DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.5.11

УДК 517.9
ББК 22.161.1

О СХОДИМОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ [1]

Ирина Владимировна Трухляева

Ассистент кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
irishka2027@mail.ru, i.v.truhlyaeva@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В работе рассматриваются полиномиальные приближенные решения задачи Дирихле уравнения минимальной поверхности. Показывается, что при определенных условиях на геометрическое строение области градиенты таких решений остаются по модулю ограниченными при увеличении степени рассматриваемых многочленов. Следствием полученных свойств является равномерная сходимость приближенных решений к точному решению уравнения минимальной поверхности.

Ключевые слова: уравнение минимальной поверхности, равномерная сходимость, приближенное решение, аппроксимация уравнения, оценка равномерной сходимости.

Введение

При численном решении краевых задач уравнений и систем уравнений с частными производными важнейшей проблемой является обоснование используемого метода решения. Исследование данной задачи особенно важно для нелинейных уравнений, так как в этом случае имеется ряд трудностей, связанных в первую очередь с невозможностью использовать традиционные методы и подходы, используемые для линейных уравнений. Например, невозможно применить принцип максимума для решений разностного аналога нелинейного уравнения эллиптического типа, который успешно используется для обоснования сходимости линейных уравнений (см., например, [1]). Для нелинейных уравнений предварительно необходимо установить некоторые априорные оценки производных приближенных решений. В настоящей работе мы дали обоснование вариационного метода решения уравнения минимальной поверхности в случае многомерного пространства. Мы используем тот же подход, который был нами применен в работе [10] для двумерного уравнения.

1. Постановка задачи

Мы рассматриваем вопрос о сходимости приближенных решений для уравнения минимальной поверхности

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) = 0 \tag{1}$$

в области Ω с краевым условием

$$f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}, \tag{2}$$

где $\varphi \in C(\overline{\Omega})$. Стоит заметить, что данная задача Дирихле для произвольной области (даже с гладкой границей) не всегда имеет решение. В случае плоских областей необходимым и достаточным условием разрешимости задачи Дирихле для произвольной непрерывной граничной функции $\varphi(x)$ является условие выпуклости этой области. В пространстве размерности больше двух таким условием является неотрицательность средней кривизны границы области относительно внешней нормали. С точными формулировками и доказательствами этих результатов можно ознакомиться по работам [2; 3; 14–16; 18–20]. В нашей статье мы не накладываем никаких условий на область Ω, однако предполагаем, что для данной граничной функции $\varphi(x)$ решение задачи (1)–(2) существует. Понятно, что такие функции $\varphi(x)$ имеются для произвольной области Ω.

Мы исследуем вопрос о равномерной сходимости полиномиальных приближенных решений уравнения минимальной поверхности, построенных с помощью алгебраических многочленов. В работе [4] была решена подобная задача о сходимости для кусочно-линейных приближенных решений краевой задачи (1)–(2), а в работе [8] дано описание численной реализации метода конечных элементов, основанного на кусочно-линейных функциях. В работе [10] доказана равномерная сходимость полиномиальных решений в плоских областях. Далее мы приводим необходимые определения.

Предположим, что $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная выпуклая область такая, что для некоторого многочлена $\psi(x_1, \dots, x_n)$, степени не более N_0 по каждой переменной, выполнено $\psi(x_1, \dots, x_n) = 0$ при $(x_1, \dots, x_n) \in \partial\Omega$ и $\psi(x_1, \dots, x_n) > 0$ для $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$. Для натурального N обозначим через L_N множество всех многочленов вида

$$v_N(x_1, \dots, x_n) = \psi(x_1, \dots, x_n) \times \sum_{h_1=1}^{N} \dots \sum_{h_n=1}^{N} c_{h_1,\dots,h_n} x_1^{h_1}, \dots, x_n^{h_n}.$$

Ясно, что $v_N(x_1, \dots, x_n) = 0$ для $(x_1, \dots, x_n) \in \partial\Omega$. Предположим, что $\varphi \in C^1(\Omega)$. Рассмотрим задачу нахождения такого многочлена v_N^*, на котором достигает своего минимума интеграл площади

$$\sigma(\varphi + v_N) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla\varphi + \nabla v_N|^2}\, dx \to \min, \quad v_N \in L_N. \tag{3}$$

Заметим, что если φ меняется внутри области, то мы будем получать, вообще говоря, разные решения v_N^* задачи (3). Функцию $f_N^* = \varphi + v_N^*$, $v_N^* \in L_N$, будем называть полиномиальным приближенным решением краевой задачи (1)–(2), если для любого многочлена $v_N \in L_N$ выполнено равенство

$$\int_{\Omega} \frac{\langle \nabla\varphi + \nabla v_N^*, \nabla v_N \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi + \nabla v_N^*|^2}}\, dx = 0. \tag{4}$$

Теорема 1. *Решение задачи* (3) *существует и единственно.*

Доказательство. Ясно, что значение площади $\sigma(\varphi + v_N)$ есть некоторая функция $\sigma(c_{h_1}, c_{h_2}, ..., c_{h_n})$ от конечного числа переменных $c_{h_1,...,h_n}, h, n = 1, \ldots, N$. Данная функция, очевидно, непрерывная. При этом

$$\lim_{|c|\to\infty} \sigma(c_{h_1,...,h_n}) = +\infty,$$

где $|c| = \max\limits_{1\le h_1,...,h_n\le N} |c_{h_1,...,h_n}|$. Следовательно, существует такой набор чисел $c^*_{h_1,...,h_n}$, при которых функция $\sigma(c_{h_1}, c_{h_2}, ..., c_{h_n})$ принимает минимальное значение. Обозначим через v^*_N многочлен, соответствующий этому набору коэффициентов. Тогда для него выполняется условие (4).

Покажем теперь единственность. Предположим, что существует еще функция $v^1_N \in \in L_N$, которая является решением задачи (3). Для нее также выполняется равенство (4). Полагая в этом равенстве $v_N = v^*_N - v^1_N$ и вычитая одно равенство из другого, получаем

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\langle \nabla f^*, \nabla f^* - \nabla f^1 \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla f^*|^2}} - \frac{\langle \nabla f^1, \nabla f^* - \nabla f^1 \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla f^1|^2}} \right) dx = 0, \tag{5}$$

где $f^* = \varphi + v^*_N$, $f^1 = \varphi + v^1_N$.

