www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.5.10

УДК 517.55+004.94
ББК 22.161.5+32.973.2

ФОРМУЛЫ ДЛЯ МЛАДШИХ ТЕЙЛОРОВСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОРОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Валерий Игоревич Суковых

Ассистент кафедры цифровых технологий,
Воронежский государственный университет
sukovyh@gmail.com
пл. Университетская, 1, 394045 г. Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. В статье развивается коэффициентный подход к задаче описания голоморфно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства. В модельной ситуации поверхностей общего положения совокупность из 100 параметров, определяющих однородные строго псевдо-выпуклые многообразия, сводится к 7 тейлоровским коэффициентам нормального уравнения Мозера.

Описываются промежуточные формулы для коэффициентов и параметров векторных полей, касательных к обсуждаемым однородным многообразиям. Строится система полиномиальных уравнений на итоговую группу параметров. Получена оценка количества однородных поверхностей изучаемого класса.

Все необходимые сложные вычисления реализуются в пакете символьной математики Maple.

Ключевые слова: голоморфное преобразование, ряд Тейлора, вещественная гиперповерхность, алгебра Ли, нормальная форма уравнения, система полиномиальных уравнений, символьные вычисления.

Введение

Настоящая статья связана с задачей описания голоморфно-однородных вещественных гиперповерхностей в трехмерных комплексных пространствах, достаточно интенсивно изучаемой в последние годы (см.: [7; 8; 10; 14]). В статье развивается общий подход к изучению однородности на основе символьной математики и компьютерных вычислений. Целью такого подхода является поиск аналогичного результату [4] решения задачи об однородности в терминах тейлоровских коэффициентов функций, определяющих изучаемые многообразия. Упомянутый результат А.В. Лободы позволил кратко (см. для сравнения статью [11] Э. Картана) описать все однородные вещественные гиперповерхности двумерных комплексных пространств.

Ясно, что в трехмерном случае аналогичная задача гораздо более сложна. Как показано в [3] (см. также [9; 13]), объем информации, необходимой для решения подобных задач, можно удерживать и эффективно обрабатывать лишь с помощью компьютерных технологий. При этом необходимо «соблюдать меру компьютеризации» задачи, поскольку полученные в [3] формулы имеют громоздкий вид, а главные результаты не дают окончательных «прикладных» формулировок.

В данной статье рассматривается один частный случай задачи об однородности строго псевдо-выпуклых (СПВ) гиперповерхностей, в котором результирующие формулы работы [3] существенно упрощаются. Такое упрощение позволяет ставить (и в ближайшей перспективе решать) задачу об оценке количества обсуждаемых однородных поверхностей как в изучаемом частном случае, так и (при обобщении и уточнении предлагаемой схемы) в общей ситуации.

Напомним, что любая из однородных поверхностей, изучаемых в работе [3], однозначно определяется набором из 16 тейлоровских коэффициентов своего нормального (по Мозеру) уравнения. При этом имеется система из 26 громоздких полиномиальных уравнений, связывающих элементы этого набора.

Главным результатом данной статьи является уменьшение количества параметров, описывающих свойство однородности. В рассматриваемом случае, связанном с обнулением части из 16 опорных коэффициентов, система [4] упрощается до 5 уравнений относительно 7 коэффициентов.

Кроме того, получены обозримые формулы, выражающие остальные параметры опорного набора через выделенную семерку коэффициентов. Эти формулы базируются на связях между параметрами голоморфных векторных полей, касательных к изучаемым однородным поверхностям. В обсуждаемом случае эти связи также имеют упрощенный вид.

Полученные в статье соотношения являются важным результатом, поскольку при многоступенчатом компьютерно-алгоритмическом способе получения подобных формул требуются постоянный контроль и многочисленные проверки вычислений. В статье рассмотрен пример, подтверждающий справедливость полученных в ней формул при сопоставлении их с коэффициентами реальной однородной поверхности. Этот пример использует тесные связи аффинной и голоморфной геометрии, конструктивно проявляющиеся на трубчатых многообразиях (см. также [2]).

1. Нормальное уравнение Мозера и опорный набор многочленов

Обозначим комплексные координаты в $\mathbb{C}^3$ через z_1, z_2, w, выделяя при этом вещественную и мнимую части последней координаты:

$$u = Re\, w, \ v = Im\, w.$$

Вещественно-аналитическую СПВ-гиперповерхность M пространства $\mathbb{C}^3$ зададим нормальным по Мозеру (см. [12]) уравнением:

$$v = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + \sum_{k,l \geq 2, m \geq 0} N_{klm}(z, \bar{z}) u^m. \tag{1.1}$$

Здесь $N_{klm}(z,\bar{z})$ — однородный многочлен степени k по z, l по $\bar{z}$, а строгая псевдовыпуклость поверхности гарантируется положительной определенностью формы Леви поверхности, то есть многочлена второй степени

$$< z, z >= |z_1|^2 + |z_2|^2$$

из уравнения (1.1).

Известно [8], что всякая голоморфно-однородная СПВ-гиперповерхность однозначно определяется опорным набором из семи многочленов

$$N_{220}, N_{221}, N_{222}, N_{320}, N_{330}, N_{321}, N_{420}, \tag{1.2}$$

содержащихся в уравнении (1.1).

Первые шесть многочленов из этого набора можно считать удовлетворяющими некоторым дополнительным ограничениям, введенным в [8] и [12].

Например, согласно [12] многочлены $N_{220}, N_{221}, N_{222}$ из нормального уравнения Мозера (1.1) являются элементами 5-мерного пространства $\mathcal{N}_{22}$ вещественнозначных многочленов. Базисом этого пространства являются многочлены

$$E_0 = |z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4,\ E_1 = z_1^2\bar{z}_2^2 + z_2^2\bar{z}_1^2,\ E_2 = i(z_1^2\bar{z}_1^2 - z_2^2\bar{z}_1^2), \tag{1.3}$$

$$E_3 = (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1)(|z_1|^2 - |z_2|^2), \quad E_4 = i(z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1)(|z_1|^2 - |z_2|^2).$$

В силу обсуждений [7; 8] основной интерес в задаче об однородности представляет ситуация, в которой

$$N_{220} = E_3 + \mu E_0,\ \mu \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Из [3] видно, что реализация предложенной в этой работе схемы изучения однородности приводит в случаях с произвольными μ к чрезмерно громоздким формулам.

По этой причине ниже рассматривается случай

$$\mu = 0, \tag{1.5}$$

в котором обсуждаемые формулы существенно упрощаются.

Разложения многочленов N_{221}, N_{222} из набора (1.2) будем записывать в виде

$$N_{221} = \sum_{k=0}^{5} \lambda_k E_k, \quad N_{222} = \sum_{k=0}^{5} \lambda'_k E_k, \quad \lambda_k, \lambda'_k \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Остальные многочлены из опорного набора (1.2) удобно задавать прямоугольными матрицами их коэффициентов. Например,

$$N_{320} \sim \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \\ \omega_7 & \omega_8 & \omega_9 \\ \omega_{10} & \omega_{11} & \omega_{12} \end{pmatrix}, \quad N_{321} \sim \begin{pmatrix} \omega'_1 & \omega'_2 & \omega'_3 \\ \omega'_4 & \omega'_5 & \omega'_6 \\ \omega'_7 & \omega'_8 & \omega'_9 \\ \omega'_{10} & \omega'_{11} & \omega'_{12} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

При этом

$$N_{320} = \sum_{1\le k\le 3,\ 0\le j\le 3} \omega_{k+3j}\, z_1^{3-j}\, z_2^{j}\, \bar{z}_1^{2-k+1}\, \bar{z}_2^{k-1}. \tag{1.8}$$

С многочленами N_{420}, N_{330} по аналогичным формулам, выписанным в [8], связываются их матрицы коэффициентов

$$N_{420} \sim \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ s_4 & s_5 & s_6 \\ s_7 & s_8 & s_9 \\ s_{10} & s_{11} & s_{12} \\ s_{13} & s_{14} & s_{15} \end{pmatrix}, \quad N_{330} \sim \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_5 & t_6 & t_7 & t_8 \\ t_9 & t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Согласно формуле (1.8) многочлен N_{320} описывается посредством 12 комплексных коэффициентов. В действительности имеются еще условия

$$3\omega_1 + \omega_5 + \omega_9 = 0, \quad 3\omega_{12} + \omega_8 + \omega_4 = 0 \tag{1.10}$$

принадлежности многочленов N_{320}, N_{321} из нормального уравнения (1.1) специальным пространствам Мозера.

В силу условий (1.10) каждый из этих двух многочленов определяется не более чем 10 коэффициентами. В [4] показано, что в общей ситуации однородности число существенных коэффициентов для многочлена N_{320} может быть понижено до 6, но «понижающие формулы» также имеют чрезмерно громоздкий вид.

В качестве уменьшенного опорного набора, к которому мы сведем ниже задачу в изучаемом случае, можно взять набор

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{12}, \lambda_3', \tag{1.11}$$

содержащий 6 коэффициентов многочлена N_{320} и один коэффициент многочлена N_{222}.

Обозначим полный набор допущений, принятых в статье. Будем считать, что:

1) многочлен $N_{220} = (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1)(|z_1|^2 - |z_2|^2)$ в соответствии с (1.5);

2) коэффициенты $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{12}$ из набора (1.8) вещественны;

3) коэффициент ω_3 отличен от нуля.

Отметим, что последнее из этих условий по сути является не ограничением, а одним из нескольких возможных случаев. В [5] показано, что из условия (1.4) для однородной поверхности (1.1) следует неравенство $N_{320} \neq 0$. Случай обращения в нуль коэффициента ω_3 (и наличия других ненулевых коэффициентов у многочлена N_{320}) является частным по сравнению с допущением 3.

Более существенным ограничением может показаться переход от возможных комплексных коэффициентов многочлена N_{320} к вещественным (допущение 2). В то же время примеры с вещественными коэффициентами младших Мозеровских многочленов являются естественными при рассмотрении однородных трубчатых поверхностей. В связи с важностью этого класса однородных многообразий один такой пример (предоставленный А.В. Атановым) обсуждается и используется в статье.

