DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.5.9

УДК 517.984
ББК 22.162

ДИСКРЕТНОСТЬ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕТРИКИ МНОГООБРАЗИЯ [1]

Андрей Владимирович Светлов

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
andrew.svetlov@volsu.ru, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В работе исследуется дискретность спектра оператора Шредингера на простых искривленных произведениях порядка k при специальном квазиизометричном преобразовании метрики этого многообразия. Основная цель — утверждение о сохранении свойства дискретности спектра.

Ключевые слова: дискретность спектра, оператор Шредингера, римановы многообразия, квазимодельные многообразия, искривленные произведения.

Главным объектом исследования в данной статье является оператор Шредингера $L = -\Delta + c(\cdot)$, где $-\Delta = -\mathrm{div}\nabla$ — оператор Лапласа — Бельтрами, на некоторых многообразиях специального вида.

Для начала рассмотрим риманово многообразие Z, изометричное произведению $X \times Y$ (где X — произвольное многообразие размерности n, а Y — компактное размерности m) с метрикой

$$dz^2 = dx^2 + \gamma^2(x)dy^2,$$

где $\gamma(x)$ — C^1-гладкая положительная функция; dx^2 и dy^2 — метрики на X и Y соответственно, то есть

$$dx^2 = \sum \mathfrak{a}_{ij}(x)dx_i dx_j,$$

$$dy^2 = \sum \mathfrak{b}_{kl}(y)dy_k dy_l.$$

Следовательно, метрический тензор на Z имеет вид

$$\|\mathfrak{g}_{st}\| = \left\| \begin{array}{c|c} \|\mathfrak{a}_{ij}(x)\| & 0 \\ \hline 0 & \gamma^2(x)\|\mathfrak{b}_{kl}(y)\| \end{array} \right\|,$$

а определитель $\mathcal{G} = \det\|\mathfrak{g}_{st}\| = \det\|\mathfrak{g}^{st}\|^{-1} = \gamma^{2m}(x)\mathcal{A}(x)\mathcal{B}(y)$, где мы обозначили $\mathcal{A}(x) = \det\|\mathfrak{a}_{ij}\|$, $\mathcal{B}(y) = \det\|\mathfrak{b}_{kl}\|$.

Будем предполагать, что метрика $\|\mathfrak{g}_{st}\|$ многообразия Z претерпевает изменения, описываемые матрицей $\sigma(x)$, у которой все отличные от нуля элементы стоят на главной диагонали и она имеет вид

$$\|\sigma(x)\| = \left\| \begin{array}{c|c} \|\sigma_1(x)\| & 0 \\ \hline 0 & \|\sigma_2(x)\| \end{array} \right\|,$$

где $\|\sigma_1(x)\|$ — тоже диагональная матрица с C^1-гладкими коэффициентами, $\|\sigma_2(x)\| = \tilde{\sigma}_2{}^2(x) E_m$ (здесь $\tilde{\sigma}_2{}^2(x)$ — C^1-гладкая положительная функция; E_m — единичная матрица $m \times m$). Обозначим через $\Sigma(x) = \det \|\sigma(x)\| = \det \|\sigma_1(x)\| \tilde{\sigma}_2{}^{2m}(x)$, через $\mathfrak{p} = \sigma\mathfrak{g}$ — произведение матриц $\sigma(x)$ и $\mathfrak{g}(x)$, соответственно определитель этой матрицы $\mathcal{P} = \det \|\mathfrak{p}_{ij}\| = \gamma^{2m}(x)\mathcal{A}(x)\mathcal{B}(y)\Sigma(x)$.

Оператор Лапласа — Бельтрами при таком изменении метрики преобразуется следующим образом:

$$-\widetilde{\Delta} = -\frac{1}{\sqrt{\Sigma}} \mathrm{div}(\sqrt{\Sigma}\sigma^{-1}\nabla) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{P}}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}(\sqrt{\mathcal{P}}\mathfrak{p}^{ij}\frac{\partial}{\partial z_j}).$$

Справедлива следующая лемма о представлении оператора Шредингера на таких многообразиях. Введем для этого еще одно обозначение $\mathfrak{r} = \sigma_1\mathfrak{a}$ — произведение матриц $\sigma_1(x)$ и $\mathfrak{a}(x)$ и его определитель $\mathcal{R}$.