Далее нам понадобится неравенство

$$\langle \frac{\xi}{\sqrt{1+|\xi|^2}} - \frac{\eta}{\sqrt{1+|\eta|^2}}, \xi - \eta \rangle \ge \frac{|\xi - \eta|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}(\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2} + |\xi||\eta| + 1)}, \tag{6}$$

которое выполняется для любых векторов $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$ и получается следующим образом. Для начала заметим, что

$$\sqrt{1+|\xi|^2} \ge \sqrt{1+|\eta|^2} + \frac{\langle \eta, \xi - \eta \rangle}{\sqrt{1+|\eta|^2}}.$$

Тогда

$$\langle \frac{\xi}{\sqrt{1+|\xi|^2}} - \frac{\eta}{\sqrt{1+|\eta|^2}}, \xi - \eta \rangle = -\frac{\langle \xi, \eta - \xi \rangle}{\sqrt{1+|\xi|^2}} - \frac{\langle \eta, \xi - \eta \rangle}{\sqrt{1+|\eta|^2}} \ge$$

$$\ge \sqrt{1+|\eta|^2} - \sqrt{1+|\xi|^2} - \frac{\langle \xi, \eta - \xi \rangle}{\sqrt{1+|\xi|^2}} = \frac{\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2} - \langle \xi, \eta \rangle - 1}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \ge$$

$$\ge \frac{|\xi - \eta|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}(\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2} + |\xi||\eta| + 1)}.$$

Таким образом, из неравенства (6) и равенства (5) следует, что

$$\int\limits_\Omega \frac{|\nabla f^* - \nabla f^1|^2}{\sqrt{1+|\nabla f^*|^2}(\sqrt{1+|\nabla f^*|^2}\sqrt{1+|\nabla f^1|^2} + |\nabla f^*||\nabla f^1| + 1)} dx \le 0.$$

Поэтому $\nabla f^* \equiv \nabla f^1$. Откуда получаем, что $\nabla v^*_N \equiv \nabla v^1_N$. Используя, что многочлены v^*_N и v^1_N равны нулю на границе области $\partial\Omega$, имеем $v^*_N(x_1, \ldots, x_n) = v^1_N(x_1, \ldots, x_n)$ при всех $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$. Таким образом единственность доказана.

Определение 1. *Функцию* $f^* = \varphi + v_N^*$, $v_N^* \in L_N$, *будем называть полиномиальным решением краевой задачи* (1)–(2), *если для любого многочлена* $v_N \in L_N$ *выполнено равенство* (4).

Ниже нас будет интересовать вопрос о равномерной сходимости последовательности полиномиальных решений $\varphi + v_N^*$ при $N \to \infty$. В первую очередь мы покажем, что, при определенных условиях, градиенты этих функций остаются ограниченными постоянной, независящей от N. Это свойство позволит далее получить оценку равномерной сходимости к точному решению.

2. Оценка градиента полиномиального решения

Пусть $f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ — решение задачи (1)–(2). Будем ниже предполагать, что $\sup\limits_{\Omega} |\nabla f| = P_0 < +\infty$. Введем величину $\delta(\xi, \eta)$ для произвольных векторов $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$:

$$\delta(\xi, \eta) = \sqrt{1 + |\eta|^2} - \sqrt{1 + |\xi|^2} - \frac{\langle \xi, \eta - \xi \rangle}{\sqrt{1 + |\xi|^2}}.$$

Не трудно заметить, что $\delta(\xi, \eta) > 0$ при всех $\xi \neq \eta$. Также нам понадобится следующая полиномиальная характеристика области:

$$\lambda_N = \inf_{v \in L_N} \frac{\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \right)^{1/2}}{\sqrt{|\Omega|} \sup\limits_{\Omega} |\nabla v|} > 0,$$

где $|\Omega|$ — n-мерный объем области Ω. Ясно, что $0 < \lambda_N \leq 1$. Скорость стремления к нулю величины λ_N при $N \to \infty$ будет оценена в 5-м разделе настоящей статьи.

Далее, полагая $\xi = \nabla f$, $\eta = \nabla \varphi + \nabla v_N^*$ и используя уравнение (1), получаем

$$\int\limits_{\Omega} \delta(\nabla f, \nabla \varphi + \nabla v_N^*) \, dx = \sigma(\varphi + v_N^*) - \sigma(f).$$

Пользуясь неравенством (см. доказательство (6))

$$\sqrt{1 + |\eta|^2} - \sqrt{1 + |\xi|^2} - \frac{\langle \xi, \eta - \xi \rangle}{\sqrt{1 + |\xi|^2}} \geq$$

$$\geq \frac{|\xi - \eta|^2}{\sqrt{1 + |\xi|^2} (\sqrt{1 + |\xi|^2} \sqrt{1 + |\eta|^2} + |\xi| |\eta| + 1)},$$

заключаем, что

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f - \nabla \varphi - \nabla v_N^*|^2 \, dx}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2} (\sqrt{1 + |\nabla f|^2} \sqrt{1 + |\nabla \varphi + \nabla v_N^*|^2} + |\nabla f| |\nabla \varphi + \nabla v_N^*| + 1)} \leq$$

$$\leq \sigma(\varphi + v_N^*) - \sigma(f).$$

Тогда из предыдущего неравенства

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f - \nabla \varphi - \nabla v_N^*|^2 \, dx}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi + \nabla v_N^*|^2}} \leq 3(1 + P_0^2)(\sigma(\varphi + v_N^*) - \sigma(f)).$$

Положим $K = \max\{\sup\limits_{\Omega} |\nabla \varphi|, 1\}$ и $A_N = \sup\limits_{\Omega} |\nabla v_N^*|$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla f - \nabla\varphi - \nabla v_N^*|^2\,dx \le 3\sqrt{1+2K^2+2A_N^2}(1+P_0^2)(\sigma(\varphi+v_N^*)-\sigma(f)).$$

