DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.4

УДК 517.5+514.174
ББК 22.15+22.16

МЕТРИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВА СЕМЕЙСТВ ТОЧЕК В $\mathbf{R}^n$ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Александр Юрьевич Игумнов

Кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры информационных технологий и математики,
Российский университет кооперации, Волгоградский филиал
IAJu1965@mail.ru
ул. Новосибирская, 76, 400002 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Семейством точек называется отображение отрезка натуральных чисел в пространство R^n. В работе вводится метризация пространства семейств точек. В терминах введенной метрики доказывается достаточный признак сохранения при квазиизометрическом отображении условия невырожденности треугольника, доказывается свойство максимальной удаленности равностороннего треугольника от вырожденных треугольников. Предлагается общая схема формулировки достаточных признаков сохранения каких-либо свойств семейств точек при квазиизометрическом отображении и общая схема доказательства таких признаков.

Ключевые слова: условие Делоне пустоты шара, квазиизометрические отображения, невырожденность треугольника, сетки.

Введение

Под семейством точек понимается пронумерованный набор точек в R^n. При толковании точек пространства как узлов некоторой сетки (решетки) вводимое в данной работе понятие расстояния может быть использовано как некая мера отличия исследуемой сетки от эталонной или в некотором смысле критической. Причем эта мера отличия может определяться через соответствующую меру отличия для элементов сетки — например, в случае тетраэдральной сетки — для отдельных ее тетраэдров, для пар смежных тетраэдров.

Предлагаемое понятие расстояния было получено в рамках решения задачи о сохранении условия пустоты шара при квазиизометрическом отображении. Для полноты изложения приведем необходимые определения и формулировки.

Понятие пустого шара было введено Б.Н. Делоне в статье [13], и для тетраэдральной решетки оно выглядит следующим образом: система тетраэдров удовлетворяет

© Игумнов А.Ю., 2016

условию пустоты шара, если для каждого тетраэдра системы шар, описанный вокруг этого тетраэдра, не содержит внутри себя вершин тетраэдров системы. Напомним определение квазиизометрического отображения.

Определение 1. *Пусть E — множество в R^n. Отображение $f : E \to \mathrm{R}^n$ называется квазиизометрическим, если при некоторых положительных числах l, L, $L \geq l$, выполнено условие*

$$\forall \quad x', x'' \in E \qquad l\,|x' - x''| \leq |f(x') - f(x'')| \leq L\,|x' - x''|. \tag{1}$$

Постановка задачи (задача была предложена профессором В.М. Миклюковым).

Пусть $\mathcal{T}$ — система тетраэдров в R^n вида $T = a_1 \ldots a_{n+1}$; $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ — отображение, удовлетворяющее условию вида (1); $\mathcal{T}_f$ — система тетраэдров вида $T_f = f(a_1) \ldots f(a_{n+1})$. Требуется определить условия на коэффициенты l, L выражения (1), обеспечивающие при указанном соответствии сохранение условия пустоты шара.

С применением понятия пустого шара в связи с построением сеток с нужными свойствами можно ознакомиться по работам [5; 9], а также по обзору [12]. Широкое применение в приложениях естественным образом влечет необходимость исследования свойств сеток с позиций общей математики. Классическим здесь является утверждение Альфорса о сохранении ориентации треугольника при квазиконформном отображении с определенными характеристиками [1]. Из недавних работ укажем [6–8; 10; 11].

Мера отличия элементов сетки от некоторых оговоренных в разных работах предлагается разная. Например, — для треугольных сеток, — в [8] мера отличия треугольника от равностороннего имеет вид функции от углов треугольника. В работе [9] аналогичная мера имеет вид

$$Q = \left(\frac{a+b}{c} - 1\right)\left(\frac{b+c}{a} - 1\right)\left(\frac{a+c}{b} - 1\right),$$

где a, b, c — длины сторон рассматриваемого треугольника.

