DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.5.6
УДК 514.752, 514.764.274, 517.97
ББК 22.15, 22.161

УРАВНЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ФУНКЦИОНАЛА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ [1]

Наталья Михайловна Полубоярова

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет
nmedv@mail.ru, natasha_medvedeva@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. При исследовании поверхностей на устойчивость (или неустойчивость) необходимо получить выражения первой и второй вариации функционала. В данной статье представлена первая часть исследования функционала потенциальной энергии. А именно, получение формулы первой вариации функционала потенциальной энергии и уравнений экстремалей. А также приведены и доказаны некоторые следствия, которые позволяют произвести построение экстремальных поверхностей вращения.

Ключевые слова: вариация функционала, экстремальная поверхность, функционал типа площади, функционал объемной плотности сил, функционал потенциальной энергии, средняя кривизна экстремальной поверхности.

Введение

В настоящей работе представлено исследование функционала потенциальной энергии на предмет получения уравнений его экстремалей и их свойств. Так же как минимальные поверхности есть экстремали функционала площади, так и рассматриваемые нами гладкие поверхности — экстремали специального функционала, который является линейной комбинацией функционала типа площади и функционала от объемной плотности сил. Подобные экстремальные поверхности моделируют состояния равновесных жидкостей в гравитационном поле с потенциалом, тентовые покрытия, магнитные жидкости, капиллярные поверхности. Поэтому их изучение на устойчивость и неустойчивость не теряет актуальности, а лишь претерпевает изменения в виде функционалов, чтобы вместить больше физических характеристик системы. Например, функционал (энергия) может быть комбинацией энергии поверхностного натяжения, гравитационной энергии, энергии изгибной деформации.

Изучению минимальных поверхностей в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах посвящены работы Ю.А. Аминова, В.А. Клячина, В.М. Миклюкова, А.В. Погорелова, В.Г. Ткачева, А.А. Тужилина, А.Т. Фоменко, М. до Кармо, Ч.К. Пенга, Ш. Яу, Р. Финна, Дж. Саймонса и др.

Для того чтобы учитывать нагрузки поверхности (системы) извне и изнутри, требуется рассматривать поверхности, «минимальные» с точки зрения более сложных функционалов, чем давно изучаемые функционалы площади. В работе [2] автором и В.А. Клячиным был рассмотрен функционал типа площади, а в статье В.А. Клячина [1], в частности, были исследованы функционалы с подынтегральными функциями, описывающими поверхностную и объемную плотности сил. А рассматриваемый в данной работе функционал потенциальной энергии представляет собой линейную комбинацию функционалов типа площади и объемной плотности сил. Поэтому его исследование основано на работах [1] и [2].

Целью настоящей работы является получение уравнений экстремалей для функционала потенциальной энергии.

1. Постановка задачи

Пусть M — n-мерное связное ориентируемое многообразие класса C^2. Рассмотрим ориентируемую гиперповерхность $\mathcal{M} = (M, u)$, полученную C^2-погружением $u : M \to \mathbf{R}^{n+1}$. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ — некоторая область, такая что $\mathcal{M} \subset \partial\Omega$; Φ, $\Psi : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ — C^2-гладкие функции. Если ξ — поле единичных нормалей к поверхности $\mathcal{M}$, то для любой C^2-гладкой поверхности $\mathcal{M}$ определена величина

$$W(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Phi(\xi)\, d\mathcal{M} + \int\limits_{\Omega} \Psi(x)\, dx, \tag{1}$$

которая не зависит от выбора нормали ξ.

Функционал (1) назовем функционалом потенциальной энергии. Он является основным объектом исследования.

Опишем построение векторных полей, вдоль которых будем деформировать поверхность.

Пусть V — C^2-гладкое векторное поле, определенное в окрестности поверхности $\mathcal{M}$, такое что $V|_{\mathcal{M}} = h \cdot \xi$, где $h \in C_0^1(\mathcal{M})$, при этом предполагается, что интегральные кривые поля V лежат на прямых линиях и вдоль них выполнено $|V| = \mathrm{const}$.

Пусть $U(\mathcal{M})$ — окрестность поверхности $\mathcal{M}$, в которой определено поле V и однопараметрическая группа локальных диффеоморфизмов $g_t(x) : U(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}^{n+1}$, порожденная векторным полем V. То есть $g_t(x)$ — решение задачи Коши:

$$\frac{dg_t(x)}{dt} = V(g_t(x)),\ g_t(x)|_{t=0} = x.$$

Положим $\mathcal{M}_t = g_t(\mathcal{M})$. Ясно, что $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$.

