *справедливо равенство* $\langle g, f\rangle = 0$.

Доказательство. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) По лемме 3 из того, что $f(x) = P(x)e^{-i\beta x} \in \mathscr{H}$ следует, что $P(-i\partial)\delta_\beta \in \mathscr{I}_\beta^\perp$. Тогда из равенства (37) вытекает, что $\langle g, f\rangle = \langle P(-i\partial)\delta_\beta, \theta_\beta(\hat{g})\rangle = 0$.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*) Пусть $\langle g, f\rangle = 0$ для любого экспоненциального монома $f \in \mathscr{H}$. Так как идеал $\mathscr{I}_\beta$ замкнут в $\mathcal{F}_\beta$, то для доказательства включения $\theta_\beta(\hat{g}) \in \mathscr{I}_\beta$ можно воспользоваться теоремой Хана — Банаха и показать, что любой функционал из $\mathcal{F}'_\beta$, ортогональный к $\mathscr{I}_\beta$, ортогонален $\theta_\beta(\hat{g})$.

Любой функционал $F \in \mathcal{F}'_\beta$ можно представить в виде $F = P(-i\partial)\delta_\beta$ для некоторого многочлена $P(x) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Пусть $P(-i\partial)\delta_\beta \in \mathscr{I}_\beta^\perp$, тогда по лемме 3 экспоненциальный моном $f(x) = P(x)e^{-i\beta x}$ содержится в $\mathscr{H}$, следовательно $\langle g, f\rangle = 0$. Из равенства (37) следует, что $\langle P(-i\partial)\delta_\beta, \theta_\beta(\hat{g})\rangle = 0$, откуда вытекает, что $\theta_\beta(\hat{g}) \in \mathscr{I}_\beta$. □

Пусть $\mathscr{I}$ — замкнутый идеал в алгебре $\mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$, $\mathscr{I}_\beta = \theta_\beta(\mathscr{I})$ — соответствующие ему локальные идеалы в $\mathcal{F}_\beta$ ($\beta \in \mathbb{T}^n$). Идеал $\mathscr{I}$ называется *локализуемым*, если он однозначно определяется по набору локальных идеалов $\mathscr{I}_\beta$, $\beta \in \mathbb{T}^n$, то есть если $h \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$ и $\theta_\beta(h) \in \mathscr{I}_\beta$ для любого $\beta \in \mathbb{T}^n$, то $h \in \mathscr{I}$.

Предложение 3. *Пусть* $\mathscr{H}$ *— инвариантное подпространство в* $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$, $\mathscr{H}^\perp$ *— ортогональное дополнение к* $\mathscr{H}$ *в* $\mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$, $\mathscr{I} = \Phi(\mathscr{H}^\perp)$ *— соответствующий* $\mathscr{H}$ *замкнутый идеал в* $\mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$. *Инвариантное подпространство* $\mathscr{H}$ *допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда замкнутый идеал* $\mathscr{I}$ *локализуем.*

Доказательство. Пусть инвариантное подпространство $\mathscr{H}$ допускает спектральный синтез. Любая функция из $\mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$ имеет вид $h = \hat{g}$ для некоторой функции $g \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$. Предположим, что $\theta_\beta(\hat{g}) \in \mathscr{I}_\beta$ для любой точки $\beta \in \mathbb{T}^n$.

Если экспоненциальный моном $f(x) = P(x)e^{-i\beta x}$ принадлежит $\mathscr{H}$, то, по лемме 3, $P(-i\partial)\delta_\beta \in \mathscr{I}_\beta^\perp$. Используя равенство (37), получим, что $\langle g, f\rangle = \langle P(-i\partial)\delta_\beta, \theta_\beta(\hat{g})\rangle = 0$, а так как $\mathscr{H}$ допускает спектральный синтез, то $\mathscr{H}$ совпадает с замыканием линейной оболочки всех содержащихся в $\mathscr{H}$ экспоненциальных мономов, поэтому $g \in \mathscr{H}^\perp$ и, следовательно, $\hat{g} \in \mathscr{I}$, что доказывает локализуемость идеала $\mathscr{I}$.