В работах [2–4] были получены некоторые предварительные результаты касательно задачи о сохранении условия пустоты шара и введены в рассмотрение некоторые меры отличия элементов сетки от эталонных (не являющиеся метриками). Предлагаемое в данной работе понятие расстояния есть развитие результатов работ [2–4] касательно упомянутых мер отличия (точки пронумерованного набора могут быть вершинами треугольника или тетраэдра, вершинами пары смежных тетраэдров и т. д.). Метризация пространства семейств точек применяется к решению подзадачи сформулированной выше задачи, причем ее самого простого, двумерного, варианта: сохранение условия невырожденности треугольников сетки на плоскости при квазиизометрическом отображении. Такой выбор обусловлен относительно небольшим объемом требуемых выкладок сравнительно с многомерным вариантом той же подзадачи и сравнительно с двумерным вариантом указанной задачи (некоторое представление о трудоемкости можно составить, ознакомившись с общей схемой доказательства достаточных признаков сохранения свойств семейств при квазиизометрических отображениях). Как пример приложения введенной метрики к вопросам, не связанным непосредственно с задачей о сохранении условия пустоты шара, рассматриваются вычисление расстояния от треугольника до множества вырожденных треугольников и нахождение треугольника, максимально удаленного от вырожденных треугольников (равносторонний).

1. Семейства точек в $\mathbf{R}^n$

Пусть $I = \{1, \dots, k\}$ — отрезок натуральных чисел. Семейством k точек в R^n или k-точечным семейством будем называть отображение

$$F : I \to \mathrm{R}^n. \tag{2}$$

Отображение F будем также называть семейством, заданным на I. Табличное задание отображения F будем записывать как

$$F = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & & k \\ F(1) & F(2) & \cdots & F(k) \end{matrix} \right\}. \tag{3}$$

Отрезок в R^n, определяемый точками $F(i)$, $F(j)$, будем обозначать и называть отрезком $F(i)F(j)$ семейства F. Обозначим $F(I)$ — множество значений отображения F. Значения $F(1), \dots, F(k)$ будем называть точками семейства F, или значениями семейства F.

Пусть $f : F(I) \to \mathrm{R}^n$ — некоторое отображение. Определим стандартным образом композицию $f \circ F$ как семейство

$$f \circ F = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & & k \\ f(F(1)) & f(F(2)) & \cdots & f(F(k)) \end{matrix} \right\}.$$

Определение 2. *Пусть F, G — k-точечные семейства в R^n. Семейства F, G называются ортогонально эквивалентными, если существует ортогональное отображение $O : \mathrm{R}^n \to$ $\to \mathrm{R}^n$ такое, что*

$$G = O \circ F, \text{ то есть } G(i) = O(F(i)),\ i = 1, \dots, k.$$

Для k-точечных семейств F, G положим

$$\tilde{I} = \{(i, j) :\ 1 \le i < j \le k,\ |F(i)F(j)| + |G(i)G(j)| > 0\}$$

и определим отображение $\mathcal{A}(F, G) : \tilde{I} \to \mathrm{R}$ как

$$\mathcal{A}(F, G) : (i, j) \mapsto \frac{|F(i)F(j)|}{|G(i)G(j)|},$$

полагая $\dfrac{a}{0} = +\infty$ (здесь $a \neq 0$). То есть значения отображения $\mathcal{A}(F, G)$ — это набор отношений расстояний между одноименными парами точек семейств F, G за исключением отношений вида $\dfrac{0}{0}$.

Определим величину ρ следующим образом:

$$\rho(F, G) = \begin{cases} 0, \text{ если для всех } i, j \quad |F(i)F(j)| = 0 \text{ и } |G(i)G(j)| = 0; \\ \log \dfrac{\max \mathcal{A}(F, G)}{\min \mathcal{A}(F, G)}, \quad \text{иначе,} \end{cases} \tag{4}$$

зафиксировав в качестве основания логарифма некоторое число, большее единицы, и полагая $\dfrac{a}{0} = +\infty$, $\log(+\infty) = +\infty$.

