



www.volsu.ru

DOI: <https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.5.14>

УДК 539.3

ББК 22.251

О РАЦИОНАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОРИСТОСТИ ПРИ КРУЧЕНИИ БРУСА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Станислав Михайлович Шляхов

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры теории сооружений и строительных конструкций,
Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина
mdt@sstu.ru
ул. Политехническая, 77, 410054 г. Саратов, Российская Федерация

Данила Юрьевич Гаврилов

Аспирант кафедры теории сооружений и строительных конструкций,
Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина
gavrilovsky@gambler.ru
ул. Политехническая, 77, 410054 г. Саратов, Российская Федерация

Аннотация. Настоящая статья посвящена задаче рационального распределения пористости по сечению бруса при кручении. Решение такой задачи позволит обеспечить необходимую несущую способность при снижении материалоемкости конструкции. Цель исследования – подобрать рациональный закон распределения пористости p по прямоугольному сечению бруса при технических ограничениях производства.

Ключевые слова: пористость, кручение, прямоугольник, рациональность, брус, напряжение, модуль сдвига, функционал.

Вопросы оптимального проектирования конструкций приобретают в последнее время все большую значимость и актуальность. Имеется ряд направлений оптимизации. Одним из них является управление свойствами внутренней структуры материала. Теоретические исследования по возможности управлять упругими характеристиками при кручении (модулем сдвига G) рассматриваются в работах К.А. Лурье [5]. Пример решения рационального распределения модуля сдвига G по прямоугольному сечению бруса при кручении представлен в работе М.И. Рейтмана и Г.С. Шапиро [6]. Другим направлением является регулирование свойств материала уровнем

пористости. В настоящей работе рассматривается задача распределения пористости по сечению бруса прямоугольного профиля при кручении с целью наиболее рационального использования материала без потери несущей способности. Большой вклад в изучение свойств пористых материалов внесли Ю.А. Кашталян, С.В. Белов, У.Д. Кингери, Д.О. Бутарович [1–4]. Пористые материалы обладают рядом специфических свойств: пониженной теплопроводностью, повышенной звукоизоляцией, хорошей ударной вязкостью. Кроме того, в теплоэнергетике пористые материалы являются единственно возможными жаропрочными материалами, выполненными из керамики или пористых металлов, полученных методом порошковой металлургии.

Представляет интерес рассмотреть задачу чистого кручения бруса прямоугольного поперечного сечения, выполненного из материала (стали) пористой структуры с переменной по сечению пористостью. Ограничимся случаем упругого деформирования, полагая, что максимальное касательное напряжение в брусѣ τ_{\max} не превышает предела текучести материала при сдвиге τ_T . Известно, что упругие характеристики материала (модуль сдвига G , а также напряжение начала текучести σ_T) являются функциями пористости материала [1–4]. Сглаживая результаты экспериментальных данных для пористой стали методом наименьших квадратов (МНК), получаем зависимости $G(p)$, $\sigma_T(p)$, $\tau_T(p)$ в виде:

$$G = a_1 + a_2 p + a_3 p^2, \tag{1}$$

$$\sigma_T = b_1 + b_2 p + b_3 p^2, \tag{2}$$

$$\tau_T = c_1 + c_2 p + c_3 p^2. \tag{3}$$

Значения коэффициентов a_i, b_i, c_i (МПа) сведены в таблицу 1 для интервала пористости от 0 до 0,43. На рисунке 1, а, б, в приведены графики функций (1), (2), (3) соответственно. Точками обозначены экспериментальные значения упругих характеристик.

Поскольку переменная по сечению пористость приводит к неоднородности свойств материала, используем теорию кручения неоднородных стержней с введением функции напряжений Φ [7]. Исходное уравнение задачи кручения имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{G(p)} \frac{\Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{G(p)} \frac{\Phi}{\partial y} \right) = -2\theta, \tag{4}$$

где $G(p)$ – модуль сдвига как функция пористости. В свою очередь, пористость – функция координат $p = p(x, y)$; θ – относительный угол закручивания.