Введем обозначение $g = f - \varphi$. Ясно, что $g(x_1,\ldots,x_n) = 0$ при $(x_1,\ldots,x_n) \in \partial\Omega$. Далее для произвольной функции $h \in C(\overline{\Omega})$ через h_N будем обозначать некоторое приближение функции h функциями из пространства L_N. Способ такого приближения в дальнейших рассуждениях не важен и будет уточнен в следующем разделе статьи. Используя данное обозначение, имеем

$$\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla f - \nabla\varphi - \nabla v^*|^2\,dx\right)^{1/2} \ge \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla g_N - \nabla v^*|^2\,dx\right)^{1/2} -$$

$$-\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Тогда, так как $g_N - v_N^* \in L_N$, то

$$\sup\limits_{\Omega} |\nabla g_N - \nabla v^*| \le \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}\lambda_N}\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2\,dx\right)^{1/2} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{|\Omega|}\lambda_N}\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla v_N^*|^2\,dx\right)^{1/2} \le \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}\,\lambda_N}\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2\,dx\right)^{1/2} +$$

$$+\frac{\left(3(1+P_0^2)\sqrt{1+2K^2+2A_N^2}\right)^{1/2}}{\sqrt{|\Omega|}\,\lambda_N}\sqrt{\sigma(\varphi+v_N^*)-\sigma(f)}.$$

Воспользуемся следующим неравенством

$$\frac{x}{\sqrt[4]{a+x^2}} \ge \sqrt[4]{a+x^2} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a+x^2}},$$

которое выполняется для $x \ge 0$ и $a > 0$. Из этого неравенства, полагая $x = \sqrt{2}A_N$, $a = 1+2K^2$, получаем

$$A_N \le \sup\limits_{\Omega} |\nabla g_N| + \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}\,\lambda_N}\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2\,dx\right)^{1/2} +$$

$$+\left(\frac{3(1+P_0^2)}{|\Omega|\,\lambda_N^2}(\sigma(\varphi+v_N^*)-\sigma(f))\right)^{1/2} + 1. \tag{7}$$

Так как функция v_N^* является решением задачи (3), то приходим к оценке

$$\sup\limits_{\Omega} |\nabla v_N^*| \le \sup\limits_{\Omega} |\nabla g_N| + \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}\,\lambda_N}\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2\,dx\right)^{1/2} +$$

$$+\left(\frac{3(1+P_0^2)}{|\Omega|\,\lambda_N^2}(\sigma(\varphi+g_N)-\sigma(f))\right)^{1/2}+1. \qquad (8)$$

Для получения окончательного неравенства заметим, что функция $\varphi+g=f$ является решением уравнения (1) и потому $a'(0)=0$, где $a(t)=\sigma(f+t(\varphi+g_N-f))$. Тогда, полагая $f^t=f+t(\varphi+g_N-f)$,

$$\sigma(\varphi+g_N)-\sigma(f)=\int\limits_0^1 ds\int\limits_0^s a''(t)dt=$$

$$=\int\limits_0^1 ds\int\limits_0^s dt\iint\limits_{\Omega}\frac{(1+|\nabla f^t|^2)|\nabla f-\nabla(\varphi+g_N)|^2-\langle\nabla f^t,\nabla f-\nabla(\varphi+g_N)\rangle^2}{(1+|\nabla f^t|^2)^{3/2}}dx\le$$

$$\le\int\limits_{\Omega}|\nabla f-\nabla(\varphi+g_N)|^2dx=\int\limits_{\Omega}|\nabla g-\nabla g_N|^2dx.$$

Из неравенства (8) приходим к оценке

$$\sup_{\Omega}|\nabla v_N^*|\le 1+\sup_{\Omega}|\nabla g_N|+\frac{1+\sqrt{3(1+P_0^2)}}{\sqrt{|\Omega|}\,\lambda_N}\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla g-\nabla g_N|^2\,dx\right)^{1/2}. \qquad (9)$$

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* f *— решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевому условию* (2). *Тогда, если* $v_N^*(x_1,\dots,x_n)\in L_N$ *— решение задачи* (3), *то выполнена оценка его градиента* (9).

Замечание. Из теоремы 2 следует, что при $N\to\infty$ градиенты приближенных решений $\varphi+v_N^*$ будут равномерно ограничены, если таковой будет величина

$$\frac{1}{\lambda_N}\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla g-\nabla g_N|^2\,dx\right)^{1/2},$$

а также ограниченными будут градиенты функций $g_N(x_1,\dots,x_n)$. Для выяснения этих вопросов нам нужно оценить степень приближения функции g многочленами g_N, а также выяснить, как себя ведет числовая последовательность λ_N при $N\to\infty$.

3. Аппроксимация гладких функций полиномами

Пусть Ω — ограниченная область в n-мерном пространстве с границей Γ, k — натуральное число и функция $\psi((x_1,\dots,x_n)$ удовлетворяет условиям:

1) функция ψ дифференцируема k раз и ее производные k-го порядка удовлетворяют условию Липшица;

2) $\psi(x_1,\dots,x_n)=0$ при $(x_1,\dots,x_n)\in\Gamma$ и $\psi(x_1,\dots,x_n)\ne 0$ при $(x_1,\dots,x_n)\in\in\mathbf{R}^n\setminus\Gamma$;

3) $|\nabla\psi(x_1,\dots,x_n)|>0$ при $(x_1,\dots,x_n)\in\Gamma$.

Тогда, как доказано в статье [13], для функции $u(x_1,\dots,x_n)$, непрерывно дифференцируемой k раз в $\overline{\Omega}$ и обращающейся в нуль на Γ, можно указать последовательность многочленов $P_N(x_1,\dots,x_n)$ степени $\le N$ по каждой переменной $x_1,\dots,x_n$ таких, что

$$||u-\psi P_N||_{C^r(\Omega)} \le \frac{\delta_N(u)}{N^{k-r}}, r=0,1,...,k, \tag{10}$$

где $\delta_N(u)\to 0$ при $N\to\infty$.