Пример. Для семейств F и G, изображенных на рисунке 1, имеем (в подходящих единицах измерения):

$$|F(1)F(2)| = 12, \quad |F(1)F(3)| = 22, \quad |F(1)F(4)| = 20,$$

$$|F(2)F(3)| = 16, \quad |F(2)F(4)| = 21, \quad |F(3)F(4)| = 13,$$

$$|G(1)G(2)| = 20, \quad |G(1)G(3)| = 35, \quad |G(1)G(4)| = 13,$$

$$|G(2)G(3)| = 40, \quad |G(2)G(4)| = 18, \quad |G(3)G(4)| = 24.$$

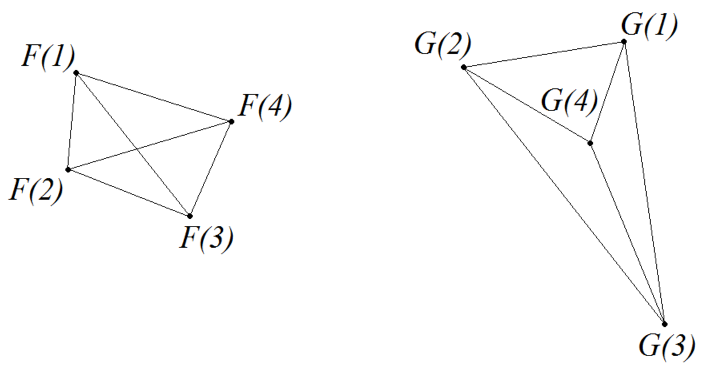

Рис. 1. Четырехточечные семейства F и G

Далее

$$\frac{|F(1)F(2)|}{|G(1)G(2)|} = \frac{12}{20}, \quad \frac{|F(1)F(3)|}{|G(1)G(3)|} = \frac{22}{35}, \quad \frac{|F(1)F(4)|}{|G(1)G(4)|} = \frac{20}{13},$$

$$\frac{|F(2)F(3)|}{|G(2)G(3)|} = \frac{16}{40}, \quad \frac{|F(2)F(4)|}{|G(2)G(4)|} = \frac{21}{18}, \quad \frac{|F(3)F(4)|}{|G(3)G(4)|} = \frac{13}{24};$$

$$\max\left\{\frac{|F(i)F(j)|}{|G(i)G(j)|},\ 1 \le i < j \le 4\right\} = \frac{|F(1)F(4)|}{|G(1)G(4)|} = \frac{20}{13},$$

$$\min\left\{\frac{|F(i)F(j)|}{|G(i)G(j)|},\ 1 \le i < j \le 4\right\} = \frac{|F(2)F(3)|}{|G(2)G(3)|} = \frac{16}{40};$$

$$\rho(F,G) = \log\frac{\left(\dfrac{20}{13}\right)}{\left(\dfrac{16}{40}\right)} = \log\frac{800}{208} \approx \log 3,85.$$

Свойства величины ρ.

Из соотношения (4) очевидным образом вытекают следующие свойства.

Свойство 1. $\rho(F,G) = 0$ тогда и только тогда, когда семейства F и G ортогонально эквивалентны.

Свойство 2. $\rho(F,G) = \rho(G,F)$.

Свойство 3. Для k-точечных семейств F, G, H выполнено:

$$\rho(F,H) \le \rho(F,G) + \rho(G,H).$$

Из свойств 1–3 следует, что через величину ρ можно определить расстояние между классами ортогонально эквивалентных семейств точек в R^n. А именно: если $\mathcal{O}_F$, $\mathcal{O}_G$ — классы ортогонально эквивалентных семейств точек в R^n, представителями которых являются семейства F, G, то величина

$$\tilde{\rho}(\mathcal{O}_F, \mathcal{O}_G) = \rho(F, G)$$

является расстоянием между классами $\mathcal{O}_F$, $\mathcal{O}_G$.

Далее величину (4) будем называть расстоянием (а также ρ-расстоянием) между семействами F, G; в зависимости от ситуации под обозначением F будем понимать как само семейство точек, так и класс $\mathcal{O}_F$, то же для G.

Отметим также следующие свойства величины ρ.

Пусть F, G — k-точечные семейства. Если для некоторых значений i, j, $i \neq j$, выполнено

$$|F(i)F(j)| = 0,\ |G(i)G(j)| \neq 0$$

или

$$|F(i)F(j)| \neq 0,\ |G(i)G(j)| = 0,$$

то $\rho(F, G) = \infty$. И обратно: если $\rho(F, G) = \infty$, то $|F(i)F(j)| = 0$, $|G(i)G(j)| \neq 0$ или $|F(i)F(j)| \neq 0$, $|G(i)G(j)| = 0$.