Определение 1. *Поверхность назовем экстремальной для функционала $W(\mathcal{M})$, если производная $W'(0) = 0$ для всякого нормального сечения v с компактным носителем на поверхности $\mathcal{M}$, то есть*

$$\left.\frac{dW(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Другими словами, поверхность $\mathcal{M}$ является *экстремальной*, если первая вариация функционала (1) равна нулю при всех бесконечно малых деформациях поверхности $\mathcal{M}$. Поэтому сначала необходимо проварьировать функционал (1). Деформации поверхности $\mathcal{M}$ будем проводить вдоль векторных полей V с помощью функции возмущения $h(x) \in$ $\in C_0^1(\mathcal{M})$.

2. Уравнение экстремалей

Функционал (1) представим в виде $W(\mathcal{M}) = F(\mathcal{M}) + L(\mathcal{M})$, где

$$F(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Phi(\xi)\, d\mathcal{M}, \tag{2}$$

$$L(\mathcal{M}) = \int\limits_{\Omega} \Psi(x)\, dx, \tag{3}$$

чтобы применить ранее полученные результаты из работ [1] и [2].

Для функционала (2) введем обозначения для матрицы

$$G = \{G_{ij}\}_{i,j=1}^{n+1},\ G_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \delta_{ij}(\Phi - \langle D\Phi, \xi\rangle), \tag{4}$$

где $D\Phi = \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}, \ldots, \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_{n+1}}\right)$, δ_{ij} — *символ Кронекера,* то есть $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n+1$.

Следующая теорема о первой вариации функционала (2) была доказана автором и В.А. Клячиным в [2].

Теорема 1. *Если* $F(t) = F(\mathcal{M}_t)$, *то*

$$F'(t) = \int\limits_{\mathcal{M}} (\operatorname{div}(D\Phi(\xi))^T - nH\Phi(\xi))h(x)\, d\mathcal{M}, \tag{5}$$

где div — *дивергенция в метрике поверхности* $\mathcal{M}$, $H = \langle \vec{H}, \xi\rangle$ — *средняя кривизна поверхности* $\mathcal{M}$ *относительно нормали* ξ, $h(x) \in C_0^1(\mathcal{M})$.

Теорема 2 для функционала (3) была доказана в [1] в рамках исследования другого функционала.

Теорема 2. *Если* $L(t) = L(\mathcal{M}_t)$, *то*

$$L'(t) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Psi(x)h(x)\, d\mathcal{M}, \tag{6}$$

где $h(x) \in C_0^1(\mathcal{M})$.

Из теорем 1 и 2 непосредственно вытекает теорема 3 о первой вариации функционала потенциальной энергии.

Теорема 3. *Если* $W(t) = W(\mathcal{M}_t)$, *то*

$$W'(0) = \int\limits_{\mathcal{M}} (\operatorname{div}(D\Phi(\xi))^T - nH\Phi(\xi) + \Psi(x))h(x)\, d\mathcal{M}, \tag{7}$$

где $h(x) \in C_0^1(\mathcal{M})$.

Из нее следует основная теорема настоящей работы об уравнениях экстремалей функционала потенциальной энергии (1).

Теорема 4. *Поверхность $\mathcal{M}$ класса C^2 является экстремалью функционала* (1) *тогда и только тогда, когда выполнено равенство*

$$\sum_{i=1}^{n} k_i G(E_i, E_i) = \Psi(x), \tag{8}$$

где E_i — главные направления; k_i — главные кривизны поверхности $\mathcal{M}$.

Замечание. Уравнения (8) есть уравнения экстремалей функционала потенциальной энергии.

3. Доказательства теорем

Пусть M — n-мерное связное некомпактное ориентируемое многообразие класса C^3 без края. Рассмотрим гиперповерхность $\mathcal{M} = (M, u)$, полученную C^3-погружением $u : M \to \mathbb{R}^{n+1}$. На поверхности $\mathcal{M}$ индуцируется риманова метрика и соответствующее скалярное произведение касательных векторов, которое мы будем обозначать также как и скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n+1}$ через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Введем обозначения $\overline{\nabla}$ и ∇ для римановых связностей в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mathcal{M}$ соответственно. Известны следующие соотношения [5]:

$$\nabla h = (\overline{\nabla} h)^T, \ \nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T, \tag{9}$$

справедливые для произвольных C^1-гладких функций $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ и C^1-гладких векторных полей X и Y, касательных к $\mathcal{M}$. Символом v^T обозначаем всюду ортогональную проекцию вектора v на касательную плоскость $T_m\mathcal{M}$ к поверхности $\mathcal{M}$ в соответствующей точке $m \in \mathcal{M}$. Тогда дивергенция векторного поля X, как сечения касательного расслоения поверхности $\mathcal{M}$, определяется как след линейного отображения $E \to \nabla_E X$ [4]. Выберем в касательном пространстве $T_m\mathcal{M}$ ортонормированный базис $\{Z_i\}_{i=1}^n$. Тогда дивергенция векторного поля X, согласно [4], можно записать в виде

$$\mathrm{div} X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{Z_i} X, Z_i \rangle.$$