Таблица 1

Таблица значений коэффициентов, полученных методом наименьших квадратов

| | | | | | |
|-------|---------------------|-------|---------|-------|---------|
| a_1 | $0,805 \cdot 10^5$ | b_1 | 190,31 | c_1 | 109,87 |
| a_2 | $-1,737 \cdot 10^5$ | b_2 | -893,15 | c_2 | -515,67 |
| a_3 | $0,359 \cdot 10^5$ | b_3 | 1226,49 | c_3 | 708,15 |

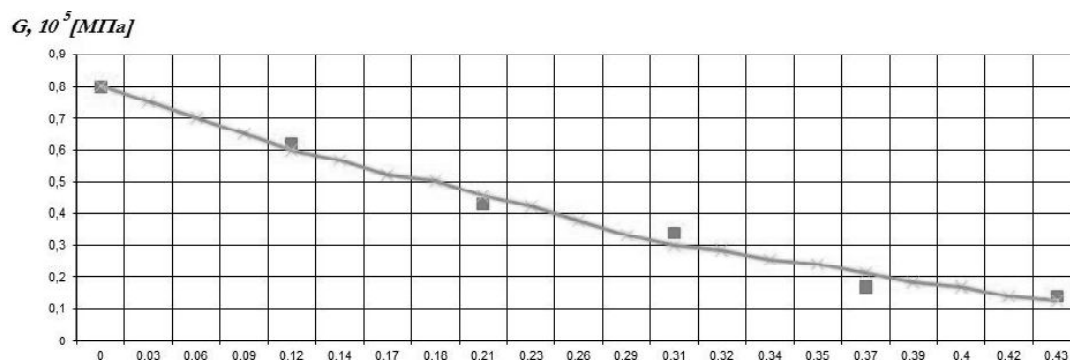


Рис. 1, а. Зависимость модуля сдвига от пористости

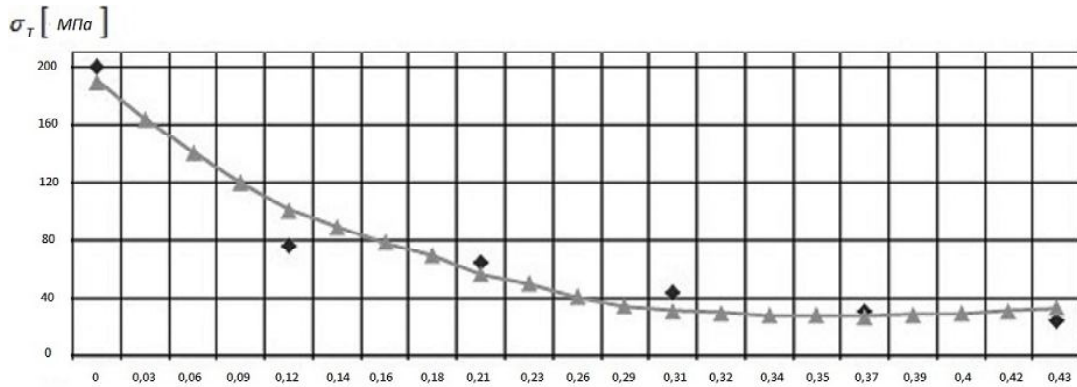


Рис. 1, б. Зависимость предельных нормальных напряжений от пористости

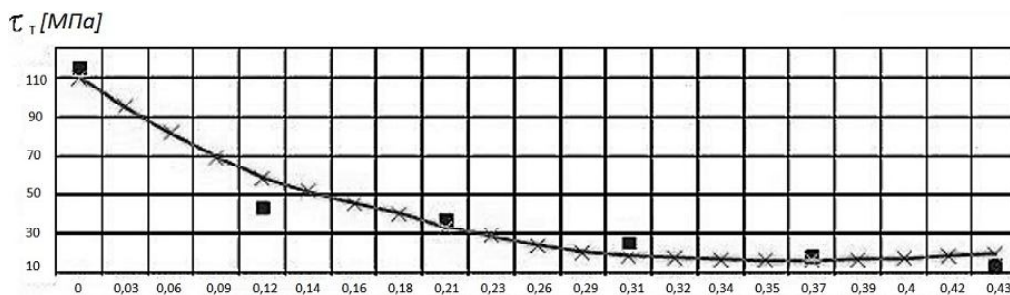


Рис. 1, в. Зависимость предельных касательных напряжений от пористости

Граничное условие на внешнем контуре L для функции напряжений Φ следующее:

$$\Phi_L = 0. \tag{5}$$

Решение краевой задачи (4), (5) заменим поиском минимума эквивалентного ей функционала:

$$I = \iint_A \left\{ \frac{1}{2G(x, y)} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2\theta \Phi \right\} dx dy. \tag{6}$$

Для поиска минимума функционала (6) воспользуемся методом конечных элементов, для чего разбиваем сечение бруса на прямоугольные треугольники (двумерные симплекс-элементы) с катетами, ориентированными по x и y (рис. 2, б).