Пусть F, G — k-точечные семейства. Для любого ортогонального преобразования O выполнено:

$$\rho(O \circ F, G) = \rho(F, G). \tag{5}$$

Для любых ортогональных преобразований O', O'' выполнено:

$$\rho(O' \circ F, O'' \circ G) = \rho(F, G).$$

Следующее очевидно.

Множество двухточечных семейств с метрикой ρ является дискретным метрическим пространством. А именно: для любых семейств F, G либо $\rho(F, G) = 0$, либо $\rho(F, G) = \infty$ (последнее в случае если $|F(1)F(2)| = 0$, $|G(1)G(2)| \neq 0$ либо наоборот).

На множестве k-точечных семейств, где $k > 2$, метрика ρ непрерывна в следующем смысле. Малым, в евклидовой метрике, смещениям точек — значений семейств F, G — отвечает малое изменение значения $\rho(F, G)$.

Отметим, что величина (4) имеет простой геометрический смысл: это евклидова длина отрезка

$$[\min \mathcal{A}(F, G), \max \mathcal{A}(F, G)], \tag{6}$$

отложенного на логарифмической шкале (полагая $\log 0 = -\infty$).

Если $\mathcal{U}$ — множество k-точечных семейств, то расстояние от семейства F до множества $\mathcal{U}$ определим обычным образом:

$$\rho(F, \mathcal{U}) = \inf_{U \in \mathcal{U}} \rho(F, U). \tag{7}$$

Полагаем $\rho(F, \emptyset) = \infty$ для любого семейства F.

2. Смещение семейства под действием квазиизометрического отображения

Оценим ρ-расстояние, на которое смещается k-точечное семейство F под действием квазиизометрического отображения, то есть оценим величину $\rho(F, f \circ F)$. Заметим, что в случае изометрического отображения f оценка тривиальна — расстояние равно нулю.

Теорема 1. *Пусть $I = \{1, \ldots, k\}$, где $k \geq 2$, и $F : I \to \mathrm{R}^n$ — семейство точек, имеющее хотя бы два различных значения. Пусть $f : F(I) \to \mathrm{R}^n$ — отображение, удовлетворяющее условию вида (1).*
Тогда

$$\rho(F, f \circ F) \leq \log \frac{L}{l}. \tag{8}$$

Доказательство. Заметим, что если $F(i) \neq F(j)$ при $i \neq j$, то $f \circ F(i) \neq f \circ F(j)$; и обратно, если $f \circ F(i) \neq f \circ F(j)$ при $i \neq j$, то $F(i) \neq F(j)$. С учетом этого из определения величины ρ выводим, что при доказательстве теоремы можно исключить из рассмотрения пары индексов i, j, $i \neq j$, для которых $F(i) = F(j)$. Во избежание громоздкости выкладок будем полагать, что таких пар нет изначально; то есть

$$F(i) \neq F(j) \text{ при } i \neq j, \quad i, j \in I.$$

Пусть $k = 2$. Тогда $\rho(F, f \circ F) = 0$ и заключение теоремы, очевидно, выполнено.

Пусть $k \geq 3$. Полагаем

$$F = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ a_1 & a_2 & & a_k \end{Bmatrix}.$$

Из условия (1) имеем

$$l \leq \frac{|f(a_i) - f(a_j)|}{|a_i - a_j|} \leq L, \ 1 \leq i < j \leq k.$$

То есть

$$\max \left\{ \frac{|f(a_i) - f(a_j)|}{|a_i - a_j|}, \ 1 \leq i < j \leq k \right\} \leq L,$$

$$\min \left\{ \frac{|f(a_i) - f(a_j)|}{|a_i - a_j|}, \ 1 \leq i < j \leq k \right\} \geq l$$

и

$$\frac{\max \left\{ \frac{|f(a_i) - f(a_j)|}{|a_i - a_j|}, \ 1 \leq i < j \leq k \right\}}{\min \left\{ \frac{|f(a_i) - f(a_j)|}{|a_i - a_j|}, \ 1 \leq i < j \leq k \right\}} \leq \frac{L}{l}.$$

Из определения величины ρ получаем требуемое.