Пусть $m \in \mathcal{M}$ и в некоторой окрестности точки $u(m)$ определены гладкие векторные поля X и Y. Билинейная форма

$$B(X(m), Y(m)) = (\overline{\nabla}_X Y)(u(m)) - (\overline{\nabla}_X Y)^T(u(m))$$

называется *второй фундаментальной формой* поверхности $\mathcal{M}$ [5]. Отметим, что $B(X, Y)$ является билинейной, симметричной формой [5]. Для выбранного ортонормированного базиса в касательном пространстве $T_m\mathcal{M}$ к поверхности $\mathcal{M}$ в точке $u(m)$ вектор

$$\vec{H}(m) = \frac{1}{n} \operatorname{trace} B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} B(Z_i, Z_i) \tag{10}$$

называется *вектором средней кривизны* поверхности $\mathcal{M}$ в точке $u(m)$ [5].

Пусть $N_{u(m)}\mathcal{M}$ — нормальное пространство к поверхности $\mathcal{M}$ в точке $u(m)$. Для произвольного вектора $v \in N_{u(m)}\mathcal{M}$ пусть A^v означает гомоморфизм Вейнгартена, определяемый как линейное преобразование $A^v : T_{u(m)}\mathcal{M} \to T_{u(m)}\mathcal{M}$, двойственное к билинейной форме B [5, § 5]:

$$\langle A^v(X), Y\rangle = \langle B(X,Y), v\rangle = -\langle \overline{\nabla}_X v, Y\rangle. \tag{11}$$

Поскольку далее мы рассматриваем исключительно ориентируемые гиперповерхности, то поле нормалей ξ к поверхности $\mathcal{M}$ будем считать выбранным и всюду будем использовать обозначение $A = A^{\xi}$. Известно, что если $k_i,\ i = 1, 2, ..., n,$ — главные кривизны поверхности $\mathcal{M}$, то $A(E_i) = k_i E_i$ для собственного базиса $\{E_i\}_{i=1}^n$ оператора A.

Пусть в $\mathbb{R}^{n+1}$ задан ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$, ассоциированный с декартовыми координатами $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, то есть

$$\langle e_i, e_j\rangle = 0,\ i \neq j\ ;\ |e_i|^2 = 1,\ i = 1, \ldots, n+1.$$

Для доказательства основных результатов нам понадобится следующая вспомогательная лемма [3].

Лемма 1. *Если x_i, $i = \overline{1, n+1}$ — координатные функции, то имеют место равенства:*

$$\nabla x_i = e_i^T, \tag{12}$$

$$\operatorname{div}(e_i^T) = n\xi_i H, \tag{13}$$

$$\nabla \xi_i = -A(e_i^T). \tag{14}$$

Доказательство. 1. В силу (9) легко показать (12), что

$$\nabla_E x_i = \langle e_i, E\rangle,\ \nabla x_i = (\overline{\nabla} x_i)^T = e_i^T,$$

следовательно,

$$\nabla x_i = e_i^T.$$

2. Используя равенство (12), определения гомоморфизма Вейнгартена (11) и вектора средней кривизны (10), получаем (13)

$$\Delta x_i = \mathrm{div}(\nabla \mathrm{x_i}) = \mathrm{div}(\mathrm{e_i^T}) = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \langle \nabla_{\mathrm{E_k}} \mathrm{e_i^T}, \mathrm{E_k}\rangle = -\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \langle \overline{\nabla}_{\mathrm{E_k}} \mathrm{e_i^N}, \mathrm{E_k}\rangle =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{E_k} \xi_i \xi, E_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle A(E_k), E_k\rangle \xi_i = n\xi_i H.$$

3. Аналогично вычисляем градиент ξ_i, используя, что e_i — постоянный вектор.

$$\nabla_E \xi_i = \overline{\nabla} E\langle \xi, e_i\rangle = \langle \overline{\nabla}_E \xi, e_i\rangle =$$

$$= \langle \nabla_E \xi, e_i^N\rangle + \langle (\overline{\nabla}_E \xi)^T, e_i^T\rangle = -\langle A(E), e_i^T\rangle.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. В силу того, что функционал (1) можно представить в виде линейной комбинации функционалов (2) и (3), то первая вариация функционала (1) представима в виде

$$\frac{dW(t)}{dt} = \frac{dF(t)}{dt} + \frac{dL(t)}{dt}.$$

Поэтому

$$\left.\frac{dW(t)}{dt}\right|_{t=0} = F'(0) + L'(0).$$

Применяя результаты теорем 1 и 2, получим (7). Теорема 3 доказана.