Помимо введенных допущений 1–3 мы будем использовать также известные специальные свойства нормальных уравнений вида (1.1). Например, как и в [3], мы будем считать, что коэффициенты ω_6, ω_7 многочлена N_{320}, а также коэффициент λ_3 многочлена N_{221} равны нулю.

В заключение этого раздела статьи уточним, что все ее рассмотрения базируются на трех приводимых ниже уравнениях:

$$(g_0(0)N_{221} - g_0'(0)N_{220}) + 2Re\{\partial N_{220}(f_1)\} + 2Re\{\partial N_{320}(f_0(0))\}_{\mathcal{N}} \equiv 0, \tag{1.12}$$

$$
\begin{gathered}
(g_0(0)N_{321} - g_0'(0)N_{320}) + \\
+ (2i < z, f_0'(0) > N_{220} - 2i < z, z > \bar{\partial} N_{220}(\bar{f}_0'(0))) + \\
+ (i < z, f_0(0) > N_{221} - i < z, z > \bar{\partial} N_{221}(\bar{f}_0(0))) + \\
+ \{\partial N_{220}(f_2^*)\}_{\mathcal{N}} + \{\partial N_{420}(f_0(0))\}_{\mathcal{N}} + \{\bar{\partial} N_{330}(\bar{f}_0(0))\}_{\mathcal{N}} + \\
+ (\partial N_{320}(f_1) + \bar{\partial} N_{320}(\bar{f}_1)) \equiv 0,
\end{gathered} \tag{1.13}
$$

$$
\begin{gathered}
(g_0(0)N_{222} - g_0''(0)N_{220}) + \Re\{2\partial N_{221}(f_1) + 2\partial N_{220}(f_1')\} + \\
+ 2\Re\{\partial N_{321}(f_0(0))\}_{|\mathcal{N}} + 2\Re\{\partial N_{320}(f_0'(0))\}_{|\mathcal{N}} = 0.
\end{gathered} \tag{1.14}
$$

Эти уравнения были получены в [8] из условия касания голоморфными векторными полями

$$
Z = f(z, w)\frac{\partial}{\partial z} + g(z, w)\frac{\partial}{\partial w} \tag{1.15}
$$

исходной однородной поверхности, заданной уравнением (1.1).

Они представляют собой, соответственно, (2,2,0)-, (3,2,0)- и (2,2,1)-компоненты так называемого основного тождества (см. [8]), связанного с однородностью, и являются основой предложенной в [3] схемы изучения однородности. В эти уравнения входят многочлены из уравнения (1.1) и некоторые производные компонент f, g голоморфных векторных полей.

2. (2,2,0)-компонента основного тождества

Уравнение (1.12), соответствующее (2,2,0)-компоненте основного тождества, было подробно изучено в [3] при произвольных значениях вещественного параметра μ. Ниже мы приведем упрощенные варианты необходимых нам утверждений из этой работы, получаемые за счет дополнительного условия $\mu = 0$.

Для формулировки результатов напомним еще, что всякой голоморфно-однородной гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^3$ соответствует алгебра Ли голоморфных векторных полей. Для поверхности, заданной уравнением (1.1), вещественная размерность этой алгебры не превышает 15 [8], а при выполнении ограничений

$$
N_{220} = E_3 + \mu E_0, \ \omega_3 \neq 0
$$

эта алгебра может быть только 5-мерной [8].

Для коэффициентов (1.15), то есть для голоморфных функций $g(z, w)$ и вектор-функций $f(z, w)$, можно выписать тейлоровские разложения

$$
f(z, w) = p + C\,z + aw + ..., \quad g(z, w) = q + \sum_{k+l+m>0} g_{klm} z_1^k z_2^l u^m \tag{2.1}
$$

в начале координат.

Здесь $p = (p_1, p_2) = f(0) \in \mathbb{C}^2, \ q = g(0) \in \mathbb{R}$ — **свободные** сдвиговые параметры поля. Их суммарная вещественная размерность равна 5. Остальные 10 из 15 параметров, однозначно определяющих поле, в изучаемом случае сами определяются (см. [3]) свободной (основной) пятеркой (p_1, p_2, q).

Связывая эти 10 (не являющихся основными) параметров с разложением (2.1), можно уточнить, что это

$$a = f'_w(0) \in \mathbb{C}^2,\ C = f_1(0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0) \in M(2, \mathbb{C}),\ r = Re\, g''_{ww}(0)\ = Re\, \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0) \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

При этом матрица $C = f_1(0)$ определяется пятью вещественными параметрами α_1, α_2, β_1, β_2, δ_2 и имеет следующий специальный вид (см. [8]):

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & \beta_1 + i\beta_2 \\ -\beta_1 + i\beta_2 & \alpha_1 + i\delta_2 \end{pmatrix}.$$

Для коэффициентного описания однородных поверхностей из тождеств (1.12)–(1.14) сначала извлекается необходимая информация о выражении неосновных параметров через основную (сдвиговую) пятерку (p_1, p_2, q) и коэффициенты канонического уравнения (1.1).

Предложение 1 (упрощенный вариант Предложения 3.1 из [3]). *При* $\mu = 0$ *вещественные параметры* $\alpha_1(0), \beta_1(0), \beta_2(0), \delta_2(0)$*, формирующие матрицу* $f_1(0)$*, имеют вид:*

$$\alpha_1 = \frac{3}{4}\mathrm{Re}\left\{(3\omega_{10} + 2\omega_{12} - \omega_2)\, p_1 + (\omega_{11} - 2\omega_1 - 3\omega_3)\, p_2\right\}, \quad (2.3)$$

$$\beta_1 = -\frac{3}{2}\mathrm{Re}\left\{\omega_3 p_1 + \omega_{10} p_2\right\} - \frac{1}{2} q\lambda_1, \quad (2.4)$$

$$\beta_2 = \frac{3}{2}\mathrm{Im}\left\{\omega_3 p_1 - \omega_{10} p_2\right\} + \frac{1}{2} q\lambda_2, \quad (2.5)$$

$$\delta_2 = \alpha_2 + \frac{3}{2}\mathrm{Im}\left\{(\omega_2 + 2\omega_{12} + 3\omega_{10})\, p_1 + (\omega_{11} + 2\omega_1 + 3\omega_3)\, p_2\right\} + q\lambda_4. \quad (2.6)$$

Предложение 2 (упрощенный вариант Предложения 3.2 из [3]). *При* $\mu = 0$ *из (2,2,0)-соотношения (1.12) выводится следующая информация о коэффициентах многочлена* N_{320}*:*

$$\omega_4 = -3(\omega_{12} + \omega_{10}),\ \omega_5 = 3\omega_3,\ \omega_8 = 3\omega_{10},\ \omega_9 = -3(\omega_1 + \omega_3). \quad (2.7)$$

Замечание 3. Помимо формул на параметры векторных полей и коэффициенты многочлена N_{320} при условиях 1)–3) из (2,2,0)-соотношения выводится следующая связка на коэффициенты многочлена N_{221}:

$$\lambda_0 = -\lambda_1. \quad (2.8)$$

Замечание 4. Приведенные здесь формулы Предложения 2 являются непосредственными следствиями равенства $\mu = 0$, а формулы (2.3)–(2.6) получены из аналогичных формул [3] с учетом упрощенного Предложения 2. Кроме того, в формуле (2.6) для параметра δ_2 исправлены опечатки в знаках слагаемых.

Замечание 5. Из пяти параметров, составляющих матрицу $f_1(0)$, только четыре удается выразить из (2,2,0)-тождества. Последний, пятый, параметр из этой матрицы выражается из (3,2,0)-компоненты, так же как и двумерно комплексный параметр $a = (a_1, a_2) = f'(0)$.

3. (3,2,0)-тождество: формулы для параметров

Рассмотрим более подробно (3,2,0)-тождество (1.13) в случае упрощающих ограничений. Левая часть этого тождества представляет собой вещественный многочлен от переменных $z = (z_1, z_2)$ и от сопряженных к ним величин. Отделим в этом многочлене коэффициенты при различных мономах степени 3 по переменной z и 2 по $\bar{z}$:

$$\Omega_1 = z_1^3\bar{z}_1^2,\ \Omega_2 = z_1^3\bar{z}_1\bar{z}_2,\ \Omega_3 = z_1^3\bar{z}_2^2,\ \Omega_4 = z_1^2 z_2\bar{z}_1^2,\ \Omega_5 = z_1^2\bar{z}_1 z_2\bar{z}_2,\ \Omega_6 = z_1^2 z_2\bar{z}_2^2,$$

$$\Omega_7 = z_1 z_2^2\bar{z}_1^2,\ \Omega_8 = z_1 z_2^2\bar{z}_1\bar{z}_2,\ \Omega_9 = z_1 z_2^2\bar{z}_2^2,\ \Omega_{10} = z_2^3\bar{z}_1^2,\ \Omega_{11} = z_2^3\bar{z}_1\bar{z}_2,\ \Omega_{12} = z_2^3\bar{z}_2^2.$$

Тогда можно говорить о 12 скалярных комплексных составляющих тождества (1.13).

Замечание 6. В действительности рабочими являются только 10 таких уравнений, а два из 12 уравнений, отвечающие, например, мономам Ω_4 и Ω_9, не являются информативными в силу условий (1.10).