Далее мы будем считать, что $g=f-\varphi\in C^k(\Omega)$. Теперь мы уточняем способ выбора функции g_N, полагая $g_N=\psi P_N$, где приближающий многочлен выбран для функции $g=f-\varphi$. Применяя (для $r=1$) оценки (10) для $u=f-\varphi$ в неравенстве (9), получаем

$$\sup_\Omega|\nabla v_N^*|\le 1+K+P_0+\frac{2+\sqrt{3(1+P_0^2)}}{\lambda_N}\frac{\delta_N(f-\varphi)}{N^{k-1}}. \tag{11}$$

Из этого неравенства видно, что градиенты приближенных решений будут оставаться ограниченными постоянной, независящей от N при $N\to\infty$, если величина λ_N будет стремиться к нулю не быстрее, чем $O(1/N^{k-1})$. В следующем разделе статьи мы исследуем этот вопрос.

4. Оценка величины λ_N

Рассмотрим следующую полиномиальную характеристику области $\Omega\subset R^n$. Приведем пример оценки снизу величины λ_N. Ясно, что

$$\lambda_N=\inf_P\frac{\left(\int\limits_\Omega|\nabla P|^2\,dx\right)^{1/2}}{\sqrt{|\Omega|}\,\sup\limits_\Omega|\nabla P|},$$

где точная нижняя грань берется по всем многочленам степени не более чем N по каждой переменной.

Далее нам понадобится следующее неравенство А.А. Маркова (см., например, [1, § 6]) для многочлена $Q(x)$ одной переменной степени N на отрезке $[a,b]$:

$$|Q'(x)|\le\frac{2N^2}{b-a}\max_{[a,b]}|Q(x)|.$$

Рассмотрим в R^n куб $K=[a_1,a_2]\times[a_1,a_2]\times\ldots\times[a_1,a_2]$. $P(x_1,\dots,x_n)$ — многочлен, степень которого по каждой переменной не превосходит N. Положим

$$M=\max_K|P(x)|\,.$$

Тогда

$$\left|\frac{\partial P}{\partial x_i}\right|\le\frac{2N^2}{a_2-a_1}\max_K|P(x)|\le M\frac{2N^2}{a_2-a_1},\ i=\overline{1,n}.$$

Следовательно,

$$|\nabla P|^2\le 4nN^4M^2\frac{1}{(a_2-a_1)^2}$$

или

$$|\nabla P| \leq 2\sqrt{n}N^2 M \frac{1}{(a_2 - a_1)} = 2\sqrt{n}N^2 M \frac{1}{a}.$$

Поэтому $|\nabla P| \leq 2\sqrt{n}N^2 M \frac{1}{a}$, где a — сторона куба K.

Ясно, что это неравенство справедливо для любого куба, необязательно со сторонами, параллельными осям координат. Далее положим

$$\widetilde{\lambda}_N = \inf_P \frac{\left(\int\limits_\Omega |P|^2\,dx\right)^{1/2}}{\sqrt{\Omega}\,\sup\limits_\Omega |P|},$$

где точная нижняя грань берется по всем многочленам степени не более чем N по каждой переменной. Найдем сначала оценку $\widetilde{\lambda}_N$ для куба K со стороной a. Пусть $z = (x_1 \ldots x_n) \in K$, x_0— такая, что $P(x_0) = M = \max\limits_K |P|$. Тогда

$$P(x_0) - P(x) \leq |z - z_0| \max_K |\nabla P| \leq 2\sqrt{n}N^2 \frac{1}{a} M|x - x_0|.$$

Если $|x - x_0| < \frac{a}{(4\sqrt{n}N^2)}$, то $M - P(x) \leq \frac{M}{2}$. Таким образом, $P(x) \geq \frac{M}{2}$ для $(x_1 \ldots x_n) \in \in K \cap B_{\frac{a}{4\sqrt{n}N^2}}(x_0)$.

Тогда

$$\int\limits_K P^2(x)dx \geq \int\limits_{K\cap B_{\frac{a}{4\sqrt{2}N^2}}(x_0)} P^2(x)dx \geq$$

$$\geq \frac{M^2}{4} \int\limits_{K\cap B_{\frac{a}{4\sqrt{n}N^2}}(x_0)} dx \geq \frac{M^2 a^n \omega_n}{2^{3n+2}\sqrt{n^n}} \frac{1}{N^{2n}}.$$

Поэтому

$$\left(\int\limits_K P^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{M}{2^{n+1}} \frac{a^{n/2}\sqrt{\omega_n}}{2^{n/2}N^n \sqrt[4]{n}^n}.$$

Так как P — произвольный допустимый многочлен, то

$$\widetilde{\lambda}_N \geq \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sqrt{\omega_n}}{2^{n/2}N^n \sqrt[4]{n^n}}.$$

Теперь применим доказанное неравенство для частных производных многочлена P, которые являются также многочленами. Следовательно,

$$\left(\int\limits_K P_{x_i}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \geq \widetilde{\lambda}_N \max_K |P_{x_i}| \sqrt{|K|},$$

или

$$\left(\int\limits_K P_{x_i}^2 dx\right) \geq \widetilde{\lambda^2}_N (\max_K |P_{x_i}|)^2 |K|.$$

Отсюда

$$|\nabla P|^2 \geq \widetilde{\lambda}_N^2|K| \left(\sum_{i=1}^{n} \max_K |P_{x_i}|\right)^2 \geq$$

$$\geq \widetilde{\lambda}_N^2|K| \left(\sum_{i=1}^{n} \max_K |P_{x_i}|^2\right) = |K|(\max_K |\nabla P|)^2.$$

Таким образом,

$$\frac{\left(\int\limits_K |\nabla P|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}}{|K| \max\limits_K |\nabla P|} \geq \widetilde{\lambda}_N \geq \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sqrt{\omega_n}}{2^{n/2} N^n \sqrt[4]{n^n}}.$$

Следовательно,

$$\lambda_N \geq \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sqrt{\omega_n}}{2^{n/2} N^n \sqrt[4]{n^n}}. \tag{12}$$

Таким образом, мы получили нижнюю оценку величины λ_N для случая, когда областью Ω является куб со стороной $a > 0$. Отметим, что эта оценка от размеров куба не зависит. Используя неравенство (12), получим оценку для произвольной области $\Omega \subset R^n$.