Из теоремы 1 выводим очевидное следствие.

Теорема 2. *Пусть F — k-точечное семейство в R^n, $f : F(I) \to \mathrm{R}^n$ — отображение, удовлетворяющее условию (1); $\mathcal{Z}$ — некоторое множество k-точечных семейств.*

Тогда, если $F \notin \mathcal{Z}$ и

$$\log \frac{L}{l} < \rho(F, \mathcal{Z}),$$

то

$$f \circ F \notin \mathcal{Z}.$$

Формулировку теоремы 2 можно рассматривать как шаблон для формулировки различного рода теорем о сохранении при квазиизометрическом отображении некоторого свойства семейства точек или совокупности семейств точек ($\mathcal{Z}$ — это множество семейств, рассматриваемым свойством не обладающих). Содержательная часть этих теорем определяется конкретикой множества $\mathcal{Z}$ и числовым значением величины $\rho(F, \mathcal{Z})$.

3. Общая схема исследования

Дадим общее описание схемы исследования некоторого множества семейств точек на предмет вычисления расстояния от некоторого заданного семейства до этого множества.

Пусть $\mathcal{Z}$ — некоторое множество семейств вида $Z : I \to \mathrm{R}^n$. Всякое семейство $X : I \to \mathrm{R}^n$ такое, что $X(i) \neq X(j)$ при $i \neq j$, задает разбиение множества $\mathcal{Z}$ на подмножества $\mathcal{Z}_p^q(X)$ (некоторые из них могут быть пустыми), определяемые следующим образом: $Z \in \mathcal{Z}_p^q(X)$ тогда и только тогда, когда отображение $\mathcal{A}(X, Z)$ имеет ровно p минимальных значений и ровно q максимальных значений. Тогда, очевидно,

$$\rho(X, \mathcal{Z}) = \min \rho(X, \mathcal{Z}_p^q(X)),$$

где минимум берется по всем допустимым сочетаниям значений p и q. Далее каждое из множеств $\mathcal{Z}_p^q(X)$ исследуется на предмет выявления в нем семейств, заведомо не являющихся ближайшими к семейству X. Обозначив множество, составляемое такими семействами, как $\mathcal{Z}'$ (сразу для всех p, q), имеем:

$$\rho(X, \mathcal{Z}) = \rho(X, \mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}').$$

При благоприятных обстоятельствах (например, если множество $\mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}'$ конечно и количество его элементов практически приемлемо для подсчета расстояний от X до каждого из семейств этого множества) величина $\rho(X, \mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}')$ может быть вычислена явно. Легко видеть, что описанная схема представляет собой обобщение схемы исследования на экстремум гладкой (кусочно-гладкой) функции вида $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$.

4. Исследование множества планарных трехточечных семейств

Семейство $F : \{1, 2, 3\} \to \mathrm{R}^2$ называется планарным, если его значения расположены на одной прямой.

Обозначим $\mathfrak{P}$ — множество планарных семейств вида $F : \{1, 2, 3\} \to \mathrm{R}^2$. Пусть X — трехточечное семейство в R^2, такое что $X(i) \neq X(j)$ при $i \neq j$. Имеем:

$$\mathfrak{P} = \mathcal{Z}_1^1(X) \cup \mathcal{Z}_1^2(X) \cup \mathcal{Z}_2^1(X) \cup \mathcal{Z}_3^3(X). \tag{9}$$

Поскольку для семейства F, в котором хотя бы два значения совпадают, $\rho(F, X) = \infty$, то такие семейства можно исключить из рассмотрения. В этом случае величина $\rho(F, X)$ наглядно может быть представлена как длина отрезка вида (6). Исследование множеств $\mathcal{Z}_p^q(X)$ сводится к определению возможности уменьшить длину отрезка (6) посредством каких-либо преобразований семейств, составляющих это множество (вариацией значений семейства, определяющих концы отрезка (6)).

Наряду с множествами $\mathcal{Z}_i^j(X)$ введем в рассмотрение следующие определяемые семейством X множества планарных семейств. Везде далее, если при обозначении множества обозначение семейства X не указано, то оно подразумевается.