Тогда, например, два первых слагаемых из левой части (1.13) преобразуются согласно [3] в $(qN_{321} - 2\alpha_1 N_{320})$ и потому допускают разложение вида

$$\sum_{k=1}^{12}(q\,\omega_k' - 2\,\alpha_1\,\omega_k)\Omega_k.$$

Аналогично расписываются все остальные слагаемые тождества (1.13). В целом получаемые 10 уравнений устроены достаточно сложно. Поэтому ниже приведены только четыре из них, отвечающие мономам Ω_3, Ω_6, Ω_7, Ω_5:

$$\begin{aligned}\Omega_3\ :\ &(-33\,\omega_3\omega_2 + 2\,\omega_3\omega_4 - \omega_3\omega_8 + 32\,s_3)\,p_1 + (-7\,\omega_3\omega_5 + 14\,\omega_3\omega_9 - 3\,\omega_3\omega_{11} + 8\,s_6)\,p_2 +\\ &+ (8\,i\lambda_1 + 7\,\omega_3\overline{\omega_8} - 14\,\omega_3\overline{\omega_4} + 3\,\omega_3\omega_2 - 8\,\lambda_2 + 8\,t_3 + 8)\,\overline{p}_1 +\\ &+ (-2\,\omega_3\overline{\omega_9} + \omega_3\overline{\omega_5} - 12\,\omega_2\omega_{10} + 21\,\omega_3\omega_{11} + 24\,t_4)\,\overline{p}_2 +\\ &+ (-4\,i\omega_2\lambda_2 - 16\,i\omega_3\lambda_4 - 4\,\omega_2\lambda_1 + 8\,\omega_3')\,q + 8\,i\omega_3\alpha_2 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_6\ :\ &\left(-18\,\omega_1\omega_3 - 27\,{\omega_3}^2 + 6\,s_6\right)p_1 + (-9\,\omega_3\omega_{10} + 4\,s_9)\,p_2 + \left(-9\,{\omega_3}^2 + 4\,\lambda_4 + 2\,t_7\right)\overline{p}_1 +\\ &+ (-2\,i\lambda_1 - 18\,\omega_1\omega_{10} - 27\,\omega_3\omega_{10} + 2\,\lambda_2 + 6\,t_8 - 2)\,\overline{p}_2 +\\ &+ (-6\,i\lambda_2\omega_1 - 6\,i\lambda_2\omega_3 - 6\,\lambda_1\omega_1 - 12\,\lambda_1\omega_3 + 2\,\omega_6')\,q - 8\,i\overline{a}_1 = 0,\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\Omega_7\ :\ &(9\,\omega_3\omega_{10} + 4\,s_7)\,p_1 + \left(27\,{\omega_{10}}^2 + 18\,\omega_{10}\omega_{12} + 6\,s_{10}\right)p_2 +\\ &+ (-2\,i\lambda_1 + 27\,\omega_3\omega_{10} + 18\,\omega_3\omega_{12} - 2\,\lambda_2 + 6\,t_9 - 2)\,\overline{p}_1 + \left(9\,{\omega_{10}}^2 + 4\,\lambda_4 + 2\,t_{10}\right)\overline{p}_2 +\\ &+ (-6\,i\lambda_2\omega_{10} - 6\,i\lambda_2\omega_{12} + 12\,\lambda_1\omega_{10} + 6\,\lambda_1\omega_{12} + 2\,\omega_7')\,q + 8\,i\overline{a}_2 = 0,\end{aligned}$$

$$\Omega_5\ :\ (-81\,\omega_2\omega_3 - 54\,\omega_3\omega_4 + 27\,\omega_3\omega_8 + 432\,\omega_3\omega_{10} + 216\,\omega_3\omega_{12} - 96\,s_1 + 48\,s_5 - 16\,s_9)\,p_1 +$$

$$+(-108\,\omega_2\omega_{10}-27\,\omega_3\omega_5+54\,\omega_3\omega_9+81\,\omega_3\omega_{11}-24\,s_4+32\,s_8-24\,s_{12})\,p_2+$$
$$+(27\,\omega_3\overline{\omega_8}-54\,\omega_3\overline{\omega_4}+48\,i\alpha_1-189\,\omega_2\omega_3-72\,t_1+32\,t_6-8\,t_{11}-16)\,\overline{p}_1+$$
$$+(27\,\omega_3\,(\overline{\omega_9}-\overline{\omega_5}+3\,\omega_{11})+216\,\omega_{10}\,(2\,\omega_{10}+\omega_{12})-48\,\lambda_4-24\,t_2+32\,t_7-24\,t_{12})\,\overline{p}_2+$$
$$+(36\,i\omega_2\lambda_2+144\,i\lambda_2\omega_{10}+72\,i\lambda_2\omega_{12}-36\,\omega_2\lambda_1+144\,\lambda_1\omega_{10}+72\,\lambda_1\omega_{12}+24\,\omega_5')\,q+$$
$$+72\,i\alpha_2\omega_3+96\,i\overline{a}_2=0.$$

Три первых уравнения (3.1) будут использованы ниже для получения формул, выражающих параметры (α_2, a_1, a_2) через основную пятерку. А на примере четвертого уравнения будут иллюстрироваться все последующие действия. Описание таких действий для ВСЕХ изучаемых уравнений невозможно вместить в объем одной статьи.

Решая выписанные уравнения относительно тройки параметров (α_2, a_1, a_2), получаем следующее утверждение.

Предложение 3. *При выполнении условий 1)–3) параметры $f'_0(0)=(a_1,a_2), \alpha_2(0)$ выражаются из выписанных в (3.1) компонент (3,2,0)-тождества и имеют вид:*

$$a_1=\frac{i}{8}(-9\,{\omega_3}^2+2\,\overline{t_7}+4\,\lambda_4)p_1+\frac{i}{8}(2\,i\lambda_1-18\,\omega_1\omega_{10}-27\,\omega_3\omega_{10}+6\,\overline{t_8}+2\,\lambda_2-2)p_2+$$
$$+\frac{i}{8}(-18\,\omega_1\omega_3-27\,{\omega_3}^2+6\,\overline{s_6})\overline{p_1}+\frac{i}{8}(-9\,\omega_3\omega_{10}+4\,\overline{s_9})\overline{p_2}+ \tag{3.2}$$
$$+\frac{i}{8}(6\,i\lambda_2\omega_1+6\,i\lambda_2\omega_3-6\,\omega_1\lambda_1-12\,\omega_3\lambda_1+2\,\overline{\omega'_6})q,$$

$$a_2=\frac{i}{8}\left(-2\,i\lambda_1-27\,\omega_3\omega_{10}-18\,\omega_3\omega_{12}-6\,\overline{t_9}+2\,\lambda_2+2\right)p_1-\frac{i}{8}\left(9\,{\omega_{10}}^2+2\,\overline{t_{10}}+4\,\lambda_4\right)p_2-$$
$$-\frac{i}{8}\left(9\,\omega_3\omega_{10}+4\,\overline{s_7}\right)\overline{p_1}-\frac{i}{8}\left(27\,{\omega_{10}}^2+18\,\omega_{10}\omega_{12}+6\,\overline{s_{10}}\right)\overline{p_2}- \tag{3.3}$$
$$-\frac{i}{8}\left(6\,i\lambda_2\omega_{10}+6\,i\lambda_2\omega_{12}+12\,\lambda_1\omega_{10}+6\,\lambda_1\omega_{12}+2\,\overline{\omega'_7}\right)q,$$

$$\alpha_2=\frac{i}{8\omega_3}\left(-33\,\omega_2\omega_3-9\,\omega_3\omega_{10}-6\,\omega_3\omega_{12}+32\,s_3\right)p_1+$$
$$+\frac{i}{8\omega_3}\left(-42\,\omega_3\omega_1-63\,{\omega_3}^2-3\,\omega_3\omega_{11}+8\,s_6\right)p_2+ \tag{3.4}$$
$$+\frac{i}{8\omega_3}\left(3\,\omega_2\omega_3+63\,\omega_3\omega_{10}+42\,\omega_3\omega_{12}-8\,\lambda_2+8\,t_3+8\,+8i\,\lambda_1\right)\overline{p_1}+$$
$$+\frac{i}{8\omega_3}\left(6\,\omega_1\omega_3-12\,\omega_2\omega_{10}+9\,{\omega_3}^2+21\,\omega_3\omega_{11}+24\,t_4\right)\overline{p_2}+$$
$$+\frac{i}{8\omega_3}\left(-4\,\lambda_1\omega_2+8\,\omega'_3-4i\,\lambda_2\omega_2-16i\,\lambda_4\omega_3\right)q.$$

Замечание 7. Выписанные формулы получены как решения системы комплексных уравнений. В то же время параметр α_2 является вещественным. Это означает, что мнимая часть формулы (3.4) должна быть равна нулю **при любых значениях** основной пятерки параметров.

В силу этого замечания из уравнения (3.4) вытекает тождество вида

$$Re\,(Ap_1 + Bp_2 + Dq) \equiv 0 \tag{3.5}$$

с некоторыми комплексными коэффициентами A, B, D.

Аналогично после подстановки полученных формул для всех параметров

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \delta_2,\ a_1, a_2$$

в семь оставшихся уравнений (3,2,0)-тождества они превращаются в тождества вида

$$A_k p_1 + B_k p_2 + M_k \bar{p}_1 + N_k \bar{p}_2 + D_k q \equiv 0,\ k = 1, ..., 7. \tag{3.6}$$

В силу несложного соображения (см., например, Лемму о единственности в [7]) это означает, что каждое из одиночных уравнений вида (3.5) или (3.6) распадается на пять уравнений (вещественных или комплексных соответственно). Каждое из таких уравнений свободно от основной пятерки параметров и зависит лишь от коэффициентов нормального уравнения (1.1).

Таким образом из (3,2,0)-тождества мы получаем 5 вещественных и 35 комплексных полиномиальных ограничений на коэффициенты уравнения (1.1). В частности, справедливо следующее утверждение.