Лемма 1. *Оператор Шредингера $L = -\Delta + c(x)$ после описанного преобразования метрики на многообразии Z принимает вид*

$$\widetilde{L} = L_0 + \tilde{\sigma}_2{}^{-2}(x)\gamma^{-2}(-\Delta_Y),$$

где L_0 — оператор Шредингера на многообразии X с метрикой, преобразованной матрицей $\sigma_1(x)$, и с мерой плотности $\tilde{\sigma}_2{}^m(x)\gamma^m(x)$:

$${}_0 = -\frac{1}{\tilde{\sigma}_2{}^m(x)\gamma^m(x)\sqrt{\mathcal{R}(x)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{\sigma}_2{}^m(x)\gamma^m(x)\sqrt{\mathcal{R}(x)}\mathfrak{r}^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j} \right) + c(x),$$

а $-\Delta_Y$ — оператор Лапласа — Бельтрами на многообразии Y:

$$-\Delta_Y = -\frac{1}{\sqrt{\mathcal{B}(y)}} \sum_{k,l=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\sqrt{\mathcal{B}(y)}\mathfrak{b}^{kl}\frac{\partial}{\partial y_l} \right).$$

Доказательство этой леммы получается непосредственным вычислением, аналогично подобному утверждению для оператора Лапласа — Бельтрами [1].

Теперь перейдем к рассмотрению спектра оператора Шредингера на этом многообразии при описанном преобразовании метрики.

Теорема 1. *Оператор Шредингера на многообразии $X \times Y$, метрика которого преобразована матрицей $\|\sigma(x)\|$, имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда дискретен спектр оператора L_0 на многообразии X с метрикой, преобразованной матрицей $\sigma_1(x)$, и с мерой плотности $\tilde{\sigma}_2{}^m(x)\gamma^m(x)$.*

Доказательство. Заметим, что, поскольку речь в данной теореме идет об изменении метрики, нам будет удобнее обозначать рассматриваемое многообразие тройкой

$(X \times Y, \mathfrak{g}, \mathbf{v})$, где $\mathbf{v}$ — мера на многообразии, совпадающая с римановым объемом. Тогда, после изменения метрики матрицей $\|\sigma(x)\|$, объектом рассмотрения становится многообразие $(X \times Y, \mathfrak{p}, \mathbf{v})$. Относительно этого многообразия справедлива теорема 4 из [4], в соответствии с которой дискретность спектра оператора Шредингера на многообразии $(X \times Y, \mathfrak{p}, \mathbf{v})$ эквивалентна дискретности спектра оператора Шредингера на многообразии $(X, \mathfrak{r}, \mu)$, где μ — мера на многообразии X плотности $\tilde{\sigma_2}^m(x)\gamma^m(x)$. Заметим, что этот оператор есть оператор L_0, описанный предыдущей леммой, а само такое многообразие можно рассматривать как многообразие $(X, \mathfrak{a}, \mu)$, метрика которого преобразована матрицей $\|\sigma_1(x)\|$. Так как $\mathfrak{a}$ — исходная метрика многообразия X, опуская ее, получаем утверждение теоремы.