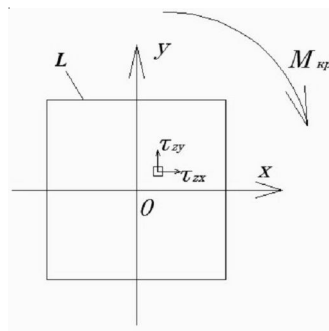


Рис. 2, а. Расчетная схема

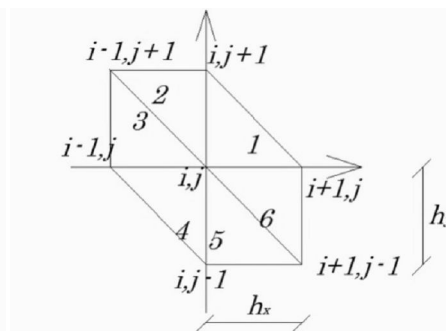


Рис. 2, б. Схема разбиения сечения на двумерные симплекс-элементы

При этом функционал (6) минимизируется на множестве функций сопрягаемых элементов, которые при линейной сплайн-аппроксимации на границах сопряжения элементов удовлетворяются автоматически.

Тогда для узла i, j получим $I = \sum I_i, i = 1, 2, \dots, 6,$

где
$$I_i = \iint_{A_i} \left\{ \frac{1}{2G(x, y)} \left[\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right)^2 \right] - 2\theta \Phi \right\} dx dy. \quad (7)$$

Аппроксимируем функцию напряжений Φ в каждом элементе линейным сплайном

$$\Phi_k = \alpha_{k1} + \alpha_{k2}x + \alpha_{k3}y, k = 1, 2, \dots, 6, \quad (8)$$

где $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \alpha_{k3}$ – выражаются через узловые значения функции напряжений Φ_{ij} .

Для первого элемента имеем:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \Phi_{ij} + \frac{x_i}{h_x} (\Phi_{ij} - \Phi_{i+1,j}) + \frac{y_j}{h_y} (\Phi_{ij} - \Phi_{i,j+1}); \\ \alpha_{12} &= \frac{1}{h_x} (\Phi_{i+1,j} - \Phi_{ij}) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \\ \alpha_{13} &= \frac{1}{h_y} (\Phi_{i,j+1} - \Phi_{ij}) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для четвертого элемента:

$$\begin{aligned} \alpha_{41} &= \Phi_{ij} + \frac{x_i}{h_x} (\Phi_{i-1,j} - \Phi_{i,j}) + \frac{y_j}{h_y} (\Phi_{i,j-1} - \Phi_{i,j}); \\ \alpha_{42} &= \frac{1}{h_x} (\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}); \\ \alpha_{43} &= \frac{1}{h_y} (\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для остальных элементов коэффициенты получаются перестановкой индексов.

Подставляя зависимости (8) в функционал, интегрируя и используя процедуру Ритца [7], получаем систему уравнений:

$$\Phi_{ij}^{n+1} = \frac{1}{A_j} \{ \Phi_{i,j+1}^n B_j + \Phi_{i-1,j}^n D_j + \Phi_{i,j+1}^{n-1} F_j + \Phi_{i+1,j}^{n-1} C_j - 4\theta \}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{1}{G_1} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) + \frac{1}{G_2 h_y^2} + \frac{1}{G_3 h_x^2} + \frac{1}{G_4} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) + \frac{1}{G_5 h_y^2} + \frac{1}{G_6 h_x^2}, \\ B_j &= \frac{1}{G_4 h_y^2} + \frac{1}{G_5 h_y^2}, C_j = \frac{1}{G_1 h_x^2} + \frac{1}{G_6 h_x^2}, D_j = \frac{1}{G_4 h_x^2} + \frac{1}{G_3 h_x^2}, F_j = \frac{1}{G_1 h_y^2} + \frac{1}{G_2 h_x^2}. \end{aligned}$$

Систему (11) решаем по методу итераций, проверяя условие:

$$\text{Max} |\Phi_{i,j}^s - \Phi_{i,j}^{s-1}| < \varepsilon, \quad (12)$$

где ε – заданная точность.