Обратно, предположим, что замкнутый идеал $\mathscr{I} \subseteq \mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$ локализуем. Нужно доказать, что $\mathscr{H}$ допускает спектральный синтез. Пусть $g \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$ и $\langle g, f\rangle = 0$ для любого экспоненциального монома $f(x) = P(x)e^{-i\beta x} \in H$. Тогда, по лемме 4, $\theta_\beta(\hat{g}) \in \mathscr{I}_\beta$ для любого $\beta \in \mathbb{T}^n$. Из локализуемости идеала $\mathscr{I}$ вытекает, что $\hat{g} \in \mathscr{I}$, откуда следует, что $g \in \mathscr{H}^\perp$. Тогда из теоремы Хана — Банаха вытекает, что замыкание линейной оболочки содержащихся в $\mathscr{H}$ экспоненциальных мономов совпадает с $\mathscr{H}$, то есть $\mathscr{H}$ допускает спектральный синтез. □

Доказательство теоремы 1 для $\boldsymbol{G = \mathbb{Z}^n}$. По предложению 3, чтобы доказать, что спектральный синтез справедлив в пространстве $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$, достаточно доказать, что любой замкнутый идеал $\mathscr{I}$ в алгебре $\mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$ локализуем. Остается заметить, что локализуемость замкнутых идеалов в алгебре $\mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$ следует из теоремы Уитни о локализуемости замкнутых идеалов в алгебре $\mathcal{E}(\Omega)$ для любого гладкого многообразия Ω, счетного на бесконечности (здесь $\mathcal{E}(\Omega)$ — топологическая алгебра, состоящая из всех бесконечно дифференцируемых функций на Ω с операцией поточечного умножения). Доказательство теоремы Уитни см., например, в [3, гл. III, теорема 1.3]. □

4. Спектральный синтез в пространстве $\mathscr{S}'(G)$ на конечно порожденной абелевой группе

В этом параграфе из справедливости спектрального синтеза в пространстве $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$ выводится справедливость спектрального синтеза в пространстве $\mathscr{S}'(G)$ для произвольной конечно порожденной абелевой группы G и тем самым завершается доказательство теоремы 1. Предварительно приведем некоторые вспомогательные результаты.

Пусть $\widetilde{G}$ и G — абелевы группы, $\alpha : \widetilde{G} \mapsto G$ — сюръективный гомоморфизм. Для любой функции $f : G \mapsto \mathbb{C}$ пусть $\tilde{f} := f \circ \alpha$ — композиция f и α.

Предложение 4. *Для того чтобы функция $\tilde{f} = f \circ \alpha$ была экспоненциальным мономом на группе $\widetilde{G}$, необходимо и достаточно, чтобы функция f была экспоненциальным мономом на группе G.*

Доказательство. См. [17], доказательство теоремы 2.24, или [8]. □

Отметим, что теорема 1 справедлива для любой конечной абелевой группы G, так как в этом случае пространство $\mathscr{S}'(G)$ совпадает с пространством $C(G)$, для которого справедливость спектрального синтеза хорошо известна (см., [17]). Далее пусть G — конечно порожденная бесконечная абелева группа, $v_1, \dots, v_n$ — система образующих группы G, $\widetilde{G} = \mathbb{Z}^n$ — свободная абелева группа. Элементы группы $\mathbb{Z}^n$ будем обозначать через $t = (t_1, \dots, t_n)$, $t_j \in \mathbb{Z}$, а элементы группы G через x. Отображение

$$\alpha : t = (t_1, \dots, t_n) \mapsto x = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n \tag{38}$$

является сюръективным гомоморфизмом группы $\mathbb{Z}^n$ на группу G. Для любой группы G через $C(G)$ будем обозначать множество всех комплекснозначных функций на G.