Замечание. По основной лемме вариационного исчисления из равенства

$$\int\limits_{\mathcal{M}} (\mathrm{div}(\mathrm{D}\Phi(\xi))^{\mathrm{T}} - \mathrm{nH}\Phi(\xi) + \Psi(\mathrm{x}))\mathrm{h}\ \mathrm{d}\mathcal{M} = 0$$

следует, что

$$\mathrm{div}(\mathrm{D}\Phi(\xi))^{\mathrm{T}} - \mathrm{nH}\Phi(\xi) + \Psi(\mathrm{x}) = 0$$

или

$$\mathrm{div}(\mathrm{D}\Phi(\xi))^{\mathrm{T}} + \Psi(\mathrm{x}) = \mathrm{nH}\Phi(\xi). \tag{15}$$

Уравнения (15) также называют уравнениями экстремалей функционала потенциальной энергии (1). Хотя из теоремы 4 видно, что для применения в вычислениях удобнее использовать другой вид.

Доказательство теоремы 4. Заметим, что если в уравнении экстремалей

$$nH\Phi(\xi) = \mathrm{div}((\mathrm{D}\Phi(\xi))^{\mathrm{T}}) + \Psi(\mathrm{x})$$

расписать слагаемое $\mathrm{div}((\mathrm{D}\Phi(\xi))^{\mathrm{T}})$ с учетом того, что в ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ ортогональная проекция $D\Phi(\xi)$ на касательную плоскость есть

$$(D\Phi(\xi))^T = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i} e_i^T$$

и свойств дивергенции

$$\mathrm{div}((\mathrm{D}\Phi)^{\mathrm{T}}) = \mathrm{div}\left(\sum_{\mathrm{i}} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_{\mathrm{i}}} \mathrm{e}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}\right) = \sum_{\mathrm{i}} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_{\mathrm{i}}} \mathrm{div}(\mathrm{e}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}) + \sum_{\mathrm{i}} \langle\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_{\mathrm{i}}}\right), \mathrm{e}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}\rangle,$$

а также используя равенства (13)–(14) из леммы

$$\sum_i \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i} n\xi_i H + \sum_{i,j} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j} \langle\nabla\xi_j, e_i^T\rangle =$$

$$= \sum_i \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i} n\xi_i H - \sum_{i,j} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j} \langle A(e_j^T), e_i^T\rangle =$$

$$= nH\langle D\Phi, \xi\rangle - \sum_{i,j} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\langle A(e_j^T), e_i^T\rangle,$$

то оно перепишется в виде

$$nH(\Phi - \langle D\Phi, \xi\rangle) + \sum_{i,j} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\langle A(e_j^T), e_i^T\rangle = \Psi(x).$$

Так как k_i — главные кривизны поверхности, то для гомоморфизма Вейнгартена справедливо равенство $A(E_i) = k_i E_i$. Следовательно, с учетом определения вектора средней кривизны поверхности (10) и введенного обозначения (4), можно продолжить

$$\sum_{i=1}^{n}\langle A(E_i), E_i\rangle(\Phi - \langle D\Phi, \xi\rangle) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\, k_j\langle e_j^T, e_i^T\rangle = \Psi(x),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\langle A(E_i), E_i\rangle(\Phi - \langle D\Phi, \xi\rangle) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i^2}\langle A(E_i), E_i\rangle = \Psi(x),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\langle A(E_i), E_i\rangle \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i^2} + \Phi - \langle D\Phi, \xi\rangle\right) = \Psi(x),$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\langle E_i, E_i\rangle \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i^2} + \Phi - \langle D\Phi, \xi\rangle\right) = \Psi(x).$$

Таким образом, приходим к формуле (8). Теорема 4 доказана.

4. Следствия из теорем

Следствие 1. *Если экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ является плоскостью, то функция $\Psi(x) = 0$.*

Теорема 5. *Если $f = x_{n+1}$ и $\Phi(\xi) = \Phi(\xi_{n+1})$, то выполнено равенство*

$$\operatorname{div}((\xi_{n+1}\Phi'(\xi_{n+1}) - \Phi(\xi_{n+1}))\nabla f) = \Psi(x)\xi_{n+1}.$$

Доказательство теоремы 5. Преобразуем выражение (15), домножив обе части равенства на ξ_{n+1} и перенося слагаемое с $\Psi(x)$ вправо. Получим

$$\mathrm{div}(\mathrm{D}\Phi)^{\mathrm{T}}\,\xi_{\mathrm{n+1}} - \mathrm{nH}\Phi\xi_{\mathrm{n+1}} = \Psi(\mathrm{x})\xi_{\mathrm{n+1}}. \tag{16}$$