При этом найденное значение функции напряжений Φ позволяет вычислить составляющие касательного напряжения по формулам:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (13)$$

Соответственно касательное напряжение в произвольной точке сечения определится зависимостью:

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \quad (14)$$

и должно подчиняться условию:

$$\tau \leq \tau_T, \quad (15)$$

где τ_T – функция пористости.

На основании (15) корректируется пористость по сечению по схеме последовательных приближений.

В качестве примера рассмотрим брус прямоугольного поперечного сечения 10×5 см, выполненный из пористой стали. Разобьем его на 100 частей по большей стороне и на 50 по меньшей. Таким образом, $h_y = 0,001$ м и $h_x = 0,001$ м.

Для рационального распределения пористости изначально задаемся произвольной постоянной пористостью ($p = 0$), при этом $G = \text{const}$. Решая систему уравнений (11) для фиксированного относительного угла закручивания $\theta = 0,03$, получаем таблицу значений Φ_{ij} (рис. 3, а) и τ (рис. 3, б).

Достоверность полученного результата для сплошного материала ($p = 0$) подтверждается сравнением решения данной задачи с точными формулами теории упругости, где значение момента получилось равным 6,87 кНм (погрешность решения 0,21 %), значение касательных напряжений на большей стороне 111,7 МПа (погрешность решения 2,2 %) и значение касательных напряжений на меньшей стороне 88,8 МПа (погрешность решения 2,9 %).

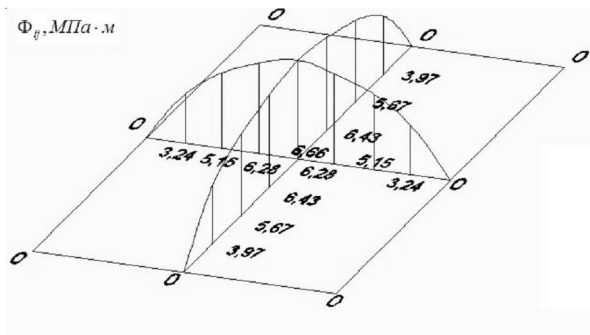


Рис. 3, а. Распределение значений функционала по поперечному сечению

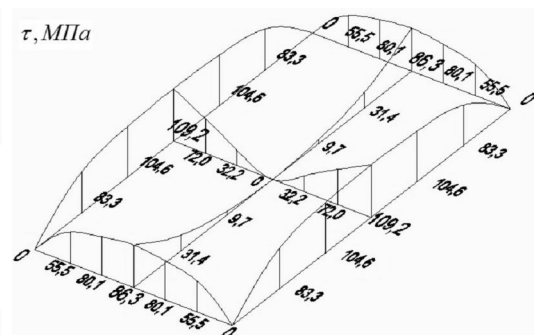


Рис. 3, б. Распределение значений касательных напряжений по поперечному сечению

По значениям касательных напряжений τ находим значения пористости p исходя из (3) в соответствии с условием (15) и ограничениями, задаваемыми техническими возможностями производства $0 < p < 0,4$.

Получив сетку значений распределения пористости p по поперечному сечению, находим поле значений модуля сдвига G по (1) во втором шаге и заново решаем задачу.

По известным значениям функционала Φ_{ij} вычисляем крутящий момент как:

$$M_{кр} = 2 \sum_{k=1}^N \Phi_{cp} h_x h_y, \quad (16)$$

где N – число сдвоенных элементов в сечении.

Процедуру последовательных шагов заканчиваем тогда, когда при заданном θ выполнится условие:

$$\left| \frac{M_{i+1} - M_i}{M_{i+1}} \right| \cdot 100\% < 0,5\% . \quad (17)$$

Результаты приближений сведем в таблицу 2.

Таблица 2

Результаты итерационных вычислений

| № приближения | Значение крутящего момента, кНм | Средняя пористость | Значение $\frac{M_i - M_{i-1}}{M_i}, \%$ |
|---------------|---------------------------------|--------------------|--|
| 0 | 6,8554 | 0 | – |
| 1 | 5,49278 | 0,15942 | 24,80747 |
| 2 | 4,93786 | 0,21006 | 11,23807 |
| 3 | 4,67816 | 0,2317 | 5,551328 |
| 4 | 4,5464 | 0,2424 | 2,898117 |
| 5 | 4,47284 | 0,2486 | 1,644593 |
| 6 | 4,43036 | 0,25214 | 0,958839 |
| 7 | 4,4045 | 0,25433 | 0,58127 |
| 8 | 4,38384 | 0,25623 | 0,47127 |

При оценке полученных результатов мы видим, что достигли необходимого значения на 8-м приближении.