Определим отображение $A : C(G) \mapsto C(\mathbb{Z}^n)$ формулой

$$A(f)(t) := \tilde{f}(t) = f(\alpha(t)), \quad t \in \mathbb{Z}^n. \tag{39}$$

Пусть $K = \{t \in \mathbb{Z}^n : \alpha(t) = 0\}$ — ядро гомоморфизма α. Очевидно, что функция $g \in C(\mathbb{Z}^n)$ имеет вид $g = A(f)$ для некоторой функции $f \in C(G)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$g(t + s) = g(t) \quad \forall t \in \mathbb{Z}^n,\ s \in K. \tag{40}$$

Если $\mathscr{H}$ — подмножество в $C(G)$, то пусть $\widetilde{\mathscr{H}} = A(\mathscr{H})$ — образ множества $\mathscr{H}$ при отображении A. Пространства $\mathscr{S}'_k(G)$, $\mathscr{S}'_k(\mathbb{Z}^n)$, $\mathscr{S}'(G)$ и $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$ определены в § 1. Чтобы различать нормы в банаховых пространствах $\mathscr{S}'_k(G)$ и $\mathscr{S}'_k(\mathbb{Z}^n)$ (см. (4)), будем обозначать через $\|\cdot\|_{G,k}$ норму в $\mathscr{S}'_k(G)$, а через $\|\cdot\|_k$ норму в $\mathscr{S}'_k(\mathbb{Z}^n)$.

Предложение 5. (i) *Отображение A является линейным непрерывным оператором из пространства $\mathscr{S}'(G)$ в пространство $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$.*

(ii) *Если $\mathscr{H}$ — инвариантное подпространство в $\mathscr{S}'(G)$, то его образ $\widetilde{\mathscr{H}} = A(\mathscr{H})$ является инвариантным подпространством в $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$.*

Доказательство. 1) Пусть $f \in \mathscr{S}'_k(G)$, $\tilde{f} = f \circ \alpha$. Из определения $|x|$ для $x \in G$ и $|t|$ для $t \in \mathbb{Z}^n$ вытекает, что $|\alpha(t)| \leq |t|$ для любого $t \in \mathbb{Z}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(t)|(1+|t|)^{-k} =& |f(\alpha(t))|(1+|t|)^{-k} \leq |f(\alpha(t))|(1+|\alpha(t)|)^{-k} \leq \\ &\leq \sup_{x \in G} |f(x)|(1+|x|)^{-k} = \|f\|_{G,k}. \end{aligned} \tag{41}$$

Из (41) следует, что

$$|\tilde{f}(t)|(1+|t|)^{-(k+1)} \leq \|f\|_{G,k}(1+|t|)^{-1}, \tag{42}$$

поэтому $\tilde{f} \in \mathscr{S}'_{k+1}(\mathbb{Z}^n)$. Кроме того, из (42) вытекает неравенство

$$\|\tilde{f}\|_{k+1} = \sup_{t \in \mathbb{Z}^n} |\tilde{f}(t)|(1+|t|)^{-(k+1)} \leq \|f\|_{G,k}, \tag{43}$$

поэтому A является линейным непрерывным отображением из банахова пространства $\mathscr{S}'_k(G)$ в банахово пространство $\mathscr{S}'_{k+1}(\mathbb{Z}^n)$, а из определения топологии индуктивного предела следует, что A является линейным непрерывным отображением из топологического векторного пространства $\mathscr{S}'(G)$ в топологическое векторное пространство $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$.