Заметим, что из леммы 1 следуют равенства

$$nH\xi_{n+1} = \operatorname{div}(e_{n+1}^T),\ \ e_{n+1}^T = \nabla x_{n+1}.$$

А так как по условию теоремы $x_{n+1} = f$, то $\nabla x_{n+1} = \nabla f$. Следовательно, $e_{n+1}^T = \nabla f$, и будет верно

$$\operatorname{div}(e_{n+1}^T) = \operatorname{div}(\nabla f).$$

По определению проекции на касательную плоскость имеем

$$(\nabla\Phi)^T = \Phi' e_{n+1}^T.$$

Поэтому справедливо

$$\operatorname{div}(\nabla\Phi)^T = \operatorname{div}(\Phi' e_{n+1}^T) = \operatorname{div}(\Phi'\nabla f).$$

Подставим полученные выражения в (16):

$$\xi_{n+1}\operatorname{div}(\Phi'\nabla f) - \Phi\operatorname{div}(\nabla f) = \Psi(x)\xi_{n+1}. \tag{17}$$

Заметим, что

$$\operatorname{div}(\Phi\nabla\xi_{n+1}) = \langle\nabla\Phi, \nabla f\rangle + \Phi\operatorname{div}(\nabla f),$$

$$\operatorname{div}(\xi_{n+1}\Phi'\nabla f) = \langle\nabla\xi_{n+1}, \Phi'\nabla f\rangle + \xi_{n+1}\operatorname{div}(\Phi'\nabla f).$$

Выразим отсюда последние слагаемые, так как они нужны для подстановки в (17).

$$\Phi\operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}(\Phi\nabla f) - \langle\nabla\Phi, \nabla f\rangle,$$

$$\xi_{n+1}\operatorname{div}(\Phi'\nabla f) = \operatorname{div}(\xi_{n+1}\Phi'\nabla f) - \langle\nabla\xi_{n+1}, \Phi'\nabla f\rangle.$$

Подставим полученное в (17)

$$\operatorname{div}(\xi_{n+1}\Phi'\nabla f) - \langle\nabla\xi_{n+1}, \Phi'\nabla f\rangle - \operatorname{div}(\Phi\nabla f) + \langle\nabla\Phi, \nabla f\rangle = \Psi(x)\xi_{n+1},$$

по свойствам div упростим

$$\operatorname{div}((\xi_{n+1}\Phi' - \Phi)\nabla f) - \langle\nabla\xi_{n+1}, \Phi'\nabla f\rangle + \langle\nabla\Phi, \nabla f\rangle = \Psi(x)\xi_{n+1},$$

заметим $\nabla\Phi = \Phi'\nabla\xi_{n+1}$, поэтому

$$\operatorname{div}((\xi_{n+1}\Phi' - \Phi)\nabla f) = \Psi(x)\xi_{n+1}.$$

Теорема 5 доказана.

Замечание. При $\Psi(x) = 0$ теорема 5 обобщает хорошо известное свойство гармоничности координатных функций минимальных поверхностей. В работе [9] для p-минимальных поверхностей ($\Psi(x) = 0$, $\Phi(\xi) = 1$) аналогичное равенство было положено в основу их определения.

Пример 1. Пусть C^2-гладкая поверхность $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, заданной радиус-вектором

$$\vec{R}(t, \theta) = (t, r(t)\rho(\theta)), \tag{18}$$

$\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\rho(\theta)$ — радиус-вектор сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, $r(t)$ – C^2-гладкая функция на (a, b), ξ_{n+1} — координата единичной нормали к поверхности $\mathcal{M}$ и функция $\Phi(\xi) = \phi(\xi_{n+1})$.

Обозначим $\tau = \xi_{n+1} = -\dot{r}(t)/\sqrt{1 + \dot{r}^2(t)}$,

$$\phi'(\tau) = d\phi/d\xi_{n+1},\ \phi''(\tau) = d^2\phi/d\xi_{n+1}^2,\ \dot{r}(t) = dr(t)/dt,\ \ddot{r}(t) = d^2 r(t)/dt^2,$$

$$B(t) = \frac{\phi''(\tau)}{(1 + \dot{r}^2(t))\left(\phi(\tau) + \dfrac{\phi'(\tau)\dot{r}(t)}{\sqrt{1 + \dot{r}^2(t)}}\right)},\ C(t) = \frac{r(t)\sqrt{1 + \dot{r}^2(t)}}{\phi(\tau) + \dfrac{\phi'(\tau)\dot{r}(t)}{\sqrt{1 + \dot{r}^2(t)}}}.$$