Характерные значения окончательного рационального распределения пористости показаны на рисунке 4.

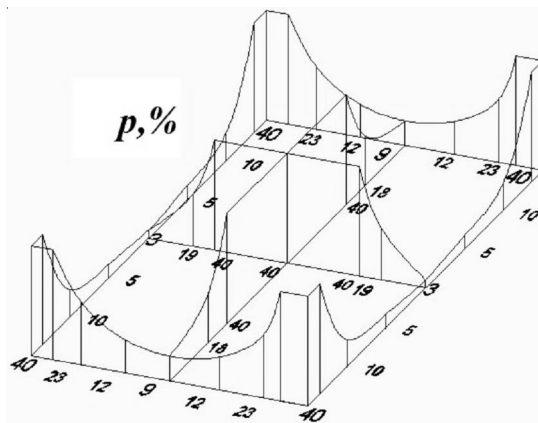


Рис. 4. Рациональное распределение пористости по поперечному сечению

При этом значения Φ_{ij} иллюстративно представлены на рисунке 5, а, а значения τ – на рисунке 5, б.

Таким образом, в зоне минимального уровня касательных напряжений (вблизи угловых точек и в центре) пористость выше, а в зоне максимального уровня касательных напряжений (в серединах сторон) – ниже некоторого среднего значения. Кроме того, значение крутящего момента для бруса с рационально подобранной пористостью по поперечному сечению ($M_{кр} = 2,19192$ кНм) на 31,3 % выше, чем для бруса со средней пористостью ($M_{кр} = 1,6700$ кНм), что свидетельствует о рационализации распределения пористости по поперечному сечению.

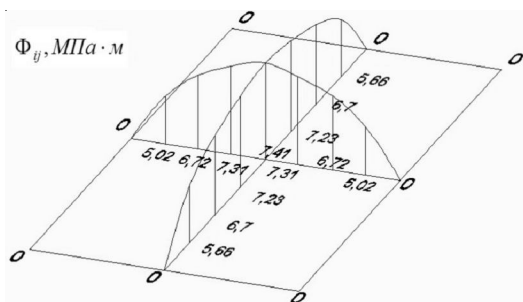


Рис. 5, а. Значения функционала, соответствующие рациональному распределению пористости

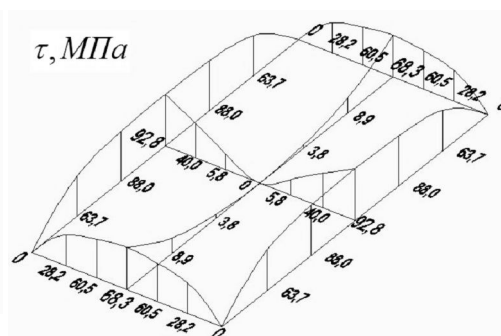


Рис. 5, б. Значения касательных напряжений, соответствующие рациональному распределению пористости

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белов, С. В. Пористые металлы в машиностроении / С. В. Белов. – М. : Машиностроение, 1981. – 247 с.
2. Бутарович, Д. О. Расчетное исследование механических свойств пеноалюминия / Д. О. Бутарович, А. А. Смирнов // Проектирование колесных машин : материалы Междунар. науч.-техн. конф., посвящ. 70-летию кафедры «Колесные машины» МГТУ им. Н.Э. Баумана. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.
3. Кашталян, Ю. А. Характеристики упругих материалов при высоких температурах / Ю. А. Кашталян. – Киев : Наукова думка, 1970. – 112 с.
4. Кингери, У. Д. Введение в керамику / У. Д. Кингери. – М. : Стройиздат, 1967. – 503 с.
5. Лурье, К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики / К. А. Лурье. – М. : Наука, 1975. – 478 с.
6. Рейтман, М. И. Методы оптимального проектирования деформируемых тел / М. И. Рейтман, Г. С. Шапиро. – М. : Наука, 1976. – 258 с.
7. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.