Для любого $z_0 \in \Omega$ найдем максимальный куб $K(z_0) \subset \overline{\Omega}$, необязательно со сторонами, параллельными осям координат, такой, что $z_0 \in K$. Пусть сторона куба $a(z_0) > 0$. Положим

$$\Delta(\Omega) = \inf_{z_0 \in \Omega} a(z_0).$$

Будем предполагать, что $\Delta(\Omega) > 0$.

$$P(z_0) = M = \max_{\Omega} |P|.$$

Через величину $\Delta(\Omega)$ легко оценить λ_N. Действительно, пусть $z_0 \in \Omega$ такая, что $\max\limits_{\Omega} |\nabla P| = |\nabla P(z_0)|$ и куб $K \subset \overline{\Omega}$ содержит эту точку. Тогда

$$\sqrt{\int\limits_{\Omega} P^2(x)dx} \geq \sqrt{\int\limits_{K(z_0)} P(x)dx} \geq \widetilde{\lambda}_N \sqrt{|K(z_0)|} \max_K |P|$$

Отсюда нетрудно получить неравенство

$$\lambda_N \geq \widetilde{\lambda}_N(\Omega) \geq \widetilde{\lambda}_N \frac{\sqrt{|K(z_0)|}}{\sqrt{|\Omega|}} \geq \widetilde{\lambda}_N \frac{\Delta(\Omega)}{\sqrt{|\Omega|}} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sqrt{\omega_n}}{2^{n/2} N^n \sqrt[4]{n^n}} \frac{\Delta(\Omega)}{\sqrt{|\Omega|}}.$$

Таким образом, получаем неравенство

$$\lambda_N \geq \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sqrt{\omega_n}}{2^{n/2} N^n \sqrt[4]{n^n}} \frac{\Delta(\Omega)}{\sqrt{|\Omega|}}. \tag{13}$$

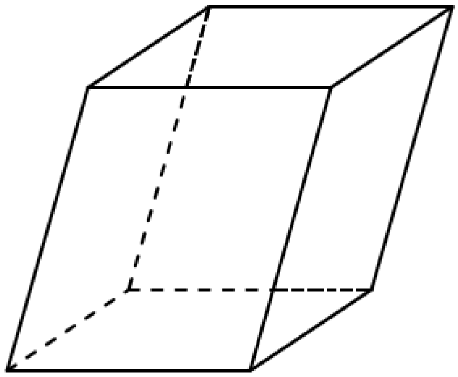
Следовательно, если область Ω такова, что любая ее точка может быть помещена в куб $K \subset \overline{\Omega}$ со стороной $\Delta(\Omega) > 0$, то справедлива оценка (13). Стоить отметить, что если область имеет угловую точку на границе, то возможна ситуация, когда $\Delta(\Omega) = 0$. Например, для наклонного параллелепипеда $\Delta(\Omega) = 0$ (см. рисунок). Поэтому оценка

λ_N для этого случая должна быть выполнена отдельно. Итак, пусть в пространстве с декартовыми координатами (x, y, z) задан параллелепипед R с вершинами в точках

$$(0,0,0), \quad (a,0,0), \quad (a\cos\alpha, a\sin\alpha, 0), \quad (a(1+\cos\alpha), a\sin\alpha, 0),$$

$$(0,0,b), \quad (a,0,b), \quad (a\cos\alpha, a\sin\alpha, b), \quad (a(1+\cos\alpha), a\sin\alpha, b),$$

где $\alpha \in (0, \pi/2]$, $a > 0$ (см. рисунок).



Параллелепипед R

С помощью линейного преобразования

$$u = x\sin\alpha - y\cos\alpha, \quad v = y, \quad t = z, \quad b = a\sin\alpha$$

в пространстве с координатами (u, v, t) получим куб K с вершинами

$$(0,0,0), \quad (a\sin\alpha, 0, 0), \quad (0, a\sin\alpha, 0), \quad (a\sin\alpha, a\sin\alpha, 0),$$

$$(0,0,b), \quad (a\sin\alpha, 0, b), \quad (0, a\sin\alpha, b), \quad (a\sin\alpha, a\sin\alpha, b).$$

Пусть теперь $P = P(x, y, z)$ — произвольный многочлен, степень которого по каждой переменной не превышает N. Не трудно заметить, что

$$P_u^2 + P_v^2 + P_t^2 \geq P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 \geq (1-\cos\alpha)(P_u^2 + P_v^2 + P_t^2).$$

Тогда

$$\frac{\left(\iiint\limits_R (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2)dxdydz\right)^{1/2}}{\sqrt{|K|}\max\limits_R |\nabla P|} \geq \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}} \cdot \frac{\left(\iiint\limits_K (P_u^2 + P_v^2 + P_t^2)dudvdt\right)^{1/2}\sin\alpha}{\sqrt{|R|}\max\limits_K |\nabla P|} =$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}} \cdot \frac{\left(\iiint\limits_K (P_u^2 + P_v^2 + P_t^2)dudvdt\right)^{1/2}\sin\alpha}{\sqrt{|K|}\max\limits_K |\nabla P|}\sqrt{\frac{|K|}{|R|}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}} \cdot \frac{\sin\alpha\left(\iiint\limits_K (P_u^2 + P_v^2 + P_t^2)dudvdt\right)^{1/2}}{\sqrt{|K|}\max\limits_K |\nabla P|}\sqrt{\sin\alpha} \geq \sin\alpha\frac{\sqrt{\pi(1-\cos\alpha)}}{48\sqrt{2}\sqrt[4]{3}N^3}.$$

Таким образом для параллелепипеда со стороной $a > 0$, высотой b и острым углом $\alpha \in (0, \pi/2]$ выполнено неравенство

$$\lambda_N \geq \sin\alpha \frac{\sqrt{\pi(1-\cos\alpha)}}{48\sqrt{2}\sqrt[4]{3}N^3}. \tag{14}$$