Далее рассмотрим полное риманово многообразие D — простое искривленное произведение порядка k, то есть многообразие, изометричное произведению $\mathbb{R}_+ \times \mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2 \times \dots \times \mathrm{S}_k$ (где $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, а S_i — компактные римановы многообразия без края, $\dim \mathrm{S}_i = n_i$) с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + q_1^2(r)d\theta_1^2 + \dots + q_k^2(r)d\theta_k^2,$$

где $d\theta_i^2$ — метрика на S_i, а $q_i(r)$ — C^1-гладкие положительные на $\mathbb{R}_+$ функции. Обозначим $s(r) = q_1^{n_1}(r) \cdots q_k^{n_k}(r)$. Пусть преобразование метрики на этом многообразии задается матрицей $\sigma(r)$ следующего вида:

$$\|\sigma(r)\| = \left\| \begin{array}{c|ccc} \delta_0^2(r) & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \delta_1^2(r)E_{n_1} & \dots & 0 \\ \hline \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & \delta_k^2(r)E_{n_k} \end{array} \right\|.$$

Все коэффициенты этой матрицы полагаем C^1-гладкими, а ее определитель будем обозначать, как и выше, $\Sigma(r)$. Для описанной матрицы его, очевидно, нетрудно вычислить:

$$\Sigma(r) = \det \|\sigma(r)\| = \delta_0^2(r)\delta_1^{2n_1}(r) \cdots \delta_k^{2n_k}(r).$$

Оператор Лапласа — Бельтрами при таком изменении метрики преобразуется следующим образом:

$$-\widetilde{\Delta} = -\frac{1}{\sqrt{\Sigma}} \mathrm{div}(\sqrt{\Sigma}\sigma^{-1}\nabla).$$

Далее рассмотрим оператор Шредингера $L = -\Delta + c(r)$ на многообразии D. Как и выше, оператор Шредингера, полученный после преобразования метрики, обозначаем $\widetilde{L}$. Далее нам понадобятся следующие обозначения:

$$F(r) = c(r) + \left(\frac{s'(r)}{2s(r)}\right)' + \left(\frac{s'(r)}{2s(r)}\right)^2,$$

$$\Phi(r) = \left(\frac{\delta'(r)}{2\delta(r)}\right)' + \frac{s'(r)\delta'(r)}{2s(r)\delta(r)} + \left(\frac{\delta'(r)}{2\delta(r)}\right)^2,$$

где $\delta(r) = \frac{\sqrt{\Sigma(r)}}{\delta_0(r)}$.

Теорема 2. *Если $F(r)+\Phi(r) > -C$ ($C = \mathrm{const} > 0$), то для дискретности спектра оператора Шредингера L на многообразии D необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\omega > 0$ было выполнено*

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{r}^{r+\omega}(F(r)+\Phi(r))dr = +\infty.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{g}$ метрику на многообразии D. Тогда после преобразования этой метрики матрицей $\|\sigma(x)\|$ мы получим на многообразии D новую метрику $\mathfrak{p} = \sigma\mathfrak{g}$. Учитывая, что матрица $\|\sigma(x)\|$ — диагональная, эту метрику легко записать в дифференциальной форме:

$$d\zeta^2 = \delta_0^2(r)dr^2 + \delta_1^2(r)q_1^2(r)d\theta_1^2 + \dots + \delta_k^2(r)q_k^2(r)d\theta_k^2.$$

Но тогда $L = -\widetilde{\Delta} + c(r)$ — обычный оператор Шредингера на многообразии D с описанной метрикой $\mathfrak{p}$, и для него справедлива теорема 2 из [5]. В соответствии с этой теоремой и введенными выше обозначениями имеем, что спектр оператора L на многообразии D дискретен тогда и только тогда, когда для произвольного $\omega > 0$ было выполнено

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{r}^{r+\omega}(F(r)+\Phi(r))dr = +\infty.$$

Что и утверждает теорема.

Заметим теперь, что для того чтобы матрица $\sigma(r)$ описывала квазиизометричное преобразование метрики, нужно потребовать (см., например, [6]), чтобы она удовлетворяла следующим условиям для некоторой константы $\alpha \geqslant 1$:

$$\alpha^{-1}|\xi|^2 \leqslant (\sigma\xi,\xi)_{\mathfrak{g}} \leqslant \alpha|\xi|^2, \quad \text{для всех } \xi \in TD \tag{1}$$

и

$$\alpha^{-n} \leqslant \Sigma(r) \leqslant \alpha^n. \tag{2}$$

Если теперь в условии (1) мы будем выбирать векторы ξ такие, у которых лишь одна координата ненулевая, то из него мы немедленно получим, что

$$\alpha^{-1} \le \delta_i^2(r) \le \alpha \quad \text{для всех } i = 1,\dots,k. \tag{3}$$

А из этого условия неравенство (2) следует автоматически.