Произведем вычисления производных радиус-вектора для того, чтобы найти главные направления E_i и главные кривизны k_i поверхности.

$$\begin{aligned} R_t &= (1, \dot r(t)\rho(\theta)),\ R_{\theta_i} = (0, r(t)\dot\rho_{\theta_i}(\theta)),\\ R_{tt} &= (0, \ddot r(t)\rho(\theta)),\ R_{t\theta_i} = (0, \dot r(t)\dot\rho(\theta)_{\theta_i}),\\ R_{\theta_i\theta_j} &= (0, r(t)\ddot\rho(\theta)_{\theta_i\theta_j}),\end{aligned}$$

где

$$\dot\rho_{\theta_i}(\theta) = \partial\rho(\theta)/\partial\theta_i,\ \ddot\rho_{\theta_i\theta_j}(\theta) = \partial^2\rho(\theta)/\partial\theta_i\partial\theta_j,\ i,j=\overline{1,\ n-1}.$$

Выпишем координаты единичной нормали

$$\xi = \left(-\dot r(t)/\sqrt{1+\dot r^2(t)},\ \rho(\theta)/\sqrt{1+\dot r^2(t)}\right)$$

и коэффициенты квадратичных форм

$$|R_t|^2 = 1+\dot r^2(t),\ |R_{\theta_i}|^2 = r^2(t)\dot\rho_{\theta_i}(\theta)\dot\rho_{\theta_j}(\theta),$$

$$\begin{aligned} b_{00} &= \langle R_{tt},\ \xi\rangle = \langle(0,\ddot r(t)\rho(\theta)),\ (-\dot r(t)/\sqrt{1+\dot r^2(t)},\ \rho(\theta)/\sqrt{1+\dot r^2(t)})\rangle =\\ &= \frac{\ddot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}},\\ b_{0i} &= \langle R_{t\theta_i},\ \xi\rangle = \langle(0,\dot r(t)\dot\rho_{\theta_i}(\theta)),\ (-\dot r(t)/\sqrt{1+\dot r^2(t)},\ \rho(\theta)/\sqrt{1+\dot r^2(t)})\rangle =\\ &= \frac{\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\rho(\theta)\dot\rho_{\theta_i}(\theta) = 0,\\ b_{ij} &= \langle R_{\theta_i\theta_j},\ \xi\rangle = \langle(0,r(t)\ddot\rho_{\theta_i\theta_j}(\theta)),\ (-\dot r(t)/\sqrt{1+\dot r^2(t)},\ \rho(\theta)/\sqrt{1+\dot r^2(t)})\rangle =\\ &= \frac{r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\rho(\theta)\ddot\rho_{\theta_i\theta_j}(\theta).\end{aligned}$$

Таким образом, первая квадратичная форма

$$I = (1+\dot r^2(t))dt^2 + r^2(t)\dot\rho_{\theta_i}\dot\rho_{\theta_j}d\theta_i d\theta_j = (1+\dot r^2(t))dt^2 + r^2(t)d\theta^2,$$

где $d\theta^2 = \dot\rho_{\theta_i}\dot\rho_{\theta_j}d\theta_i d\theta_j$ — элемент длины для $\mathbb{S}^{n-1}$.

А вторая квадратичная форма имеет вид

$$II = b_{00}\ dt^2 + \sum_{i=1}^{n-1} b_{0i}\ dt\ d\theta_i + \sum_{i<=j} b_{ij}d\theta_i\ d\theta_j =$$

$$= \frac{\ddot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\ dt^2 + \frac{r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\sum_{i<=j}\rho(\theta)\ddot\rho_{\theta_i\theta_j}(\theta)\ d\theta_i\ d\theta_j =$$

$$= \frac{\ddot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\ dt^2 + \frac{r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\ d\widetilde{\theta}^2$$

где $d\widetilde{\theta}^2$ — вторая квадратичная форма для $\mathbb{S}^{n-1}$. Затем находим главные кривизны по формулам [7, гл. 2, § 4, п. 10, с. 99]:

$$k_1 = \ddot r(t)/(1+\dot r^2(t))^{3/2},\ k_i = -1/r(t)\sqrt{1+\dot r^2(t)},$$

где $i = \overline{2, n}$, и главные направления поверхности $\mathcal{M}$

$$E_1 = R_t/|R_t| = \left(1/\sqrt{1+\dot r^2(t)},\ \dot r(t)\rho(\theta)/\sqrt{1+\dot r^2(t)}\right),$$

$$E_i = R_{\theta_i}/|R_{\theta_i}| = (0,\ \dot\rho_{\theta_i}/|\dot\rho_{\theta_i}|).$$

Перейдем к вычислению скалярного произведения векторов

$$\langle D\phi,\ \xi\rangle = -\frac{\dot r(t)\phi'(\tau)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}$$

и найдем значения матриц $D^2\phi$ и G на векторах E_i, координаты которых мы записали выше,

$$D^2\phi(E_1, E_1) = \frac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)},\ D^2\phi(E_i, E_i) = 0,\ i = \overline{2, n},$$

$$G(E_1, E_1) = \frac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)} + \phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}},\ G(E_i, E_i) = \phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}. \tag{19}$$

Теперь подставим подсчитанное в равенство (8) и получим уравнение экстремалей поверхности $\mathcal{M}$, заданной радиус-вектором (18).