REFERENCES

1. Belov S.V. *Poristye metally v mashinostroyenii* [Porous Metals in Mechanical Engineering]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1981. 247 p.
2. Butarovich D.O., Smirnov A.A. Raschetnoe issledovanie mekhanicheskikh svoystv penoalyuminiya [Calculating Research of Mechanical Properties of Foam Aluminium]. *Materialy mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii "Proektirovanie kolesnykh mashin", posvyashchennoy 70-letiyu kafedry «Kolesnye mashiny» MGTU im. N.E. Baumana* [Materials of the International Scientific and Technical Conference "Design of Wheel Cars" Devoted to the 70 Anniversary of Wheel Cars Department of MSTU named after N.E. Bauman]. Moscow, Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2006.
3. Kashtalyan Yu.A. *Kharakteristiki uprugikh materialov pri vysokikh temperaturakh* [Characteristics of Elastic Materials at High Temperatures]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1970. 112 p.
4. Kingeri U.D. *Vvedenie v keramiku* [Introduction to Ceramics]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1967. 503 p.
5. Lurye K.A. *Optimalnoe upravlenie v zadachakh matematicheskoy fiziki* [Optimum Control in Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 478 p.
6. Reytman M.I., Shapiro G.S. *Metody optimalnogo projektirovaniya deformiruemykh tel* [Methods of Optimum Design of Deformable Bodies]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 258 p.
7. Segerlind L. *Primenenie metoda konechnykh elementov* [Application of a Method of Final Elements]. Moscow, Mir Publ., 1979. 392 p.

ABOUT RATIONAL DISTRIBUTION OF POROSITY AT TORSION OF THE BAR OF RECTANGULAR CROSS SECTION

Stanislav Mikhaylovich Shlyakhov

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Theory of Buildings and Engineering Constructions,
Saratov State Technical University named after Yu.A. Gagarin
mdt@sstu.ru
Politekhnicheskaya St., 77, 410054 Saratov, Russian Federation

Danila Yuryevich Gavrilo

Postgraduate Student, Department of Theory of Buildings and Engineering Constructions,
Saratov State Technical University named after Yu.A. Gagarin
gavrilovdy@rambler.ru
Politekhnicheskaya St., 77, 410054 Saratov, Russian Federation

Abstract. The article presents the issues of optimum design of structures by controlling material properties due to the level of porosity.

We consider the problem of pure torsion of a bar of rectangular cross section made of a material (steel) of a porous structure with variable cross-section porosity. We restrict ourselves to the case of elastic deformation, assuming that the maximum shear stress in the beam (τ_{\max}) does not exceed the fluidity limit of the material in shear (τ_f). It is known that the elastic characteristics of the material (module of shear G and the exertion of the fluidity start (σ_f)) are functions of the porosity of the material. Smoothing the experimental data for the porous of steel by the method of least squares, we obtain the dependence $G(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$.

Since the variable in the cross section of the porosity leads to inhomogeneous material properties, we use the theory of inhomogeneous torsion of beams with the introduction of the functions of exertions Φ . Boundary condition on the outer contour L for the function of exertions Φ will be equality of 0.

The solution of the boundary problem we replace by finding the minimum equivalent of functionality. For finding the minimum of the functional we use the method of finite elements. So we divide the cross section of the beam on rectangular triangles with sides, which are orientated to the coordinate x and y . We approximate the function of the exertions Φ in each element of the linear spline. For other elements, the coefficients turn out to be the permutation of indices.

Substituting the obtained dependence in the functional, integrating and using the Ritz procedure, we obtain the system of equations, which is solved by the method of successive iterations.

The found value of function of the exertions Φ allows to calculate the components of the shear stress and consequently the shear stress in arbitrary point of the section.

Based on the obtained values of shear stresses, porosity is corrected in the cross section according to the scheme of successive approximations.

For instance, we consider a beam of rectangular cross section of 10×5 cm, which is made of porous steel. We divide it into 100 pieces on the larger side and 50 on the smaller one.

The numerical solution confirms that the minimum level of tangential stresses (near the corner points and in the center) porosity is higher, and the maximum level of tangential stresses (in the middle of sides) is below a certain average. In addition, the meaning of rotational moment for beams with rationally chosen porosity on the cross section ($M_{\text{кр}} = 2,19192$ кНм) 31.3 % higher than for beams with average porosity ($M_{\text{кр}} = 1,6700$ кНм). That is the evidence on rationalization of the distribution of porosity in a cross section.

Key words: porosity, torsion, rectangle, rationality, bar, stress, shear modulus, functionality.