Предложение 4. *Если правая часть формулы (3.4) является вещественной, то:*

$$-4\,i\lambda_1 - 15\,\omega_2\omega_3 + 27\,\omega_3\omega_{10} + 18\,\omega_3\omega_{12} + 4\,\overline{t_3} - 4\,\lambda_2 + 16\,s_3 + 4 = 0, \tag{3.7}$$

$$-18\,\omega_1\omega_3 - 6\,\omega_2\omega_{10} - 27\,{\omega_3}^2 + 9\,\omega_3\omega_{11} + 12\,\overline{t_4} + 4\,s_6 = 0, \tag{3.8}$$

$$Re(\omega'_3) = \frac{1}{2}\,\omega_2\lambda_1. \tag{3.9}$$

Схему получения 35 соотношений на коэффициенты уравнения (1.1) проиллюстрируем на примере последнего уравнения из (3.1). Подставляя в него выражения для параметров (3.2)–(3.4) и выделяя коэффициенты при $p_1, p_2, \bar{p}_1, \bar{p}_2, q$, получим 5 соотношений:

$$p_1\ :\ 54\,\omega_2\omega_3 - 18\,\omega_3\omega_4 + 9\,\omega_3\omega_8 + 81\,\omega_3\omega_{10} + 54\,\omega_3\omega_{12} - \tag{3.10}$$

$$- 24\,s_1 - 72\,s_3 + 12\,s_5 - 12\,s_7 - 4\,s_9 = 0,$$

$$p_2\ :\ -27\,\omega_2\omega_{10} + 9\,\omega_3\omega_5 - 18\,\omega_3\omega_9 + 27\,\omega_3\omega_{11} - 81\,{\omega_{10}}^2 - 54\,\omega_{10}\omega_{12} - \tag{3.11}$$

$$- 6\,s_4 - 18\,s_6 + 8\,s_8 - 18\,s_{10} - 6\,s_{12} = 0,$$

$$\bar{p}_1\ :\ -9\,\omega_3\omega_8 + 18\,\omega_3\omega_4 - 54\,\omega_2\omega_3 - 81\,\omega_3\omega_{10} - 54\,\omega_3\omega_{12} + 24\,\lambda_2 - \tag{3.12}$$

$$- 18\,t_1 - 18\,t_3 + 8\,t_6 - 18\,t_9 - 2\,t_{11} - 16 = 0,$$

$$\bar{p}_2\ :\ 18\,\omega_3\omega_9 - 9\,\omega_3\omega_5 + 27\,\omega_2\omega_{10} - 27\,\omega_3\omega_{11} + 81\,{\omega_{10}}^2 + 54\,\omega_1 - \tag{3.13}$$

$$- 6\,t_2 - 54\,t_4 + 8\,t_7 - 6\,t_{10} - 6\,t_{12} = 0,$$

$$q\ :\ 18\,i\omega_2\lambda_2 + 54\,i\lambda_2\omega_{10} + 36\,i\lambda_2\omega_{12} + 36\,i\lambda_4\omega_3 - 18\,\omega'_3 + 6\,\omega'_5 - 6\,\omega'_7 = 0. \tag{3.14}$$

Получаемые таким образом 35 уравнений удобно разбить на 3 группы:

— p-часть содержит 14 уравнений, отвечающих коэффициентам при параметрах p_1, p_2 в формулах (3.6);

— 14 уравнений $\bar{p}$-части соответствуют коэффициентам при $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ в формулах (3.6);

— кроме того, имеется 7 уравнений q-части, соответствующих коэффициентам при параметре q в формулах (3.6).

Ниже подробно обсуждаются две первые группы уравнений. Рассмотрение q-части, «естественно» связанной с (2,2,1)-тождеством (см. [3] и § 6 настоящей статьи), будет более кратким.

4. p-часть (3,2,0)-тождества

Набор из 14 уравнений p-части (3,2,0)-тождества, полученный по описанной выше схеме, имеет вид, приводимый ниже.

Уравнения, отвечающие параметру p_1 в коэффициентах при различных мономах:

$$\Omega_1 \ : \ 36\,\omega_1\omega_2\omega_3 + 54\,\omega_1\omega_3\omega_{10} + 36\,\omega_1\omega_3\omega_{12} - 27\,{\omega_3}^2\omega_{10} - 54\,{\omega_3}^2\omega_{12} -$$

$$- 48\,\omega_1 s_3 + 24\,\omega_3 s_1 - 6\,\omega_3 s_5 + 12\,\omega_3 s_7 - 4\,\omega_3 s_9 = 0, \tag{4.1}$$

$$\Omega_2 \ : \ 12\,\omega_1{\omega_3}^2 - 9\,{\omega_2}^2\omega_3 - 9\,\omega_2\omega_3\omega_{10} - 6\,\omega_2\omega_3\omega_{12} - 18\,{\omega_3}^3 + 16\,\omega_2 s_3 - 16\,\omega_3 s_2 = 0. \tag{4.2}$$

$$\Omega_5 \ : \ -6\,s_7 + 6\,s_5 + 27\,\omega_2\omega_3 + 81\,\omega_3\omega_{10} + 54\,\omega_3\omega_{12} - 36\,s_3 - 12\,s_1 - 2\,s_9 = 0, \tag{4.3}$$

$$\Omega_8 \ : \ 108\,\omega_1{\omega_3}^2 + 135\,\omega_2\omega_3\omega_{10} + 162\,{\omega_3}^3 + 54\,{\omega_3}^2\omega_{11} + 243\,\omega_3{\omega_{10}}^2 +$$

$$+ 162\,\omega_3\omega_{10}\omega_{12} - 12\,\omega_3 s_4 - 36\,\omega_3 s_6 + 16\,\omega_3 s_8 - 12\,\omega_3 s_{12} - 144\,\omega_{10} s_3 = 0. \tag{4.4}$$

$$\Omega_{10} \ : \ 21\,\omega_2\omega_3\omega_{10} + 45\,\omega_3{\omega_{10}}^2 + 30\,\omega_3\omega_{10}\omega_{12} + 4\,\omega_3 s_{10} - 16\,\omega_{10} s_3 = 0, \tag{4.5}$$

$$\Omega_{11} \ : \ 9\,\omega_2\omega_3\omega_{11} - 6\,{\omega_3}^2\omega_{10} + 18\,\omega_3\omega_{10}\omega_{11} + 12\,\omega_3\omega_{11}\omega_{12} + 2\,\omega_3 s_{11} - 8\,\omega_{11} s_3 = 0. \tag{4.6}$$

$$\Omega_{12} \ : \ 54\,\omega_1{\omega_3}^2 - 45\,\omega_2\omega_3\omega_{12} + 81\,{\omega_3}^3 + 18\,{\omega_3}^2\omega_{11} - 81\,\omega_3\omega_{10}\omega_{12} -$$

$$- 54\,\omega_3{\omega_{12}}^2 + 6\,\omega_3 s_4 - 18\,\omega_3 s_6 + 4\,\omega_3 s_8 - 6\,\omega_3 s_{12} + 48\,\omega_{12} s_3 = 0. \tag{4.7}$$

Уравнения, отвечающие параметру p_2 в коэффициентах при различных мономах:

$$\Omega_1 \ : \ 36\,{\omega_1}^2\omega_3 + 54\,\omega_1{\omega_3}^2 + 18\,\omega_1\omega_3\omega_{11} + 18\,\omega_2\omega_3\omega_{10} + 81\,\omega_3{\omega_{10}}^2 +$$

$$+ 54\,\omega_3\omega_{10}\omega_{12} - 12\,\omega_1 s_6 + 6\,\omega_3 s_4 - 4\,\omega_3 s_8 + 18\,\omega_3 s_{10} - 6\,\omega_3 s_{12} = 0. \tag{4.8}$$

$$\Omega_2 \ : \ 6\,\omega_1\omega_2\omega_3 + 9\,\omega_2{\omega_3}^2 + 3\,\omega_2\omega_3\omega_{11} + 12\,{\omega_3}^2\omega_{10} - 4\,\omega_2 s_6 + 4\,\omega_3 s_5 = 0, \tag{4.9}$$

$$\Omega_5 \ : \ 54\,\omega_1\omega_3 - 27\,\omega_2\omega_{10} + 81\,{\omega_3}^2 + 27\,\omega_3\omega_{11} - 81\,{\omega_{10}}^2 -$$

$$- 54\,\omega_{10}\omega_{12} - 6\,s_4 - 18\,s_6 + 8\,s_8 - 18\,s_{10} - 6\,s_{12} = 0. \tag{4.10}$$

$$\Omega_8 \ : \ 54\,\omega_1\omega_3\omega_{10} + 81\,{\omega_3}^2\omega_{10} + 81\,\omega_3\omega_{10}\omega_{11} -$$

$$- 8\,\omega_3 s_7 - 24\,\omega_3 s_9 + 24\,\omega_3 s_{11} - 48\,\omega_3 s_{15} - 36\,\omega_{10} s_6 = 0, \tag{4.11}$$

$$\Omega_{10} \ : \ 30\,\omega_1\omega_3\omega_{10} + 45\,{\omega_3}^2\omega_{10} + 21\,\omega_3\omega_{10}\omega_{11} + 16\,\omega_3 s_{13} - 4\,\omega_{10} s_6 = 0. \tag{4.12}$$

$$\Omega_{11} \ : \ 12\,\omega_1\omega_3\omega_{11} + 18\,{\omega_3}^2\omega_{11} - 9\,\omega_3{\omega_{10}}^2 + 6\,\omega_3\omega_{10}\omega_{12} +$$

$$+ 6\,\omega_3{\omega_{11}}^2 + 8\,\omega_3 s_{14} - 2\,\omega_{11} s_6 = 0, \tag{4.13}$$

$$\Omega_{12} \ : \ 54\,\omega_1\omega_3\omega_{10} + 54\,\omega_1\omega_3\omega_{12} + 27\,{\omega_3}^2\omega_{10} + 81\,{\omega_3}^2\omega_{12} + 27\,\omega_3\omega_{11}\omega_{12} -$$

$$-4\,\omega_3 s_7 + 12\,\omega_3 s_9 - 6\,\omega_3 s_{11} + 24\,\omega_3 s_{15} - 12\,\omega_{12} s_6 = 0. \tag{4.14}$$

Уточним, что уравнения (4.3) и (4.10) получены из пары уравнений (3.10), (3.11) предыдущего параграфа за счет сведения набора коэффициентов ω_k к основной шестерке

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{12}) \tag{4.15}$$

с использованием формул (2.7).