Пусть теперь задана произвольная плоская область Ω. Предположим, что найдется такое число $\alpha(\Omega) \in (0, \pi/2]$, что всякая точка z_0 области содержится в некотором наклонном параллелепипеде $R \subset \Omega$ с острым углом $\alpha(\Omega)$ и $b = a\sin\alpha$. При этом z_0 не обязательно должна быть центром параллелепипеда R. Для любого $z_0 \in \Omega$ найдем максимальный по стороне параллелепипед $R \subset \overline{\Omega}$ такой, что $z_0 \in D$. Пусть сторона этого параллелепипеда $a(z_0) > 0$. Будем считать, что

$$\Delta_1(\Omega) = \inf_{z_0 \in \Omega} a(z_0) > 0.$$

Рассуждая так же, как и в [1], получим неравенство

$$\lambda_N \geq \sqrt{\frac{\pi}{|\Omega|}} \frac{\Delta_1(\Omega)\sqrt{(1-\cos\alpha)}}{48\sqrt{2}\sqrt[4]{3}N^3} \sin\alpha. \tag{15}$$

Теорема 3. *Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ такова, что $\Delta_1(\Omega) > 0$ и $\alpha(\Omega) > 0$. Тогда справедлива следующая оценка*

$$\lambda_N \geq \sqrt{\frac{\pi}{|\Omega|}} \frac{\Delta_1(\Omega)\sqrt{(1-\cos\alpha)}}{48\sqrt{2}\sqrt[4]{3}N^3} \sin\alpha. \tag{16}$$

5. Оценка равномерной сходимости

Далее мы воспользуемся методом оценки решений из работы [9]. Пусть f — решение уравнения минимальной поверхности в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $f \in C^k(\overline{\Omega})$. Пусть v_N^* — решение задачи (3), для которого справедливо (4). Положим $f_N^* = \varphi + v_N^*$.

Мы будем предполагать, что

$$\sup_{\Omega} |\nabla f| = P_0 < +\infty.$$

Далее будем рассуждать так же, как и в работе [9]. Положим $f^t(x) = f_N^*(x) + t(f(x) - f_N^*(x))$ и $P_N^* = \sup_{\Omega} |\nabla f_N^*|$, $P_N = \max\{1, P_0, P_N^*\}$. Понятно, что $f^*|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$. Отметим, что P_N, вообще говоря, зависит от N. Однако, если предположить, что $k > 2$ и для области постоянные $\Delta_1(\Omega)$ и $\alpha(\Omega)$ положительны, то из неравенств (15) и (9) следует, что при $N \to \infty$ величина P_N будет оставаться ограниченной некоторой постоянной P.

Далее, так как при $t = 0$ функция $\sigma(t) = \sigma(f^t)$ принимает минимальное значение, то $\sigma'(0) = 0$. Используя это равенство, получаем

$$\sigma(f_N^*) - \sigma(f) = \sigma(1) - \sigma(0) = \int_0^1 ds \int_0^s \sigma''(t)dt =$$

$$= \int_0^1 ds \int_0^s dt \int_\Omega \frac{(1+|\nabla f^t|^2)|\nabla f_N^* - \nabla f|^2 - \langle \nabla f^t, \nabla f_N^* - \nabla f\rangle^2}{(1+|\nabla f^t|^2)^{3/2}} dx \geq$$

$$\geq \int_0^1 ds \int_0^s dt \int_\Omega \frac{|\nabla f - \nabla f_N^*|^2}{(1+|\nabla f^t|^2)^{3/2}} dx \geq \frac{1}{\sqrt{(1+P^2)^3}} \int_\Omega |\nabla f - \nabla f_N^*|^2 dx. \qquad (17)$$

Воспользуемся неравенством Пуанкаре (см., например, [5, п. 7.8]) для функции $h(x) = = f(x) - f_N^*(x)$, $h|_{\partial\Omega} = 0$. Из (17) получаем

$$\sigma(f_N^*) - \sigma(f) \geq \frac{\lambda(\Omega)}{\sqrt{(1+P^2)^3}} \int_\Omega |h(x)|^2 dx,$$

где $\lambda(\Omega) = \frac{\omega_n}{|\Omega|}$ и $|\Omega|$ — n-мерный объем области Ω. Далее положим $M = \sup\limits_\Omega |h|$ и, не ограничивая общности, можем считать, что найдется точка $z_0 = (x_0) \in \Omega$, в которой $h(x_0) = M$. Покажем, что $B_{M/2P}(z_0) \subset \Omega$, где $B_r(z)$ обозначает открытый круг радиуса r с центром в точке z. Действительно, пусть $z' \in \partial\Omega$ такая, что $|z_0 - z'| = \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Тогда

$$2P|z_0 - z'| \geq h(z_0) - h(z') = M - h(z') = M.$$

Таким образом, расстояние от точки z_0 до границы $\partial\Omega$ больше, чем $M/2P$. Следовательно, $B_{M/4P}(z_0) \subset \Omega$. Предположим теперь, что $z = (x) \in B_{M/4P}(z_0)$. Тогда

$$h(z) \geq h(z_0) - 2P|z - z_0| > M - 2P\frac{M}{4P} = M/2.$$

Мы получаем, что $B_{M/4P}(z_0) \subset D_M$, где

$$D_M = \{(x) \in \Omega : |h(x)| > M/2\} \Subset \Omega.$$

Поэтому

$$\int_\Omega |h(x)|^2 dx \geq \int_{D_M} |h(x)|^2 dx \geq$$

$$\geq \int_{B_{M/4P}(z_0)} \left(\frac{M}{2}\right)^2 dx = \omega_n \frac{M^2}{4} \left(\frac{M}{4P}\right)^n = \omega_n \frac{M^{n+2}}{4^{n+1}P^n}.$$

Таким образом,

$$\max_\Omega |f - f_N^*| \leq 4 \left(\frac{P^{n+3}|\Omega|(\sigma(f_N^*) - \sigma(f))}{\omega_n}\right)^{1/(n+2)}.$$

Далее заметим, что функция v_N^* является решением задачи (3). Поэтому $\sigma(f_N^*) - \sigma(f) \leq \leq \sigma(f - \varphi - g_N) - \sigma(f)$. Используя доказанное ранее неравенство

$$\sigma(f - \varphi - g_N) - \sigma(f) \leq \int_\Omega |\nabla g - \nabla g_N|^2 dx$$

и оценку (10) для $u = f - \varphi$, приходим к неравенству

$$\max_\Omega |f - f_N^*| \leq 4 \left(P^{n+3}|\Omega| \frac{\delta_N^2(f - \varphi)}{\omega_n N^{2k-2}}\right)^{1/(n+2)}.$$

Итак, нами доказан основной результат работы.