Так как все k_i при $i = \overline{2, n}$ равны и для $G(E_i, E_i)$ ситуация аналогичная, то равенство (8) можно записать так:

$$k_1 G(E_1, E_1) + (n-1)\sum_{i=2}^{n} k_i G(E_i, E_i) = \Psi(x).$$

После подстановки выражений из (19) уравнение экстремалей принимает вид

$$\frac{\ddot r(t)}{(1+\dot r^2(t))^{3/2}}\left(\frac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)} + \phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right) -$$

$$-\frac{n-1}{r(t)\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\left(\phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right) = \Psi(x).$$

Преобразуем его, домножив обе части равенства на $r(t)\sqrt{1+\dot r^2(t)}$,

$$\frac{\ddot r(t) r(t)}{1+\dot r^2(t)}\left(\frac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)} + \phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right) -$$

$$-(n-1)\left(\phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right) = \Psi(x) r(t)\sqrt{1+\dot r^2(t)}.$$

Затем выразим $\ddot r(t) r(t)/(1+\dot r^2(t))$ и получим

$$\frac{\ddot r(t) r(t)}{1+\dot r^2(t)} = \frac{(n-1)\left(\phi(\tau) + \dfrac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right) + \Psi(x) r(t)\sqrt{1+\dot r^2(t)}}{\dfrac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)} + \phi(\tau) + \dfrac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}}.$$

Сократим выражение в правой части на сумму $\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)$.

$$\frac{\ddot r(t)r(t)}{1+\dot r^2(t)}=\frac{(n-1)+\Psi(x)\dfrac{r(t)\sqrt{1+\dot r^2(t)}}{\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}}}{\dfrac{\phi''(\tau)}{(1+\dot r^2(t))\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)}+1}.$$

Применим вышепринятые обозначения $B(t)$, $C(t)$, и уравнение примет вид

$$\frac{r(t)\ddot r(t)}{1+\dot r^2(t)}-\frac{(n-1)+\Psi(x)C(t)}{B(t)+1}=0.$$

Таким образом получено уравнение экстремалей для поверхностей вращения.

Замечание. В работах [6; 8] были получены уравнения экстремалей для поверхностей вращения при $\Psi(x)=0$.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 15-41-02479 р_поволжье_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клячин, В. А. О некоторых свойствах устойчивых и неустойчивых поверхностей предписанной средней кривизны / В. А. Клячин // Изв. РАН. Сер. мат. — 2006. — Т. 70, № 4. — С. 77–90.

2. Клячин, В. А. Об устойчивости экстремальных поверхностей некоторых функционалов типа площади / В. А. Клячин, Н. М. Медведева // Сибирские электронные математические известия. Статьи. — 2007. — Т. 4. — С. 113–132.

3. Клячин, В. А. Признаки неустойчивости поверхностей нулевой средней кривизны в искривленных лоренцевых произведениях / В. А. Клячин, В. М. Миклюков // Мат. сб. — 1996. — Т. 187, № 11. — С. 67–88.

4. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. — М. : Наука, 1981. — Т. 1. — 175 с.

5. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. — М. : Наука, 1981. — Т. 2. — 212 с.

6. Медведева, Н. М. Исследование устойчивости экстремальных поверхностей вращения / Н. М. Медведева // Известия Саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2007. — Т. 7, № 2. — С. 25–32.

7. Позняк, Э. Г. Дифференциальная геометрия: первое знакомство / Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин. — М. : МГУ, 1990. — 384 с.

8. Полубоярова, Н. М. Исследование устойчивости n-мерных экстремальных поверхностей вращения / Н. М. Полубоярова // Изв. вузов. Мат. — 2011. — № 2. — С. 106–109.

9. Tkachev, V. G. External geometry of p-minimal surfaces / V. G. Tkachev // Geometry from the Pacific Rim. — Berlin ; N. Y. : de Gruyter, 1997. — P. 363–375.