Все уравнения (4.1)–(4.14) линейно зависят от коэффициентов многочлена N_{420}, количество которых, в соответствии с формулой (1.9), равно 15. В [3] было отмечено, что ранг этой системы равен 13. В связи с этим целесообразно расширить систему уравнений p-части за счет еще двух уравнений (3.7) и (3.8), также линейных относительно коэффициентов N_{420}. В итоге получаем 16 уравнений относительно 15 коэффициентов многочлена N_{420}.

Предложение 5. *При условии $\omega_3 \neq 0$ система из 16 уравнений расширенной p-части (3,2,0)-тождества имеет полный ранг относительно 15 коэффициентов многочлена N_{420}. Подстановка формул для этих коэффициентов, получаемых из подсистемы полного ранга, обращает все 16 уравнений системы в верные тождества.*

Доказательство этого предложения получается за счет вычисления миноров и решения системы, например, в пакете MAPLE. Формулы (наиболее краткие) для некоторых коэффициентов s_k приведены ниже:

$$s_3 = \frac{1}{16}(4i\lambda_1 + 15\omega_2\omega_3 - 27\omega_3\omega_{10} - 18\omega_3\omega_{12} - 4\overline{t_3} + 4\lambda_2 - 4), \tag{4.16}$$

$$s_6 = \frac{3}{4}(6\omega_1\omega_3 + 2\omega_2\omega_{10} + 9{\omega_3}^2 - 3\omega_3\omega_{11} - \overline{t_4}), \tag{4.17}$$

$$s_{10} = \frac{\omega_{10}}{2\omega_3}\big(2\,i\lambda_1 - 3\,\omega_2\omega_3 - 36\,\omega_3\omega_{10} - 24\,\omega_3\omega_{12} - 2\,\overline{t_3} + 2\,\lambda_2 - 2\big), \tag{4.18}$$

$$s_{13} = -\frac{3\omega_{10}}{8\omega_3}\big(2\,\omega_1\omega_3 - \omega_2\omega_{10} + 3\,{\omega_3}^2 + 5\,\omega_3\omega_{11} + 2\,\overline{t_4}\big). \tag{4.19}$$

Замечание 8. Расширение p-системы за счет двух уравнений (3.7) и (3.8) приводит к появлению в формулах для коэффициентов многочлена N_{420} коэффициентов еще одного многочлена N_{330} из опорного набора.

Замечание 9. Аналогичные вычисления были проведены и в [3]. Однако в этой работе за счет «стыковочных погрешностей» компьютерных вычислений с рассуждениями был сделан неверный вывод о 16-м уравнении расширенной p-системы. Выписанная «содержательная» формула (21) из работы [3] в действительности является тождественно нулевой.

Замечание 10. В формулах этого раздела статьи использованы лишь два из трех допущений и не привлекалось условие вещественности коэффициентов ω_k. Их вещественный характер значительно облегчает обсуждения следующего раздела.

5. $\bar{p}$-часть (3,2,0)-тождества

Описанные выше принципы построения системы из 14 комплексных уравнений $\bar{p}$-части уже проиллюстрированы уравнениями (3.12) и (3.13) в § 3.

Аналогично можно выписать остальные 12 комплексных соотношений $\bar{p}$-части (3,2,0)-тождества. Однако в отличие от предыдущего параграфа в каждом из этих 14 уравнений приходится выделять вещественную и мнимую части. Это связано с тем, что основная цель данного параграфа — освобождение опорного набора (1.2) от коэффициентов многочленов N_{330} и N_{221}, входящих в обсуждаемые $\bar{p}$-уравнения линейным образом.

При этом в силу вещественности многочлена N_{330} его (4×4)-матрица из формулы (1.9) является эрмитовой. Это означает, что диагональные элементы t_1, t_6, t_{11}, t_{16} этой матрицы вещественны, а для внедиагональных элементов имеются условия попарной комплексной сопряженности:

$$t_5 = \bar{t}_2,\ t_9 = \bar{t}_3,\ t_{10} = \bar{t}_7,\ t_{13} = \bar{t}_4,\ t_{14} = \bar{t}_8,\ t_{15} = \bar{t}_{12}. \tag{5.1}$$

Поэтому, например, входящие в уравнение (3.13) комплексные коэффициенты t_7 и t_{10} не являются независимыми величинами.

Система уравнений, отвечающая мнимым частям 14 $\bar{p}$-соотношений, изучена при вещественных коэффициентах из (4.15) в [1]. Сформулируем основной интересующий нас факт из этого доклада.

Предложение 6 (**[1]**). *Если уравнение (1.1) однородной поверхности удовлетворяет допущениям 1–3, то коэффициенты многочленов N_{420} и N_{330} из этого уравнения являются вещественными. Кроме того, для коэффициентов многочлена N_{221} выполняются условия $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$.*

Используя это утверждение, остается изучить вещественные части 14 $\bar{p}$-уравнений. Приведем здесь промежуточное утверждение, связанное с линейными относительно набора

$$(t_k, \lambda_2, \lambda_4) \tag{5.2}$$

слагаемыми этих уравнений. В силу предложения 6 набор (5.2) содержит 12 независимых вещественных коэффициентов.

Предложение 7. *При допущениях 1–3 из десяти $\bar{p}$-уравнений удается выразить все коэффициенты набора (5.2), кроме t_3, λ_2.*

Примеры трех из десяти получаемых формул приведены ниже:

$$t_1 = \frac{(8\,\omega_3{}^2 - 3\,\omega_3\omega_{11} + 4\,\omega_{10}\omega_{12} - 16\,\omega_1\omega_3)\lambda_2 + (16\,\omega_1\omega_3 - 12\,\omega_3{}^2 - 4\,\omega_{10}\omega_{12} + 3\,\omega_3\omega_{11})t_3}{24\omega_3^2},$$

$$t_2 = -\frac{\omega_{10}}{2\,\omega_3}(\lambda_2 - t_3),\ t_4 = -\frac{\omega_{10}}{3\,\omega_3}(\lambda_2 - t_3).$$

Замечание 11. Формулы для коэффициентов t_1, t_6, t_{11}, t_{16}, возникающие при решении $\bar{p}$-подсистемы, автоматически удовлетворяют так называемым tr-условиям (см. [8])

$$3\,t_1 + t_6 + t_{11} + 3\,t_{16} = 0. \tag{5.3}$$

Следствие. *В силу Предложения 2 от 14 уравнений $\bar{p}$-системы остается подсистема из 4 уравнений, линейная относительно пары (t_3, λ_2). Коэффициентами этой системы и ее правой части являются многочлены от шестерки коэффициентов (4.15).*

Заметим, что уравнения этой небольшой системы также достаточно сложны:

$$\left(4\,\omega_2\omega_{10} - 8\,\omega_3{}^2\right) t_3 + \left(-4\,\omega_2\omega_{10} - 8\,\omega_3{}^2\right)\lambda_2 + 4\,\omega_2\omega_{10} + 8\,\omega_3{}^2 = \tag{5.4}$$

$$= -\left(6\,\omega_1\omega_2\omega_3{}^2 + 12\,\omega_1\omega_3{}^2\omega_{10} + 9\,\omega_2{}^2\omega_3\omega_{10} + 9\,\omega_2\omega_3{}^3\right) -$$

$$-\left(-3\,\omega_2\omega_3{}^2\omega_{11} + 45\,\omega_2\omega_3\omega_{10}{}^2 + 30\,\omega_2\omega_3\omega_{10}\omega_{12} - 18\,\omega_3{}^3\omega_{10}\right),$$

$$\left(2\,\omega_3\omega_{11} - 4\,\omega_{10}{}^2\right) t_3 + \left(8\,\omega_3{}^2 - 2\,\omega_3\omega_{11} + 4\,\omega_{10}{}^2\right)\lambda_2 + 8\,\omega_3{}^2 + 2\,\omega_3\omega_{11} - 4\,\omega_{10}{}^2 = \tag{5.5}$$

$$= -\left(-30\,\omega_1\omega_3{}^2\omega_{10} + 6\,\omega_2\omega_3{}^2\omega_{11} - 9\,\omega_2\omega_3\omega_{10}{}^2 - 36\,\omega_3{}^3\omega_{10} - 6\,\omega_3{}^3\omega_{12}\right) -$$

$$-\left(9\,\omega_3{}^2\omega_{10}\omega_{11} + 12\,\omega_3{}^2\omega_{11}\omega_{12} - 45\,\omega_3\omega_{10}{}^3 - 30\,\omega_3\omega_{10}{}^2\omega_{12}\right),$$

$$\left(24\,\omega_1\omega_3 + 36\,\omega_3{}^2 + 36\,\omega_{10}{}^2 + 24\,\omega_{10}\omega_{12}\right) t_3 + \tag{5.6}$$

$$+\left(-24\,\omega_1\omega_3 - 36\,\omega_3{}^2 - 36\,\omega_{10}{}^2 - 24\,\omega_{10}\omega_{12}\right)\lambda_2 =$$

$$= -\left(36\,\omega_1\omega_2\omega_3{}^2 + 270\,\omega_1\omega_3{}^2\omega_{10} + 180\,\omega_1\omega_3{}^2\omega_{12} + 72\,\omega_2\omega_3{}^3 + 81\,\omega_2\omega_3\omega_{10}{}^2\right) -$$

$$-\left(54\,\omega_2\omega_3\omega_{10}\omega_{12} + 405\,\omega_3{}^3\omega_{10} + 270\,\omega_3{}^3\omega_{12} + 9\,\omega_3{}^2\omega_{10}\omega_{11} + 18\,\omega_3{}^2\omega_{11}\omega_{12}405\,\omega_3\omega_{10}{}^3\right) -$$

$$-\left(540\,\omega_3\omega_{10}{}^2\omega_{12} + 180\,\omega_3\omega_{10}\omega_{12}{}^2 + 24\,\omega_1\omega_3 + 68\,\omega_3{}^2 + 36\,\omega_{10}{}^2 + 24\,\omega_{10}\omega_{12}\right),$$