2) Как и раньше, пусть K — ядро гомоморфизма α. Введем обозначение

$$\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n; K) := \{g \in \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n) : g(t+s) = g(t) \quad \forall t \in \mathbb{Z}^n,\ s \in K\}.$$

Множество $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n; K)$ является замкнутым линейным подпространством в $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$. С топологией, индуцированной из пространства $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$, множество $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n; K)$ является локально выпуклым пространством. *Проверим, что образ $A(\mathscr{S}'(G))$ совпадает с пространством $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n; K)$ и что отображение A является изоморфизмом топологического векторного пространства $\mathscr{S}'(G)$ на топологическое векторное пространство $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n; K)$.*

Вложение $A(\mathscr{S}'(G)) \subseteq \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n; K)$ очевидно. Пусть $g \in \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n; K)$, тогда g можно представить в виде $g(t) = f(\alpha(t))$ для некоторой, однозначно определенной функции $f \in C(G)$. Докажем, что $f \in \mathscr{S}'(G)$ и что отображение $A^{-1} : g(t) \mapsto f(x)$ из $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n; K)$ в $\mathscr{S}'(G)$ непрерывно.

Пусть $g \in \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n; K) \cap \mathscr{S}'_k(\mathbb{Z}^n)$, $k > 0$. Для любого $x \in G$ существует элемент $t \in \mathbb{Z}^n$ такой, что $x = \alpha(t)$ и $|t| = |x|$. Тогда

$$|f(x)|(1+|x|)^{-k} = |f(\alpha(t))|(1+|\alpha(t)|)^{-k} = |g(t)|(1+|t|)^{-k} \leq \|g\|_k. \tag{44}$$

Из (44) следует, что

$$|f(x)|(1+|x|)^{-(k+1)} \leq \|g\|_k(1+|x|)^{-1}, \tag{45}$$

поэтому $f \in \mathscr{S}'_{k+1}(G)$. Кроме того, из (45) вытекает неравенство $\|f\|_{G,k+1} \leq \|g\|_k$, откуда следует, что A^{-1} является непрерывным отображением из $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n; K)$ в $\mathscr{S}'(G)$. Тем самым доказано, что $A(\mathscr{S}'(G)) = \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n; K)$ и отображение A является изоморфизмом топологического векторного пространства $\mathscr{S}'(G)$ на топологическое векторное пространство $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n; K)$.

3) Пусть $\mathscr{H}$ — инвариантное подпространство в $\mathscr{S}'(G)$. *Проверим, что $\widetilde{\mathscr{H}} = A(\mathscr{H})$ является инвариантным подпространством в $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$.*

Так как A является изоморфизмом топологических векторных пространств $\mathscr{S}'(G)$ и $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n; K)$, то $\widetilde{\mathscr{H}} = A(\mathscr{H})$ будет замкнутым линейным подпространством в $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n; K)$, а так как $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n; K)$ замкнуто в $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$, то $\widetilde{\mathscr{H}}$ является замкнутым линейным подпространством в $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$.

Пусть $g \in \widetilde{\mathscr{H}}$, тогда $g = f \circ \alpha$ для некоторой функции $f \in \mathscr{H}$. Заметим, что для любого $s \in \mathbb{Z}^n$, $(\tau_s g)(t) = f(\alpha(t+s)) = f(\alpha(t) + \alpha(s)) = A(\tau_{\alpha(s)} f)(t)$. Так как $\tau_{\alpha(s)} f \in \mathscr{H}$, то $\tau_s g = A(\tau_{\alpha(s)} f) \in \widetilde{\mathscr{H}}$, следовательно $\widetilde{\mathscr{H}}$ является инвариантным подпространством в $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$. $\square$