Пусть

$$X = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ X(1) & X(2) & X(3) \end{matrix} \right\} -$$

семейство точек на плоскости, $X(i) \neq X(j)$ при $i \neq j$.
Полагая $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ и попарно различными, определим множества

$$\mathcal{P}_{ijk}(X), \quad \mathcal{P}'_{ijk}(X), \quad \mathcal{P}''_{ijk}(X)$$

планарных 3-точечных семейств Y следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ijk}(X) &= \Bigg\{ Y = \left\{ \begin{matrix} i & j & k \\ Y(i) & Y(j) & Y(k) \end{matrix} \right\} : \quad Y(i) = X(i), \quad Y(j) = X(j), \\ & \frac{|Y(i)Y(k)|}{|Y(j)Y(k)|} = \frac{|X(i)X(k)|}{|X(j)X(k)|}, \\ & \text{точка } Y(k) \text{ лежит на прямой } Y(i)Y(j) \Bigg\}, \\ \mathcal{P}'_{ijk}(X) &= \{ Y \in \mathcal{P}_{ijk}(X) : \text{точка } Y(k) \text{ расположена вне отрезка } Y(i)Y(j) \}, \\ \mathcal{P}''_{ijk}(X) &= \{ Y \in \mathcal{P}_{ijk}(X) : \text{точка } Y(k) \text{ расположена внутри отрезка } Y(i)Y(j) \}. \end{aligned}$$

Поясним здесь, что при фиксированных точках $X(i)$ (она же $Y(i)$) и $X(j)$ (она же $Y(j)$) и фиксированной точке $X(k)$ множество точек y, удовлетворяющих условию

$$\frac{|Y(i)y|}{|Y(j)y|} = \frac{|X(i)X(k)|}{|X(j)X(k)|},$$

представляет собой окружность равных отношений, определяемую точками $X(i)$, $X(k)$ и числом $q = \dfrac{|X(i)X(k)|}{|X(j)X(k)|}$ (рис. 2).
Из определения множеств $\mathcal{P}_{ijk}(X)$, $\mathcal{P}'_{ijk}(X)$, $\mathcal{P}''_{ijk}(X)$ выводим:

$$\mathcal{P}_{ijk} = \mathcal{P}_{jik}, \quad \mathcal{P}'_{ijk} = \mathcal{P}'_{jik}, \quad \mathcal{P}''_{ijk} = \mathcal{P}''_{jik}; \tag{10}$$

множество $\mathcal{P}'_{ijk}$ содержит не более одного семейства; множество $\mathcal{P}''_{ijk}$ содержит ровно одно семейство.
Очевидно,

$$\mathcal{P}_{ijk} = \mathcal{P}'_{ijk} \bigcup \mathcal{P}''_{ijk}, \quad \mathcal{P}'_{ijk} \bigcap \mathcal{P}''_{ijk} = \emptyset.$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'(X) &= \bigcup_{i,j,k} \mathcal{P}'_{ijk}(X), \\ \mathcal{P}''(X) &= \bigcup_{i,j,k} \mathcal{P}''_{ijk}(X), \\ \mathcal{P}(X) &= \bigcup_{i,j,k} \mathcal{P}_{ijk}(X). \end{aligned}$$

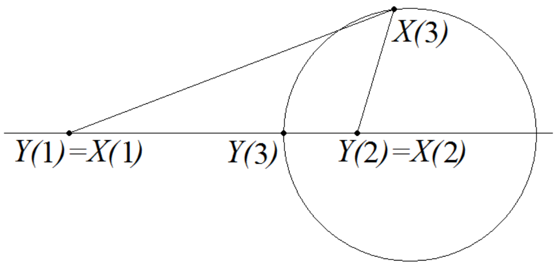

Рис. 2. Пример семейства $Y \in \mathcal{P}''_{123}(X)$

Очевидно,

$$\mathcal{P}'(X) \cap \mathcal{P}''(X) = \emptyset \quad \text{и} \quad \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}'(X) \cup \mathcal{P}''(X).$$

Опуская объемные, но элементарные выкладки, сформулируем результат. Для семейства X, где $X(i) \neq X(j)$ при $i \neq j$, выполнено:

$$\rho(X, \mathfrak{P}) = \rho(X, \mathcal{P}''(X)). \tag{11}$$

5. Вычисление расстояния до планарных трехточечных семейств

Приведем, опуская некоторые подробности, выкладки по вычислению величины $\rho(X, \mathfrak{P})$, где X — семейство, значениями которого являются вершины невырожденного треугольника.