Теорема 4. *Пусть $f \in C^k(\overline{\Omega}), k \geq 3,$ — решение уравнения минимальной поверхности (1) в области Ω, для которой $\Delta_1(\Omega) > 0$. Пусть это решение удовлетворяет краевому условию (2) с функцией $\varphi \in C^k(\overline{\Omega})$. Рассмотрим функции $v_N^* \in L_N$, которые являются решениями задачи (3). Предположим, что $P_0 = \sup\limits_{\Omega} |\nabla f| < +\infty$ и $K = \sup\limits_{\Omega} |\nabla \varphi| < \infty$. Тогда последовательность приближенных решений $f_N^* = \varphi + v_N^*$ равномерно сходится к f, при этом справедлива оценка*

$$\max_{\overline{\Omega}} |f - f_N^*| \leq 4 \left(P^{n+3} |\Omega| \frac{\delta_N^2(f - \varphi)}{\omega_n N^{2k-2}} \right)^{1/(n+2)} = O\left(\frac{1}{N^{\frac{2k-2}{n+2}}} \right),$$

где

$$P = 1 + 2K + P_0 + \frac{2 + \sqrt{3(1 + P_0^2)}}{2^{n+1}} \frac{\sqrt{\omega_n}}{2^{n/2} N^n \sqrt[4]{n^n}} \frac{\delta_N(f - \varphi)}{N^{k-1}} (N + N_0)^2.$$

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа поддержана РФФИ (проект № 15-41-02517-р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин, И. С. Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков. — М. : Физматлит, 1959. — Т. 2. — 620 с.

2. Бернштейн, С. Н. О первой краевой задаче (задаче Дирихле) для уравнений эллиптического типа и о свойствах функций, удовлетворяющих этим уравнениям / С. Н. Бернштейн, И. Г. Петровский // УМН. — 1941. — № 8. — С. 32–74.

3. Бернштейн, С. Н. Об уравнениях вариационного исчисления / С. Н. Бернштейн // УМН. — 1941. — № 8. — С. 8–31.

4. Гацунаев, М. А. О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности / М. А. Гацунаев, А. А. Клячин // Уфимский математический журнал. — 2014. — Т. 24, № 3 (6). — С. 3–16.

5. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, М. Трудингер. — М. : Наука, 1989. — 464 с.

6. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. — М. : Физматлит, 1962. — 709 с.

7. Канторович, Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М. : Физматлит, 1959. — 684 с.

8. Клячин, А. А. Визуализация расчета формы поверхностей минимальной площади / А. А. Клячин, В. А. Клячин, Е. Г. Григорьева // Научная визуализация. Электронный журнал. — 2014. — Т. 2, № 6. — С. 34–42.

9. Клячин, А. А. О скорости сходимости последовательности, доставляющей минимум в вариационной задаче / А. А. Клячин // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2012. — № 1 (16). — С. 12–20.

10. Клячин, А. А. О сходимости полиномиальных приближенных решений уравнения минимальной поверхности / А. А. Клячин, И. В. Трухляева // Уфимский математический журнал. — 2016. — Т. 8, № 1. — С. 72–83.

11. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. — М. : Наука, 1970. — 512 с.

12. Натансон, И. П. Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. — М. : Гостехиздат, 1949. — 688 с.

13. Харрик, И. Ю. О приближении функций, обращающихся в нуль на границе области, функциями особого вида / И. Ю. Харрик // Математический сборник. — 1955. — Т. 37 (79), № 2. — С. 353–384.

14. Bassanezi, R. C. The Dirichlet problem for the minimal surface equation in non-regular domains / R. C. Bassanezi, U. Massari // Ann. Univ. Ferrara. — 1978. — Vol. 24. — P. 181–189.

15. Finn, R. Remarks relevant to minimal surfaces and to surfaces of constant mean curvature / R. Finn // J. d'Analyse Math. — 1965. — Vol. 14. — P. 139–160.

16. Jenkins, H. The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimension / H. Jenkins, J. Serrin // Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 1968. — Vol. 229. — P. 170–187.

17. Jonsson, A. Triangulations of closed sets and bases in function spaces / A. Jonsson // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 2004. — Vol. 29, № 1. — P. 43–58.

18. Rado, T. The problem of the least area and the problem of Plateau / T. Rado // J. d'Analyse Math. Z. — 1930. — Vol. 32. — P. 763–796.

19. Serrin, J. The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables / J. Serrin // Phil. Trans. Royal Soc. London. — 1964. — Vol. 264, № 1153. — P. 313–496.

20. Stampacchia, G. On some multiple integral problems in the calculus of variations / G. Stampacchia // Comm. Pure Appl. Math. — 1963. — Vol. 16. — P. 382–422.

REFERENCES

1. Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Metody vychisleniy* [Computing Method]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1959, vol. 2. 620 p.

2. Bernshteyn S.N., Petrovskiy I.G. O pervoy kraevoy zadache (zadache Dirikhle) dlya uravneniy ellipticheskogo tipa i o svoystvakh funktsiy, udovletvoryayushchikh etim uravneniyam [On the First Boundary Value Problem (Dirichlet's Problem) for Equations of the Elliptic Type and on the Properties of Functions Satisfying Such Equations]. *UMN* [Russian Mathematical Surveys], 1941, no. 8, pp. 32-74.

3. Bernshteyn S.N. Ob uravneniyakh variatsionnogo ischisleniya [On Equations of Calculus of Variations]. *UMN* [Russian Mathematical Surveys], 1941, no. 8, pp. 8-31.