Следствие 1. *Если на многообразии D оператор Шредингера L имел дискретный спектр, то при таком квазиизометричном изменении метрики многообразия D диагональной матрицей $\|\sigma(r)\|$, что $\Phi(r) > \mathrm{const}$, спектр оператора Шредингера $\widetilde{L}$ останется дискретным. Аналогично недискретный спектр останется недискретным.*

Доказательство данного следствия очевидно благодаря наличию очень жесткого условия $\Phi(r) > \mathrm{const}$. Нетрудно заметить, что при произвольном квазиизометричном преобразовании метрики функция $\Phi(r)$ может оказаться неограниченной снизу, и тогда никаких выводов о сохранении свойства дискретности спектра сделать будет невозможно. Но если выбирать коэффициенты $\delta_i(r)$, например, монотонно возрастающими, то это гарантирует выполнение условий следствия и, значит, обеспечит сохранение свойства дискретности спектра при квазиизометричном преобразовании метрики.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 15-41-02479-р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Светлов, А. В. Дискретность спектра оператора Лапласа — Бельтрами и преобразование метрики многообразия / А. В. Светлов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2009. — Вып. 12. — С. 45–51.

2. Светлов, А. В. Критерий дискретности спектра оператора Лапласа — Бельтрами на квазимодельных многообразиях / А. В. Светлов // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43, № 6. — С. 1362–1371.

3. Светлов, А. В. О спектре оператора Шредингера на многообразиях специального вида / А. В. Светлов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14, № 4–2. — С. 584–589.

4. Светлов, А. В. Спектр оператора Шредингера на скрещенных произведениях / А. В. Светлов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2002. — Вып. 7. — С. 12–19.

5. Светлов, А. В. Условия дискретности спектра оператора Шредингера / А. В. Светлов // Труды по геометрии и анализу. — Новосибирск : Изд-во ин-та математики, 2003. — С. 376–383.

6. Saloff-Coste, L. Uniformly elliptic operators on Riemannian manifolds / L. Saloff-Coste // J. Diff. Geom. — 1992. — № 36. — P. 417–450.

REFERENCES

1. Svetlov A.V. Diskretnost spektra operatora Laplasa — Beltrami i preobrazovanie metriki mnogoobraziya [Disreteness of the Spectrum for the Laplace — Beltrami Operator and Metric Transformation on Manifold]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2009, iss. 12, pp. 45-51.

2. Svetlov A.V. Kriteriy diskretnosti spektra operatora Laplasa — Beltrami na kvazimodelnykh mnogoobraziyakh [A Discreteness Criterion for the Spectrum of the Laplace — Beltrami Operator on Quasimodel Manifolds]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 2002, vol. 43, no. 6, pp. 1362-1371.

3. Svetlov A.V. O spektre operatora Shredingera na mnogoobraziyakh spetsialnogo vida [On Spectrum of Schrodinger Operator on Manifold of a Special Type]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2014, vol. 14, no. 4-2, pp. 584-589.

4. Svetlov A.V. Spektr operatora Shredingera na skreshchennykh proizvedeniyakh [The Spectrum of the Schrödinger Operator on the Warped Products]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2002, iss. 7, pp. 12-19.

5. Svetlov A.V. Usloviya diskretnosti spektra operatora Shredingera [Discreteness Conditions for the Spectrum of the Schrödinger Operator]. *Trudy po geometrii i analizu.* Novosibirsk, Izd-vo in-ta matematiki, 2003, pp. 376-383.