REFERENCES

1. Klyachin V.A. O nekotorykh svoystvakh ustoychivykh i neustoychivykh poverkhnostey predpisannoy sredney krivizny [On Some Properties of Stable and Unstable Surfaces with Prescribed Mean Curvature]. *Izv. RAN. Ser. mat.* [Izvestiya: Mathematics], 2006, vol. 70, no. 4, pp. 77-90.
2. Klyachin V.A., Medvedeva N.M. Ob ustoychivosti ekstremalnykh poverkhnostey nekotorykh funktsionalov tipa ploshchadi [On the Stability of Extremal Surfaces for a Certain Area-Type Functional]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya. Statyi* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2007, vol. 4, pp. 113-132.
3. Klyachin V.A., Miklyukov V.M. Priznaki neustoychivosti poverkhnostey nulevoy sredney krivizny v iskrivlennykh lorentsevykh proizvedeniyakh [Criteria of Instability of Surfaces of Zero Mean Curvature in Warped Lorentz Products]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 1996, vol. 187, no. 11, pp. 67-88.
4. Kobayashi Sh., Nomizu K. *Osnovy differentsialnoy geometrii* [Foundations of Differential Geometry]. Moscow, Nauka Publ., 1981, vol. 1. 175 p.
5. Kobayashi Sh., Nomizu K. *Osnovy differentsialnoy geometrii* [Foundations of Differential Geometry]. Moscow, Nauka Publ., 1981, vol. 2. 212 p.
6. Medvedeva N.M. Issledovanie ustoychivosti ekstremalnykh poverkhnostey vrashcheniya [Research of the Stability of Extreme Surfaces of Rotation]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2007, vol. 7, no. 2, pp. 25-32.
7. Poznyak E.G., Shikin E.V. *Differentsialnaya geometriya: pervoe znakomstvo* [Differential Geometry: First Introduction]. Moscow, MGU Publ., 1990. 384 p.
8. Poluboyarova N.M. Issledovanie ustoychivosti n-mernykh ekstremalnykh poverkhnostey vrashcheniya [Research of the Stability of n-Dimensional Extreme Surfaces of Rotation]. *Izv. vuzov. Mat.*, 2011, no. 2, pp. 106-109.
9. Tkachev V.G. External geometry of p-minimal surfaces. *Geometry from the Pacific Rim*, Berlin; N. Y., de Gruyter, 1997, pp. 363-375.

EXTREMALS OF THE EQUATION FOR THE POTENTIAL ENERGY FUNCTIONAL

Natalia Mikhaylovna Poluboyarova

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Computer Science and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
nmedv@mail.ru, natasha_medvedeva@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. To study the surfaces on the stability (or instability) it is necessary to obtain the expression of the first and second functional variation. This article presents the first part of the research of the functional of potential energy. We calculate the first variation of the potential energy functional and prove some consequences of them. They help to build the extreme surface of rotation.

Let M be an n dimensional connected orientable manifold from the class C^2. We consider a hypersurface $\mathcal{M} = (M, u)$, obtained by a C^2 -immersion $u : M \to \mathbf{R}^{n+1}$. Let $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ be a domain such that $\mathcal{M} \subset \partial\Omega$; $\Phi,\ \Psi : \mathbf{R}^{n+1} \to$ $\to \mathbf{R}$ — C^2-smooth function. If ξ the field of unit normals to the surface $\mathcal{M}$, then for any C^2-smooth surfaces $\mathcal{M}$ defined functional

$$W(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Phi(\xi)\, d\mathcal{M} + \int\limits_{\Omega} \Psi(x)\, dx,$$

which we call the functional of potential energy. It is the main object of study.

Theorem of the first variation of the functional.

Theorem 3. *If* $W(t) = W(\mathcal{M}_t)$, *then*

$$W'(0) = \int\limits_{\mathcal{M}} (\operatorname{div}(D\Phi(\xi))^T - nH\Phi(\xi) + \Psi(x))h(x)\, d\mathcal{M},$$

where $h(x) \in C_0^1(\mathcal{M})$.

Theorem 4 is the the main theorem of this article. It obtained the equations of extremals of the functional of potential energy.

Theorem 4. *A surface* $\mathcal{M}$ *of class* C^2 *is extremal of functional of potential energy if and only if*

$$\sum_{i=1}^{n} k_i G(E_i, E_i) = \Psi(x).$$

Corollary. *If an extreme surface* $\mathcal{M}$ *is a plane, then the function* $\Psi(x) = 0$.

Theorem 5. *If* $f = x_{n+1}$ *and* $\Phi(\xi) = \Phi(\xi_{n+1})$, *then*

$$\operatorname{div}((\xi_{n+1}\Phi'(\xi_{n+1}) - \Phi(\xi_{n+1}))\nabla f) = \Psi(x)\xi_{n+1}.$$

Key words: variation of functional, extreme surface, functional of area type, volumetric power density functional, functional of potential energy, mean curvature of extreme surface.