Теперь можно завершить доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 1 (общий случай). Пусть G — конечно порожденная бесконечная абелева группа, $v_1, \ldots, v_n$ — система образующих группы G, $\alpha : \mathbb{Z}^n \mapsto G$ — отображение (38), $A : \mathscr{S}'(G) \mapsto \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$ — отображение (39). Пусть $\mathscr{H}$ — инвариантное подпространство в $\mathscr{S}'(G)$, тогда по предложению 5 $\widetilde{\mathscr{H}} = A(\mathscr{H})$ является инвариантным подпространством в $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$. Так как теорема 1 справедлива для группы $\mathbb{Z}^n$, то $\widetilde{\mathscr{H}}$ допускает спектральный синтез, то есть $\widetilde{\mathscr{H}}$ совпадает с замыканием линейной оболочки экспоненциальных мономов $g(t)$, принадлежащих $\widetilde{\mathscr{H}}$. По предложению 4 функция $g(t)$ является экспоненциальным мономом на группе $\mathbb{Z}^n$ тогда и только тогда, когда функция $f = A^{-1}(g)$ является экспоненциальным мономом на группе G. Так как A является изоморфизмом топологических векторных пространств $\mathscr{S}'(G)$ и $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n; K)$ (см. доказательство предложения 5), то подпространство $\mathscr{H} = A^{-1}(\widetilde{\mathscr{H}})$ совпадает с замыканием в $\mathscr{S}'(G)$ линейной оболочки экспоненциальных мономов $A^{-1}(g)$, то есть $\mathscr{H}$ допускает спектральный синтез, что завершает доказательство теоремы 1. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берг, Й. Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лефстрем. — М. : Мир, 1980. — 264 с.

2. Гуревич, Д. И. Контрпримеры к проблеме Л. Шварца / Д. И. Гуревич // Функцион. анализ и его прил. — 1975. — Т. 9, вып. 2. — С. 29–35.

3. Мальгранж, Б. Идеалы дифференцируемых функций / Б. Мальгранж. — М. : Мир, 1968. — 131 с.

4. Напалков, В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах / В. В. Напалков. — М. : Наука, 1982. — 240 с.

5. Никольский, Н. К. Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций / Н. К. Никольский // Итоги науки и техники. Математический анализ. — 1974. — Т. 12. — С. 199–412.

6. Платонов, С. С. О спектральном синтезе на нульмерных абелевых группах / С. С. Платонов // Мат. сб. — 2013. — Т. 204, вып. 9. — С. 99–114.

7. Платонов, С. С. О спектральном синтезе на поэлементно компактных абелевых группах / С. С. Платонов // Мат. сб. — 2015. — Т. 206, вып. 8. — С. 127–152.

8. Платонов, С. С. О структуре экспоненциальных мономов на некоторых локально компактных абелевых группах / С. С. Платонов // Проблемы анализа. — 2012. — Т. 1 (19), вып. 1. — С. 3–14.

9. Платонов, С. С. Спектральный синтез в некоторых функциональных топологических векторных пространствах / С. С. Платонов // Алгебра и анализ. — 2010. — Т. 22, вып. 5. — С. 154–185.

10. Робертсон, А. Топологические векторные пространства / А. Робертсон, Б. Робертсон. — М. : Мир, 1967. — 261 с.

11. Хьюит, Э. Абстрактный гармонический аналих / Э. Хьюит, К. Росс. — М. : Мир, 1978. — Т. 1. — 654 с.

12. Bruhat, F. Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étudedes représentations des groupes p-adiques / F. Bruhat // Bull. Soc. math. France. — 1961. — Vol. 89. — P. 43–75.

13. Laczkovich, M. Spectral synthesis on discrete groups / M. Laczkovich, L. Székelyhidi // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 2007. — Vol. 143. — P. 103–120.

14. Osborne, M. S. On the Schwartz — Bruhat space and Paley — Wiener theorem for locally compact Abelian groups / M. S. Osborne // J. of Funct. Anal. — 1975. — Vol. 19. — P. 40–49.

15. Schwartz, L. Analyse et synthése harmonique dans les espaces de distributions / L. Schwartz // Can. J. Math. — 1951. — Vol. 3, iss. 2. — P. 503–512.

16. Schwartz, L. Théorie générale des fonctions moynne-périodiques / L. Schwartz // Ann. of Math. — 1947. — Vol. 48, iss. 2. — P. 875–929.

17. Székelyhidi, L. Discrete spectral synthesis and its applications / L. Székelyhidi. — Berlin : Springer, 2006. — 135 p.

REFERENCES

1. Berg Y., Lefstrem Y. *Interpolyatsionnye prostranstva. Vvedenie* [Interpolation Spaces. An Introduction]. Moscow, Mir Publ., 1980. 264 p.