6. Saloff-Coste L. Uniformly Elliptic Operators on Riemannian Manifolds. *J. Diff. Geom.*, 1992, no. 36, pp. 417-450.

DISRETENESS OF THE SPECTRUM FOR THE SCHRÖDINGER OPERATOR AND METRIC TRANSFORMATION ON MANIFOLD

Andrey Vladimirovich Svetlov
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
andrew.svetlov@volsu.ru, matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In this paper we prove the conservation property for the discreteness of the spectrum for the Schrödinger operator on the simple warped products of order k with the special kind of quasi-isometric transformation of the metric.

Let's consider a complete noncompact Riemannian manifold D, which is isometric to the product $\mathbb{R}_+ \times \mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2 \times \dots \times \mathrm{S}_k$ (где $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, a S_i are compact Riemannian manifolds without boundary) with metric

$$ds^2 = dr^2 + q_1^2(r) d\theta_1^2 + \dots + q_k^2(r) d\theta_k^2,$$

where $d\theta_i^2$ is the metric on S_i and $q_i(r)$ is a smooth positive function on $\mathbb{R}_+$. We assume $\dim \mathrm{S}_i = n_i$ and denote $s(r) = q_1^{n_1}(r) \cdots q_k^{n_k}(r)$.

Metric transformation on this manifold is determined by the following matrix $\sigma(r)$.

$$\|\sigma(r)\| = \left\| \begin{array}{c|ccc} \delta_0^2(r) & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \delta_1^2(r) E_{n_1} & \dots & 0 \\ \hline \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & \delta_k^2(r) E_{n_k} \end{array} \right\|.$$

The coefficients of this matrix are C^1-smooth, and let's $\Sigma(r)$ will stand for its determinant. Actually, we can easily calculate it:

$$\Sigma(r) = \det \|\sigma(r)\| = \delta_0^2(r) \delta_1^{2n_1}(r) \cdots \delta_k^{2n_k}(r).$$

On the manifold D we study the Laplace — Beltrami operator

$$-\Delta = -\mathrm{div} \nabla$$

and the Schrödinger operator

$$-\Delta = -\mathrm{div} \nabla + c(r).$$

With the mentioned metric transformation the Laplace — Beltrami operator will change to

$$-\widetilde{\Delta} = -\frac{1}{\sqrt{\Sigma}} \mathrm{div}(\sqrt{\Sigma} \sigma^{-1} \nabla).$$

Transformed Schrödinger operator we write as $\widetilde{L} = -\widetilde{\Delta} + c(r)$. Also we put

$$F(r) = c(r) + \left(\frac{s'(r)}{2s(r)} \right)' + \left(\frac{s'(r)}{2s(r)} \right)^2,$$

$$\Phi(r) = \left(\frac{\delta'(r)}{2\delta(r)}\right)' + \frac{s'(r)\delta'(r)}{2s(r)\delta(r)} + \left(\frac{\delta'(r)}{2\delta(r)}\right)^2,$$

where $\delta(r) = \frac{\sqrt{\Sigma(r)}}{\delta_0(r)}$.

Then we get the following theorem.

Theorem. *Let's* $F(r) + \Phi(r) > -C$ $(C = \mathrm{const} > 0)$. *The spectrum of the Schrödinger operator* $\widetilde{L}$ *on the manifold* D *is discrete if and only if*

$$\forall \omega > 0 \quad \lim_{r\to\infty} \int\limits_r^{r+\omega} (F(r) + \Phi(r))dr = +\infty.$$

And next we come to the following corollary.

Corollary. If the Schrodinger operator L on manifold D has discrete spectrum, and we transform the metric of D with some diagonal matrix $\|\sigma(r)\|$, and $\Phi(r) > \mathrm{const}$, then the Schrödinger operator $\widetilde{L}$ has discrete spectrum too. The same way non-discrete spectrum holds this characteristic.

Key words: spectrum discreteness, Schrödinger operator, Riemannian manifolds, quasimodel manifolds, warped products.