$$4\,\left(\omega_{10}\omega_{11} - 2\,\omega_3\omega_{12} + 2\,\omega_1\omega_{10} - \omega_2\omega_3\right) t_3 + \tag{5.7}$$

$$+4\,\left(\omega_2\omega_3 + 2\,\omega_3\omega_{12} - \omega_{10}\omega_{11} - 2\,\omega_1\omega_{10}\right)\lambda_2 =$$

$$-\left(8\,\omega_1\omega_{10} - 4\,\omega_2\omega_3 + 18\,\omega_1\omega_2\omega_3\omega_{10} + 90\,\omega_1\omega_3\omega_{10}{}^2 - 24\,\omega_2\omega_3{}^2\omega_{12} + 24\,\omega_1\omega_3{}^2\omega_{11}\right) -$$

$$-\left(24\,\omega_1{}^2\omega_3{}^2 - 9\,\omega_2\omega_3{}^2\omega_{10} + 72\,\omega_1\omega_3{}^3 - 18\,\omega_3{}^2\omega_{10}\omega_{12} - 8\,\omega_3\omega_{12} + 36\,\omega_3{}^3\omega_{11}\right) -$$

$$-\left(4\,\omega_{10}\omega_{11} + 60\,\omega_1\omega_3\omega_{10}\omega_{12} + 9\,\omega_2\omega_3\omega_{10}\omega_{11} + 6\,\omega_3{}^2\omega_{11}{}^2 - 3\,\omega_2{}^2\omega_3{}^2\right) -$$

$$-\left(30\,\omega_3{}^4 + 45\,\omega_3\omega_{10}{}^2\omega_{11} + 30\,\omega_3{}^2\omega_{10}{}^2 - 36\,\omega_3{}^2\omega_{12}{}^2 + 30\,\omega_3\omega_{10}\omega_{11}\omega_{12}\right).$$

Линейная относительно (t_3, λ_2) часть полученной (4×2)-системы имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 4\,\omega_2\omega_{10} - 8\,\omega_3{}^2 & -4\,\omega_2\omega_{10} - 8\,\omega_3{}^2 \\ 12\left(2\,\omega_1\omega_3 + 3\,\omega_3{}^2 + 3\,\omega_{10}{}^2 + 2\,\omega_{10}\omega_{12}\right) & -12\left(2\,\omega_1\omega_3 + 3\,\omega_3{}^2 + 3\,\omega_{10}{}^2 + 2\,\omega_{10}\omega_{12}\right) \\ 2\,\omega_3\omega_{11} - 4\,\omega_{10}{}^2 & 8\,\omega_3{}^2 - 2\,\omega_3\omega_{11} + 4\,\omega_{10}{}^2 \\ 2\left(2\,\omega_1\omega_{10} - \omega_2\omega_3 - 2\,\omega_3\omega_{12} + \omega_{10}\omega_{11}\right) & -2\left(2\,\omega_1\omega_{10} - \omega_2\omega_3 - 2\,\omega_3\omega_{12} + \omega_{10}\omega_{11}\right) \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

Для нее верен следующий факт.

Предложение 8. *Если система (5.4)–(5.7) совместна, то ранг матрицы (5.8) этой системы является полным.*

Для доказательства допустим, что ранг (5.8) меньше 2. Тогда все миноры второго порядка этой матрицы равны нулю. В силу пропорциональности двух ее строк есть смысл обсуждать лишь три минора второго порядка матрицы (5.7), определяемые парами строк (1,2), (1,3), (2,4); остальные пропорциональны трем указанным.

При этом

$$m_{1,2} = 192\,{\omega_3}^2\left(2\,\omega_1\omega_3 + 3\,{\omega_3}^2 + 3\,{\omega_{10}}^2 + 2\,\omega_{10}\omega_{12}\right), \tag{5.9}$$

$$m_{1,3} = 32\,{\omega_3}^2\left(\omega_2\omega_{10} - 2\,{\omega_3}^2 + \omega_3\omega_{11} - 2\,{\omega_{10}}^2\right),$$

$$m_{2,3} = 32\,{\omega_3}^2\left(2\,\omega_1\omega_{10} - \omega_2\omega_3 - 2\,\omega_3\omega_{12} + \omega_{10}\omega_{11}\right).$$

Пользуясь неравенством $\omega_3 \neq 0$, выразим отсюда коэффициенты $\omega_1, \omega_2, \omega_{11}$:

$$\omega_1 = -\frac{3\,{\omega_3}^2 + 3\,{\omega_{10}}^2 + 2\,\omega_{10}\omega_{12}}{2\omega_3},\ \omega_2 = -\omega_{10} - 2\,\omega_{12},$$

$$\omega_{11} = \frac{2\,{\omega_3}^2 + 3\,{\omega_{10}}^2 + 2\,\omega_{10}\omega_{12}}{\omega_3}. \tag{5.10}$$

Но при таких значениях этой тройки коэффициентов уравнение (5.6) выписанной (4×2)-системы превращается в противоречивое равенство $32\,{\omega_3}^2 = 0$.

Предложение 8 доказано.

Следствие. *При допущениях 1–3 ВСЕ коэффициенты подмножества*

$$N_{220}, N_{221}, N_{320}, N_{330}, N_{420}, \tag{5.11}$$

опорного набора (1.2) выражаются ТОЛЬКО через шестерку коэффициентов (4.15) многочлена N_{320}.

Действительно, достаточно выразить пару t_3, λ_2 из полноранговой (2×2)-подсистемы системы (5.4)–(5.7) из четырех уравнений.

Замечание 12. Шесть коэффициентов набора (4.15) не являются свободными для однородных поверхностей, удовлетворяющих допущениям 1–3. Например, любая такая шестерка должна удовлетворять двум уравнениям, остающимся после решения системы (5.5)–(5.7) относительно пары t_3, λ_2.

Одно из таких уравнений (полученное из (5.5) при условии $m_{1,3} \neq 0$) приведено ниже:

$$\begin{gathered}
9\,{\omega_3}^2\omega_2\omega_{11} - 432\,{\omega_3}^2\omega_1\omega_{10} + 180\,{\omega_3}^2\omega_1\omega_2 - 288\,\omega_{12}\omega_1{\omega_{10}}^2 + \\
+ 18\,\omega_1{\omega_2}^2\omega_{10} - 18\,{\omega_3}^2\omega_{12}\omega_{11} - 180\,\omega_{12}{\omega_{10}}^2\omega_{11} - 9\,{\omega_{10}}^2\omega_2\omega_{11} + \\
+ 18\,{\omega_{10}}^2\omega_2\omega_1 - 36\,{\omega_{12}}^2\omega_{11}\omega_{10} + 432\,\omega_3\omega_{12}{\omega_{10}}^2 - 32\,\omega_3\omega_{11} + \\
+ 192\,\omega_3\omega_1 - 32\,\omega_{10}\omega_2 + 225\,{\omega_3}^3\omega_2 + 432\,{\omega_3}^3\omega_{12} - \\
- 225\,{\omega_{10}}^3\omega_{11} - 432\,\omega_1{\omega_{10}}^3 + 192\,\omega_{12}\omega_{10} - 36\,\omega_1\omega_3\omega_{12}\omega_{11} + \\
+ 36\,\omega_{12}\omega_2\omega_1\omega_{10} + 162\,\omega_{12}\omega_2\omega_{10}\omega_3 - 162\,\omega_{11}\omega_3\omega_1\omega_{10} - 18\,\omega_{10}\omega_2\omega_{12}\omega_{11} + \\
+ 18\,\omega_1\omega_3\omega_2\omega_{11} + 352\,{\omega_3}^2 + 352\,{\omega_{10}}^2 - 288\,\omega_3{\omega_1}^2\omega_{10} + \\
+ 288\,{\omega_3}^2\omega_1\omega_{12} + 9\,{\omega_2}^2\omega_{10}\omega_3 + 225\,{\omega_{10}}^2\omega_2\omega_3 + 36\,\omega_3{\omega_1}^2\omega_2 - \\
- 225\,{\omega_3}^2\omega_{10}\omega_{11} + 288\,\omega_3{\omega_{12}}^2\omega_{10} - 18\,\omega_3\omega_{12}{\omega_{11}}^2 - 9\,\omega_3\omega_{10}{\omega_{11}}^2 = 0.
\end{gathered} \tag{5.12}$$

Замечание 13. Несмотря на формулировку следствия 1, выписать по итогам этого параграфа единый набор формул для коэффициентов t_3, λ_2 (а значит, и для остальных коэффициентов опорного набора) не представляется возможным. В зависимости от взаимных связей коэффициентов многочлена N_{320} для однородных поверхностей возможны три случая (связанные с определителями (5.9)) и три визуально разных набора формул для опорных коэффициентов.

Напомним, что в начальный опорный набор помимо многочленов (5.11) входили также N_{222} и N_{321}. Коэффициенты этих многочленов мы обсудим в следующем параграфе.

6. (2,2,1)-компонента и смешанная система уравнений

В [3] выписана схема исследования последнего из тройки уравнений (1.12)–(1.14) с учетом результатов и формул, выводимых из двух первых уравнений. Здесь мы кратко напомним эту схему и обсудим получаемые конкретные выводы и уточнения начальных прогнозов работы [3], вытекающие из трех допущений настоящей статьи.

В (2,2,1)-компоненте основного тождества определяется через набор $(p, \bar{p}, q)$ последний из «вспомогательных» параметров векторных полей, а именно, параметр

$$r = Re\left(\frac{\partial^2 g}{\partial w^2}(0)\right).$$

На это расходуется одно из пяти (по числу базисных многочленов E_0, E_1, E_2, E_3, E_4 пространства $\mathcal{N}_{22}$) вещественных уравнений, составляющих (2,2,1)-компоненту. После подстановки в оставшиеся 4 уравнения формул для параметров

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2, \delta_2,\ a_1, a_2$$

нужно, как и в случае (3,2,0)-компоненты, отделить в них p_1-, p_2-, q-составляющие. Напомним, что при этом общее количество получаемых более простых уравнений увеличивается в 5 раз.