Имеем:

$$\mathcal{P}'' = \bigcup_{i,j,k} \mathcal{P}''_{ijk} = \mathcal{P}''_{123} \cup \mathcal{P}''_{231} \cup \mathcal{P}''_{132}.$$

Пусть значения семейства

$$X = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ A & B & C \end{Bmatrix}$$

являются вершинами невырожденного треугольника с длинами сторон

$$|BC| = a, \quad |AC| = b, \quad |AB| = c$$

(рис. 3).

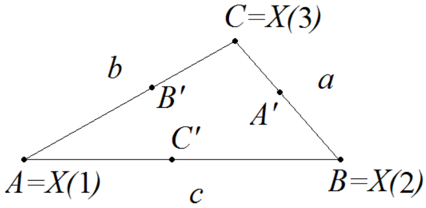

Рис. 3. Вычисление расстояния

Имеем:

$$\mathcal{P}''_{123}(X) = \left\{ Y = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ A & B & C' \end{Bmatrix} \right\},$$

где C' принадлежит отрезку AB и $\dfrac{|AC'|}{|BC'|} = \dfrac{|AC|}{|BC|}$, то есть

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{|AC'|}{|BC'|} & = & \dfrac{b}{a} \\ |AC'| + |BC'| & = & c \end{array} \right. . \tag{12}$$

Далее

$$\mathcal{P}''_{231}(X) = \left\{ Y = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ A' & B & C \end{matrix} \right\} \right\},$$

где A' принадлежит отрезку BC и $\dfrac{|BA'|}{|CA'|} = \dfrac{|BA|}{|CA|}$, то есть

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{|BA'|}{|CA'|} & = & \dfrac{b}{a} \\ |BA'| + |CA'| & = & a \end{array} \right. \tag{13}$$

и

$$\mathcal{P}''_{132}(X) = \left\{ Y = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ A & B' & C \end{matrix} \right\} \right\},$$

где B' принадлежит отрезку AC и $\dfrac{|AB'|}{|CB'|} = \dfrac{|AB|}{|CB|}$, то есть

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{|AB'|}{|CB'|} & = & \dfrac{b}{a} \\ |AB'| + |CB'| & = & b \end{array} \right. . \tag{14}$$

Решения систем (12), (13), (14) соответственно:

$$|BC'| = \frac{a}{a+b} \cdot c, \quad |AC'| = \frac{b}{a+b} \cdot c;$$

$$|CA'| = \frac{b}{b+c} \cdot a, \quad |AC'| = \frac{c}{b+c} \cdot a;$$

$$|CB'| = \frac{a}{a+c} \cdot b, \quad |AB'| = \frac{c}{a+c} \cdot b.$$

Обозначим

$$Y_{123} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ A & B & C' \end{matrix} \right\}, \quad Y_{231} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ A' & B & C \end{matrix} \right\}, \quad Y_{132} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ A & B' & C \end{matrix} \right\}$$

$(Y_{ijk} \in \mathcal{P}''_{ijk})$.
Имеем:

$$\rho(X, Y_{123}) = \log \frac{\max\left\{ \dfrac{|AB|}{|AB|}, \dfrac{|AC|}{|AC'|}, \dfrac{|BC|}{|BC'|} \right\}}{\min\left\{ \dfrac{|AB|}{|AB|}, \dfrac{|AC|}{|AC'|}, \dfrac{|BC|}{|BC'|} \right\}} = \log \frac{\max\left\{ 1, \dfrac{a+b}{c} \right\}}{\min\left\{ 1, \dfrac{a+b}{c} \right\}}.$$