2. Gurevich D.I. Kontrprimery k probleme L. Shvartsa [Counterexamples to a Problem of L. Schwartz]. *Funktsion. analiz i ego pril.* [Funct. Anal. Appl.], 1975, vol. 9, iss. 2, pp. 29-35.

3. Malgranzh B. *Idealy differentsiruemykh funktsiy* [Ideals of Differentiable Functions]. Moscow, Mir Publ., 1968. 131 p.

4. Napalkov V.V. *Uravneniya svertki v mnogomernykh prostranstvakh* [Convolution Equations in Multidimensional Spaces]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 240 p.

5. Nikolskiy N.K. Invariantnye podprostranstva v teorii operatorov i teorii funktsiy [Invariant Subspaces in Operator Theory and Function Theory]. *Itogi nauki i tekhniki. Matematicheskiy analiz* [Itogi Nauki i Tekhniki. Mat. Anal.], 1974, vol. 12, pp. 199-412.

6. Platonov S.S. O spektralnom sinteze na nulmernykh abelevykh gruppakh [On Spectral Synthesis on Zero-Dimensional Abelian Groups]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 2013, vol. 204, iss. 9, pp. 99-114.

7. Platonov S.S. O spektralnom sinteze na poelementno kompaktnykh abelevykh gruppakh [On Spectral Synthesis on Element-Wise Abelian Groups]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 2015, vol. 206, iss. 8, pp. 127-152.

8. Platonov S.S. O strukture eksponentsialnykh monomov na nekotorykh lokalno kompaktnykh abelevykh gruppakh [On the Structure of Exponential Monomials on Some Locally Compact Abelian Groups]. *Problemy analiza* [Issues of Analysis], 2012, vol. 1 (19), iss. 1, pp. 3-14.

9. Platonov S.S. Spektralnyy sintez v nekotorykh funktsionalnykh topologicheskikh vektornykh prostranstvakh [Spectral Synthesis in Some Topological Vector Spaces of Functions]. *Algebra i analiz* [St. Petersburg Mathematical Journal], 2010, vol. 22, iss. 5, pp. 154-185.

10. Robertson A., Robertson B. *Topologicheskie vektornye prostranstva* [Topological Vector Spaces]. Moscow, Mir Publ., 1967. 261 p.

11. Hewitt E., Ross K. *Abstraktnyy garmonicheskiy analikh* [Abstract Harmonic Analysis]. Moscow, Mir Publ., 1978, vol. 1. 654 p.

12. Bruhat F. Distributions sur un Groupe Localement Compact et Applications à L'étudedes Représentations des Groupes p-Adiques. *Bull. Soc. math. France*, 1961, vol. 89, pp. 43-75.

13. Laczkovich M., Székelyhidi L. Spectral Synthesis on Discrete Groups. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 2007, vol. 143, pp. 103-120.

14. Osborne M.S. On the Schwartz — Bruhat Space and Paley — Wiener Theorem for Locally Compact Abelian Groups. *J. of Funct. Anal.*, 1975, vol. 19, pp. 40-49.

15. Schwartz L. Analyse et Synthése Harmonique dans les Espaces de Distributions. *Can. J. Math.*, 1951, vol. 3, iss. 2, pp. 503-512.

16. Schwartz L. Théorie Générale des Fonctions Moynne-Périodiques. *Ann. of Math.*, 1947, vol. 48, iss. 2, pp. 875-929.

17. Székelyhidi L. *Discrete spectral synthesis and its applications*. Berlin, Springer, 2006. 135 p.

ON SPECTRAL SYNTHESIS IN THE SPACE OF TEMPERED FUNCTIONS ON FINITELY GENERATED ABELIAN GROUPS

Sergey Sergeevich Platonov

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Geometry and Topology,
Petrozavodsk State University
ssplatonov@yandex.ru, platonov@psu.karelia.ru
Prosp. Lenina, 33, 185910 Petrozavodsk, Russian Federation

Abstract. Let G be an arbitrary locally compact Abelian group (LCA-group) and let $\mathscr{F}$ be a topological vector space (TVS) consisting of complex-valued functions on G. The space $\mathscr{F}$ is said to be *translation invariant* if $\mathscr{F}$ is invariant with respect to the transformations $\tau_y : f(x) \mapsto f(x-y)$, $f(x) \in \in \mathscr{F}, y \in G$, and all operators τ_y are continuous on $\mathscr{F}$.