Четыре вещественных q-уравнения (из получаемых 20) позволяют выразить через младшие многочлены опорного набора четверку коэффициентов

$$\lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_4$$

многочлена N_{222}. Коэффициент λ'_3 этого многочлена невозможно выразить через другие элементы опорного набора из тройки начальных уравнений (1.2), и он остается одним из элементов итогового упрощенного опорного набора.

В оставшиеся 16 вещественных уравнений p-части (2,2,1)-компоненты входят коэффициенты всех элементов опорного набора (1.2), кроме N_{222}. Эти уравнения удобно записать в виде 8 комплексных соотношений. При этом зависимость этой системы от коэффициентов многочлена N_{321} является линейной в комплексном смысле.

Эту восьмерку уравнений естественно объединить с семью уравнениями q-части из (3,2,0)-компоненты, в которых многочлен N_{321} также участвует в линейной форме. Получаемая таким образом система из 15 комплексных уравнений названа в [3] смешанной системой. Именно к ней относится наиболее существенное уточнение, связанное с рассматриваемым в данной работе классом поверхностей.

Смешанная система имеет полный ранг относительно набора ω'_k даже в общем случае работы [3], то есть при единственном ограничении

$$\omega_3 \neq 0.$$

В силу этого является оправданным утверждение о пяти остающихся от этой системы уравнениях-следствиях, которые являются соотношениями только на коэффициенты многочлена N_{320}. В то же время в предыдущих разделах статьи некоторые из получаемых соотношений на коэффициенты опорного набора оказывались тождественно верными и не давали дополнительных ограничений.

Предложение 9. *Для всякой однородной поверхности (1.1), удовлетворяющей основным допущениям 1–3, из пяти уравнений-следствий (2,2,1)-тождества содержательными являются лишь три уравнения.*

Эти уравнения оказываются еще более громоздкими по сравнению с обсуждавшимися выше соотношениями. Например, в «предварительной» форме они содержат, соответственно, 42, 42 и 44 слагаемых. Поэтому ниже для иллюстрации приводится только одно из них:

$$\begin{gathered}
9\,\omega_2\omega_3{\omega_{10}}^2 + 4\,\omega_2\omega_{10}s_7 + 8\,\omega_{10}\omega_{12}s_7 - 8\,\lambda_2\omega_2\omega_{12} - 18\,\omega_3{\omega_{10}}^2\omega_{12} + \\
+ 4\,\omega_{10}\,(\bar t_7)\,\omega_3 - 6\,\omega_2 s_6\omega_3 + 4\,\omega_{11}s_7\omega_3 + 18\,\omega_1\omega_2{\omega_3}^2 + 12\,s_7{\omega_3}^2 + \\
+ 4\,(\bar t_{10})\,\omega_{10}\omega_3 + 108\,{\omega_3}^3\omega_{12} + 207\,{\omega_3}^3\omega_{10} + 72\,\omega_1{\omega_3}^2\omega_{12} - 4\,\lambda_2{\omega_2}^2 + \\
+ 50\,{\omega_3}^2\lambda_2 - 4\,{\omega_2}^2 - 26\,{\omega_3}^2 - 20\,\lambda_2\omega_2\omega_{10} + 20\,\omega_1\lambda_2\omega_3 + 36\,\omega_{11}\omega_{10}{\omega_3}^2 + 12\,(\bar t_9)\,\omega_1\omega_3 - \\
- 12\,{\omega_3}^2\,(\bar t_8) + 16\,\omega_2\lambda_4\omega_3 - 8\,\omega_2\omega_{12} - 20\,\omega_2\omega_{10} - 12\,s_{10}\omega_{10}\omega_3 + 27\,{\omega_3}^3\omega_2 + 8\,s_7\omega_1\omega_3 + \\
+ 9\,\omega_3{\omega_{10}}^3 + 18\,{\omega_3}^2\,(\bar t_9) - 52\,\omega_1\omega_3 - 10\,\omega_{11}\omega_3 + 64\,\omega_{10}\lambda_4\omega_3 + 8\,s_9{\omega_3}^2 + 10\,\omega_{11}\lambda_2\omega_3 + \\
+ 162\,\omega_1\omega_{10}{\omega_3}^2 + 20\,{\omega_{10}}^2 s_7 + 18\,\omega_{11}\omega_{12}{\omega_3}^2 - 18\,s_6\omega_{10}\omega_3 - 12\,s_6\omega_{12}\omega_3 + 6\,\omega_{11}\,(\bar t_9)\,\omega_3 = 0.
\end{gathered} \tag{6.1}$$

После подстановки полученных выше формул для коэффициентов $t_k, s_j, \lambda_2, \lambda_4$ в три уравнения-следствия (2,2,1)-тождества все они превращаются в соотношения на шестерку коэффициентов (4.15) многочлена N_{320}. С учетом двух уравнений, остающихся от $\bar p$-системы, общее количество таких уравнений равно 5. Таким образом получается основной результат настоящей статьи.

Теорема 1. *Голоморфно-однородная гиперповерхность (1.1), удовлетворяющая основным допущениям 1–3, однозначно определяется набором (1.11) из семи коэффициентов своего нормального уравнения. При этом шесть первых коэффициентов названного набора удовлетворяют полиномиальной системе из 5 уравнений.*

Замечание 14. Исследование полученной системы из 5 полиномиальных уравнений связано со значительными трудностями. Так, первые два многочлена имеют четвертую степень, а три последних — шестую; количества слагаемых этих многочленов также достаточно велики. В итоге даже «простое» определение ранга якобиевой матрицы полученного полиномиального отображения $P : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$ (в произвольной точке) представляет собой практически неразрешимую задачу. Использование пакета Maple также не дает здесь эффекта.

В этой связи возникает вопрос о практической значимости как основного полученного результата, так и промежуточных утверждений проделанной работы. Частично отвечает на этот вопрос завершающий статью параграф.

7. Проверка вычислений на примере однородной поверхности

Здесь будет рассмотрен пример однородной поверхности, удовлетворяющей допущениям 1–3. На нем подтверждается справедливость полученных выше формул для коэффициентов канонических уравнений (1.1). Вычисления, связанные с нормальными формами этой поверхности, были проведены и предоставлены автору А.В. Атановым.

Предложение 10 (Атанов). *Трубчатое многообразие над аффинно-однородной поверхностью*

$$x_3x_1 = x_2^2 - x_1^{8/5} \tag{7.1}$$

из пространства $\mathbb{R}^3$ *можно привести к нормальному уравнению Мозера вида*

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \frac{5}{4}(E_1 - E_0) + \dots. \tag{7.2}$$

При этом многочлены N_{320}, N_{420} *из уравнения (7.2) имеют следующие матрицы:*

$$N_{320} \sim \frac{5}{36}\sqrt{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -18 & 0 \\ -15 & 0 & 21 \\ 0 & 50 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_{420} \sim \frac{5}{144}\begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 0 & 40 & 0 \\ 90 & 0 & -30 \\ 0 & -600 & 0 \\ -325 & 0 & 75 \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

Замечание 15. Унитарным преобразованием с вещественными коэффициентами

$$z = Uz^*, \ U = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}, \ m = 1 + \sqrt{2} \tag{7.4}$$

пространства $\mathbb{C}^2$ (с координатами z_1, z_2) и последующим растяжением координат многочлен $(E_1 - E_0)$ превращается в E_3.

Это означает, что у трубки (7.1) имеется нормальное по Мозеру уравнение, удовлетворяющее первому из трех основных допущений статьи.

Ясно также, что вещественный характер коэффициентов многочлена N_{320} из формулы (7.3) не изменится после замены (7.4). Так достигается выполнение второго из основных допущений. Кроме того, еще одним преобразованием $\varphi_{(E,a,0)}$ (см. [8]), сохраняющим свойство вещественности коэффициентов многочлена N_{320}, можно обнулить два из них, например, ω_6, ω_7.

В итоге трубка (7.1) имеет нормальное уравнение с $N_{220} = E_3$ и

$$N_{320} \sim \frac{\sqrt{2970 - 1230\,m}}{90}\begin{pmatrix} 4+13\,m & 4\,m & 4+6\,m \\ -12\,m-3 & 12+18\,m & 0 \\ 0 & 54+132\,m & -24-57\,m \\ 18+44\,m & 48\,m+20 & -17-40\,m \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

Такая матрица удовлетворяет третьему из основных допущений статьи.

Остается убедиться, что полученные выше результаты и формулы (типа (5.12), (6.1) и др.) верны для элементов матрицы (7.5). Например (и это достаточно «легко» проверить с помощью пакетов символьной математики), приведенное выше уравнение (5.12) действительно превращается в тождество на элементах этой матрицы.

Отметим, что на элементах этой матрицы отличны от нуля все три минора $m_{1,2}$, $m_{1,3}$, $m_{2,3}$ из формулы (5.9).

Еще одно утверждение, вытекающее из полученных выше результатов и опирающееся на символьные вычисления, относится к вопросу о количестве голоморфно различных голоморфно-однородных гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{C}^3$.

Предложение 11. *Ранг итоговой системы 5 уравнений относительно опорной шестерки коэффициентов (4.15) является полным в точке пространства $\mathbb{R}^6_\omega$, отвечающей поверхности (7.1).*

Следствие. *Вблизи многообразия (7.1) имеется не более чем 2-параметрическое семейство голоморфно однородных гиперповерхностей (1.1), удовлетворяющих основным допущениям 1–3 данной статьи.*

Отметим, что получение точных результатов о количестве изучаемых объектов возможно в многомерном комплексном анализе, как правило, лишь в очень специальных случаях (см., например, [15]).