4. Gatsunaev M.A., Klyachin A.A. O ravnomernoy skhodimosti kusochno-lineynykh resheniy uravneniya minimalnoy poverkhnosti [On Uniform Convergence of Piecewise-Linear Solutions to Minimal Surface Equation]. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal* [Ufa Mathematical Journal], 2014, vol. 24, no. 3 (6), pp. 3-16.

5. Gilbarg D., Trudinger M. *Ellipticheskie differentsialnye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Elliptic Partial Differential Equations of Second Order]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 464 p.

6. Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Priblizhyonnye metody vysshego analiza* [Approximate Methods of Higher Analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1962. 709 p.

7. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsionalnyy analiz v normirovannykh prostranstvakh* [Functional Analysis in Normed Spaces]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1959. 684 p.

8. Klyachin A.A., Klyachin V.A., Grigoryeva E.G. Vizualizatsiya rascheta formy poverkhnostey minimalnoy ploshchadi [Visualisation of Calculating the Form of Minimal Area Surface]. *Nauchnaya vizualizatsiya. Elektronnyy zhurnal*, 2014, vol. 2, no. 6, pp. 34-42.

9. Klyachin A.A. O skorosti skhodimosti posledovatelnosti, dostavlyayushchey minimum v variatsionnoy zadache [On Convergence Rate of Sequence Providing Minimum in Variational Problem]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2012, no. 1 (16), pp. 12-20.

10. Klyachin A.A., Trukhlyaeva I.V. O skhodimosti polinomialnykh priblizhennykh resheniy uravneniya minimalnoy poverkhnosti [On Convergence of Polynomial Solutions of Minimal Surface]. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal* [Ufa Mathematical Journal], 2016, vol. 8, no. 1, pp. 72-83.

11. Mikhlin S.G. *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 512 p.
12. Natanson I.P. *Konstruktivnaya teoriya funktsiy* [Constructive Theory of Functions]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1949. 688 p.
13. Kharrik I.Yu. O priblizhenii funktsiy, obrashchayushchikhsya v nul na granitse oblasti, funktsiyami osobogo vida [On Approximation of Functions Vanishing on the Boundary of a Region by Functions of a Special Form]. *Matematicheskiy sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1955, vol. 37 (79), no. 2, pp. 353-384.
14. Bassanezi R.C., Massari U. The Dirichlet Problem for the Minimal Surface Equation in Non-Regular Domains. *Ann. Univ. Ferrara*, 1978, vol. 24, pp. 181-189.
15. Finn R. Remarks Relevant to Minimal Surfaces and to Surfaces of Constant Mean Curvature. *J. d'Analyse Math.*, 1965, vol. 14, pp. 139-160.
16. Jenkins H., Serrin J. The Dirichlet Problem for the Minimal Surface Equation in Higher Dimension. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1968, vol. 229, pp. 170-187.
17. Jonsson A. Triangulations of Closed Sets and Bases in Function Spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2004, vol. 29, no. 1, pp. 43-58.
18. Rado T. The Problem of the Least Area and the Problem of Plateau. *J. d'Analyse Math. Z.*, 1930, vol. 32, pp. 763-796.
19. Serrin J. The Problem of Dirichlet for Quasilinear Elliptic Differential Equations with Many Independent Variables. *Phil. Trans. Royal Soc. London.*, 1964, vol. 264, no. 1153, pp. 313-496.
20. Stampacchia G. On Some Multiple Integral Problems in the Calculus of Variations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1963, vol. 16, pp. 382-422.

ON THE CONVERGENCE OF APPROXIMATE POLYNOMIAL SOLUTIONS OF THE MINIMAL SURFACE

Irina Vladimirovna Trukhlyaeva
Assistant, Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
irishka2027@mail.ru, i.v.truhlyaeva@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In this paper we consider the polynomial approximate solutions of the Dirichlet problem for minimal surface equation. It is shown that under certain conditions on the geometric structure of the domain the absolute values of the gradients of the solutions are bounded as the degree of these polynomials increases. The obtained properties imply the uniform convergence of approximate solutions to the exact solution of the minimal surface equation. In numerical solving of boundary value problems for equations and systems of partial differential equations, a very important issue is the convergence of approximate solutions. The study of this issue is especially important for nonlinear equations since in this case there is a series of difficulties related with the impossibility of employing traditional methods and approaches used for linear equations. At present, a quite topical problem is to determine the conditions ensuring the uniform convergence of approximate solutions obtained by various methods for nonlinear equations and system of equations of variational kind. In this case, it is natural to employ variational methods of solving boundary value problems. And an issue on the justification of these methods arises, which is reduced to studying general properties of approximate solutions. We consider the issue on convergence of approximate solutions for the minimal surface equation

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) = 0$$

in domain Ω subject to the boundary condition

$$f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega},$$

where $\varphi \in C(\overline{\Omega})$. It should be noted that this Dirichlet problem is not solvable for an arbitrary domain (even with a smooth boundary). For planar domains the necessary and sufficient condition for the solvability of the Dirichlet problem for an arbitrary continuous boundary function $\varphi(x)$ is the convexity of this domain. In the space of dimension greater than two, such condition is the non-negativity of the mean curvature of the boundary w.r.t. the outward normal. In the present work we impose no conditions for domain, but we assume that for a given boundary function problem (1)–(2) is solvable. It is clear that for an arbitrary domain, such functions Ω exist. We study the issue on uniform convergence of polynomial approximate solutions to the minimal surface equation constructed by means of algebraic polynomials. In work [4] a similar convergence problem for piece-wise linear approximate solution to boundary value problem (1)–(2) was solved, while in work [8] there was given a description of numerical realization of finite elements methods based on piece-wise linear functions. Let us provide required definitions. In what follows we shall be interested in the issue on uniform convergence of a sequence of polynomial solutions $\varphi + v_N^*$ as $N \to \infty$. First of all, we shall show that under certain conditions, the gradients of these functions are bounded by a constant independent of N. This property will allow us to obtain an estimate for the rate of uniform convergence to the exact solution.

Key words: minimal surface equation, uniform convergence, almost solution, approximation of equation, estimation of uniform convergence.