A closed linear subspace $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{F}$ is referred to as an *invariant subspace* if $\tau_y(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{H}$ for every $y \in G$.

By an *exponential function* or *generalized character* we mean an arbitrary continuous homomorphism from a group G to the multiplicative group $\mathbb{C}_* := := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ of nonzero complex numbers. Continuous homomorphisms of G to the additive group of complex numbers are referred to as *additive functions*. A function $x \mapsto P(a_1(x), \dots, a_m(x))$ on G is said to be polynomial function if $P(z_1, \dots, z_m)$ is a complex polynomial in m variables and $a_1, \dots, a_m$ are additive functions. A product of a polynomial and an exponential function is referred to as an exponential monomial, and a sum of exponential monomials is referred to as an exponential polynomial on G.

Let $\mathscr{F}$ be a translation-invariant function space on the group G and let be $\mathscr{H}$ an invariant subspace of $\mathscr{F}$. An invariant subspace $\mathscr{H}$ admits spectral synthesis if it coincides with the closure in $\mathscr{F}$ of the linear span of all exponential monomials belonging to $\mathscr{H}$. We say that *spectral synthesis holds in* $\mathscr{F}$ if every invariant subspace $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{F}$ admits spectral synthesis.

One of the natural function space is the space $\mathscr{S}'(G)$ of all tempered distributions on a LCA-group G. In the present paper we study spectral synthesis in the space $\mathscr{S}'(G)$ for the case when G is a discrete Abelian group. In this case the distributions from $\mathscr{S}'(G)$ coincide with usual functions, thus we will refer to $\mathscr{S}'(G)$ as the space of tempered functions. Let us consider a convenient definition of the space $\mathscr{S}'(G)$ on a discrete finite generated Abelian group G.

Let G be a finitely generated Abelian group, $v_1, \dots, v_n$ be a system of generators of G. Any element $x \in G$ can be representd in the form $x = t_1 v_1 + + \dots + t_n v_n$, where $t_j \in \mathbb{Z}$ (this representation can be not unique). For $x \in G$, we

define the number $|x| \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ by $|x| := \min\{|t_1| + \dots + |t_n| : x = t_1v_1 + \dots + t_nv_n,\ t_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \dots, n\}$. The function $|x|$ is a special example of a quasinorm on G.

For every $k > 0$, we denote by $\mathscr{S}'_k(G)$ the set of all compex-valued functions $f(x)$ on G that satisfy $|f(x)|(1 + |x|)^{-k} \to 0 \quad \text{as} \quad |x| \to \infty$. The set $\mathscr{S}'(G)$ is a Banach space with respect to the norm $\|f\|_{G,k} = \|f\|_k := \sup_{x \in G} |f(x)|(1 + |x|)^{-k}$. Clearly, $\mathscr{S}'_{k_1}(G) \subseteq \mathscr{S}'_{k_2}(G)$ if $k_1 < k_2$, and this embedding is continuous. We equip the space $\mathscr{S}'(G) := \bigcup_{k>0} \mathscr{S}'_k(G)$ with the topology of the inductive limit of the Banach spaces $\mathscr{S}'_k(G)$. Thus $\mathscr{S}'(G)$ is a translation invariant locally convex space.

The main results of the paper is the theorem, that spectral synthesis holds in the space $\mathscr{S}'(G)$ for any finitely generated Abelian group G.

Key words: spectral synthesis, locally compact Abelian groups, finitely generated Abelian groups, tempered functions, Bruhat — Schwartz funtions.