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору А.В. Лободе. Настоящая статья представляет собой расширенное изложение совместного с А.В. Лободой доклада [6], сделанного в рамках конференции «Геометрический анализ и его приложения» (Волгоград, 2016 г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арапов, В. С. О вещественных тейлоровских коэффициентах однородных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$ / В. С. Арапов, А. В. Лобода // Материалы 12-й международной летней школы-конференции. — Казань : Изд-во Казан. мат. о-ва, 2015. — С. 34–35.

2. Кружилин, Н. Г. Аффинная и голоморфная эквивалентность трубчатых областей в $\mathbb{C}^2$ / Н. Г. Кружилин, П. А. Солдаткин // Мат. заметки. — 2004. — Т. 75, вып. 5. — С. 670–682.

3. Лобода, А. В. Использование компьютерных алгоритмов в задаче коэффициентного описания однородных поверхностей / А. В. Лобода, В. И. Суковых // Вестник ВГУ. Системный анализ. — 2015. — № 1. — С. 14–22.

4. Лобода, А. В. Локальное описание однородных вещественных гиперповерхностей двумерного комплексного пространства в терминах их нормальных уравнений / А. В. Лобода // Функцион. анализ. — 2000. — Т. 34, вып. 2. — С. 33–42.

5. Лобода, А. В. О тейлоровских коэффициентах голоморфно-однородных поверхностей общего положения / А. В. Лобода, В. И. Суковых // Тез. докл. Воронеж. зим. мат. шк. — Воронеж : Изд-во ВГУ, 2015. — С. 72–73.

6. Лобода, А. В. Об опорных наборах коэффициентов для голоморфно-однородных СПВ-гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$ / А. В. Лобода, В. И. Суковых // Геометрический анализ и его приложения : материалы 3-й Междунар. шк.-конф. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2016. — С. 133–138.

7. Лобода, А. В. Об определении однородной строго псевдо-выпуклой гиперповерхности по коэффициентам ее нормального уравнения / А. В. Лобода // Мат. заметки. — 2003. — Т. 73, № 3. — С. 419–423.

8. Лобода, А. В. Однородные строго псевдо-выпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии / А. В. Лобода // Мат. сб. — 2001. — Т. 192. — С. 3–24.

9. Applications of differential algebra for computing Lie algebras of infinitesimal CR-automorphisms / M. Sabzevari, A. Hashemi, B. M. Alizadeh, J. Merker // Electronic text

data. — Mode of access: http://arxiv.org/abs/1212.3070. — Title from screen.

10. Beloshapka, V. K. Homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, associated with a model CR-cubic / V. K. Beloshapka, I. G. Kossovskiy // J. Geom. Anal. — 2010. — Vol. 20, № 3. — P. 538–564.

11. Cartan, E. Sur la geometrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes / E. Cartan // Ann. Math. Pura Appl. — 1932. — Vol. 11, № 4. — P. 17–90.

12. Chern, S. S. Real hypersurfaces in complex manifolds / S. S. Chern, J. K. Moser // Acta Math. — 1974. — Vol. 133, № 3. — P. 219–271.

13. Eastwood, M. On affine normal forms and a classification of homogeneous surfaces in affine three-space / M. Eastwood, V. V. Ezhov // Geom. Dedicata. — 1999. — Vol. 77. — P. 11–69.

14. Fels, G. On affine normal forms and a classification of homogeneous surfaces in affine three-space / G. Fels, W. Kaup // Acta Math. — 2008. — Vol. 210. — P. 1–82.

15. Isaev, A. V. On the number of affine equivalence classes of spherical tube hypersurfaces / A. V. Isaev, W. Kaup // Math. Ann. — 2011. — Vol. 349. — P. 59–74.

REFERENCES

1. Arapov V.S., Loboda A.V. O veshchestvennykh teylorovskikh koeffitsientakh odnorodnykh giperpoverkhnostey prostranstva $\mathbb{C}^3$ [Real Taylor Coefficients of Homogeneous Hypersurfaces in Space $\mathbb{C}^3$]. *Materialy 12-y mezhdunarodnoy letney shkoly-konferentsii*. Kazan, Izd-vo Kazan. mat. o-va, 2015, pp. 34-35.

2. Kruzhilin N.G., Soldatkin P.A. Affinnaya i golomorfnaya ekvivalentnost trubchatykh oblastey v $\mathbb{C}^2$ [Affine and Holomorphic Equivalence of Tube Domains in $\mathbb{C}^2$]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 2004, vol. 75, iss. 5, pp. 670-682.

3. Loboda A.V., Sukovykh V.I. Ispolzovanie kompyuternykh algoritmov v zadache koeffitsientnogo opisaniya odnorodnykh poverkhnostey [Using of Computer Algorithms in the Problem of Coefficients Description Homogeneous Surfaces]. *Vestnik VGU. Sistemnyy analiz*, 2015, no. 1, pp. 14-22.

4. Loboda A.V. Lokalnoe opisanie odnorodnykh veshchestvennykh giperpoverkhnostey dvumernogo kompleksnogo prostranstva v terminakh ikh normalnykh uravneniy [Local Description of Homogeneous Real Hypersurfaces of the Two-Dimensional Complex Space in Terms of Their Normal Equations]. *Funktsion. analiz*, 2000, vol. 34, iss. 2, pp. 33-42.

5. Loboda A.V., Sukovykh V.I. O teylorovskikh koeffitsientakh golomorfno-odnorodnykh poverkhnostey obshchego polozheniya [Taylor Coefficients of Holomorphically Homogeneous Surfaces of General Position]. *Tez. dokl. Voronezh. zim. mat. shk*. Voronezh, Izd-vo VGU, 2015, pp. 72-73.

6. Loboda A.V., Sukovykh V.I. Ob opornykh naborakh koeffitsientov dlya golomorfno-odnorodnykh SPV-giperpoverkhnostey v $\mathbb{C}^3$ [Basic Sets of Coefficients for Holomorphically Homogeneous SPC-Hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$]. *Geometricheskiy analiz i ego prilozheniya: materialy 3-y Mezhdunar. shk.-konf*. Volgograd, Izd-vo VolGU Publ., 2016, pp. 133-138.

7. Loboda A.V. Ob opredelenii odnorodnoy strogo psevdo-vypukloy giperpoverkhnosti po koeffitsientam ee normalnogo uravneniya [Determination of a Homogeneous Strictly Pseudoconvex Surface From the Coefficients of Its Normal Equation]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 2003, vol. 73, no. 3, pp. 419-423.

8. Loboda A.V. Odnorodnye strogo psevdo-vypuklye giperpoverkhnosti v $\mathbb{C}^3$ s dvumernymi gruppami izotropii [Homogeneous Strictly Pseudoconvex Hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ with Two-Dimensional Isotropy Groups]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 2001, vol. 192, pp. 3-24.

9. Sabzevari M., Hashemi A., Alizadeh B.M., Merker J. *Applications of differential algebra for computing Lie algebras of infinitesimal CRautomorphisms*. Available at: http://arxiv.org/abs/1212.3070.

10. Beloshapka V.K., Kossovskiy I.G. Homogeneous Hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, Associated with a Model CR-Cubic. *J. Geom. Anal.*, 2010, vol. 20, no. 3, pp. 538-564.

11. Cartan E. Sur la Geometrie Pseudoconforme des Hypersurfaces de Deux Variables Complexes. *Ann. Math. Pura Appl.*, 1932, vol. 11, no. 4, pp. 17-90.

12. Chern S.S., Moser J.K. Real Hypersurfaces in Complex Manifolds. *Acta Math.*, 1974, vol. 133, no. 3, pp. 219-271.

13. Eastwood M., Ezhov V.V. On Affine Normal Forms and a Classification of Homogeneous Surfaces in Affine Three-Space. *Geom. Dedicata.*, 1999, vol. 77, pp. 11-69.

14. Fels G., Kaup W. On Affine Normal Forms and a Classification of Homogeneous Surfaces in Affine Three-Space. *Acta Math.*, 2008, vol. 210, pp. 1-82.

15. Isaev A.V., Kaup W. On the Number of Affine Equivalence Classes of Spherical Tube Hypersurfaces. *Math. Ann.*, 2011, vol. 349, pp. 59-74.

THE FORMULAS FOR THE LOWER TAYLOR COEFFICIENTS OF HOMOGENEOUS SURFACES

Valerii Igorevich Sukovykh

Assistant, Department of Digital Technology,
Voronezh State University
sukovyh@gmail.com
Universitetskaya Sq., 1, 394045 Voronezh, Russian Federation

Abstract. This article is related to the descriptions of problem for holomorphically homogeneous real hypersurfaces in three-dimensional complex spaces. A common coefficients approach is developing to the study of homogeneity on the base of symbolic mathematics and computing.

The aim of this approach is to look for opportunities to describe homogeneous real hypersurfaces of a 3-dimensional complex space in terms of the Taylor coefficients of their defining functions.

The result of A.V. Loboda (2000) may be called here a reference point. It allows to describe homogeneous hypersurfaces in two-dimensional complex space in terms of triple of real Taylor coefficients. This triple itself satisfies certain polynomial constraints.

To study the problem in a much more complicated three-dimensional case it is necessary to work with a large amount of information. In this article, it is done by a Maple symbolic computation computer package.

In this article one particular case is considered of strictly pseudo-convex real hypersurfaces in which foreseeable formulas can be obtained for the parameters and coefficients of the problem under consideration.

The main result of this paper is the reduction of the number of parameters describing the property of homogeneity from 16 coefficients (according to the result of the author and A.V. Loboda, 2015) to 7 ones. The obtained polynomial system of restrictions on these coefficients, involves five equations. Its consequence is the estimate of the number of homogeneous surfaces of studied class.

In the article the relations are given between the parameters of holomorphic vector fields tangent to the studied homogeneous surfaces. In the case under discussion, these relationships also have a relatively simple form.

The article describes an example confirming the validity of the formulas obtained in it by comparing them with coefficients of concrete homogeneous surface.

Key words: holomorphic transformation, Taylor series, real hypersurface, Lie algebra, normal form of equation, system of polynomial equations, symbolic computation.