Поскольку числа a, b, c являются длинами сторон невырожденного треугольника, то есть $\dfrac{a+b}{c} > 1$, то

$$\rho(X, Y_{123}) = \log\frac{a+b}{c}.$$

Далее

$$\rho(X, Y_{231}) = \log\frac{\max\left\{\dfrac{|AB|}{|A'B|}, \dfrac{|AC|}{|A'C|}, \dfrac{|BC|}{|BC|}\right\}}{\min\left\{\dfrac{|AB|}{|A'B|}, \dfrac{|AC|}{|A'C|}, \dfrac{|BC|}{|BC|}\right\}} = \log\frac{\max\left\{\dfrac{b+c}{a}, 1\right\}}{\min\left\{\dfrac{b+c}{a}, 1\right\}} = \log\frac{b+c}{a}.$$

Наконец,

$$\rho(X, Y_{132}) = \log\frac{\max\left\{\dfrac{|AB|}{|AB'|}, \dfrac{|AC|}{|AC|}, \dfrac{|BC|}{|B'C|}\right\}}{\min\left\{\dfrac{|AB|}{|AB'|}, \dfrac{|AC|}{|AC|}, \dfrac{|BC|}{|B'C|}\right\}} = \log\frac{\max\left\{\dfrac{a+c}{b}, 1\right\}}{\min\left\{\dfrac{a+c}{b}, 1\right\}} = \log\frac{a+c}{b}.$$

Окончательно получаем:

$$\rho(X, \mathfrak{P}) = \min\left\{\log\frac{a+b}{c}, \quad \log\frac{b+c}{a}, \quad \log\frac{a+c}{b}\right\} \tag{15}$$

или

$$\rho(X, \mathfrak{P}) = \log\min\left\{\frac{a+b}{c}, \quad \frac{b+c}{a}, \quad \frac{a+c}{b}\right\}.$$

6. Теорема о равностороннем треугольнике

Здесь и далее словом «треугольник» будем обозначать как множество точек на плоскости, определяемое этим термином в элементарной геометрии, так и трехточечное семейство.

На основании результатов разделов 4–5 несложно показать, что равносторонний треугольник является наиболее ρ-удаленным от множества вырожденных треугольников (то есть планарных семейств).

Теорема 3. *Пусть X — трехточечное семейство в R^2, $X(i) \neq X(j)$ при $i \neq j$. Тогда:*

1) $\rho(X, \mathfrak{P}) \leq \log 2$;

2) $\rho(X, \mathfrak{P}) = \log 2$ тогда и только тогда, когда значения семейства X являются вершинами равностороннего треугольника.

Доказательство. 1) Пусть для некоторого семейства X с длинами отрезков a, b, c выполнено неравенство

$$\rho(X, \mathfrak{P}) > \log 2.$$

Из представления (15) имеем систему неравенств

$$\begin{cases} (a+b)/c & > & 2 \\ (b+c)/a & > & 2 \\ (a+c)/c & > & 2 \end{cases}$$

и далее

$$\begin{cases} a+b > 2c \\ b+c > 2a \\ a+c > 2b \end{cases}.$$

Складывая неравенства последней системы, имеем:

$$2(a+b+c) > 2(a+b+c).$$

Полученное противоречие доказывает утверждение.
2) Пусть

$$\rho(X, \mathfrak{P}) = \log 2. \tag{16}$$

Из (15) и (16) очевидно следует

$$\begin{cases} (a+b)/c \geq 2 \\ (b+c)/a \geq 2 \\ (a+c)/c \geq 2 \end{cases}. \tag{17}$$

Повторяя преобразования, изложенные в п. 1, получим:

$$2(a+b+c) \geq 2(a+b+c). \tag{18}$$

При этом, если хотя бы одно из соотношений системы (17) отлично от равенства (то есть в соотношении стоит знак «$>$»), то соотношение (18) принимает вид противоречивого неравенства

$$2(a+b+c) > 2(a+b+c).$$

Следовательно, система (17) имеет вид

$$\begin{cases} (a+b)/c = 2 \\ (b+c)/a = 2 \\ (a+c)/c = 2 \end{cases}$$

и далее

$$\begin{cases} a+b = 2c \\ b+c = 2a \\ a+c = 2b \end{cases}. \tag{19}$$

Из первого и второго равенств системы (19) выводим

$$a - c = 2(c-a),$$

$$a = c.$$

Из последнего равенства и третьего равенства в (19) имеем

$$b = c.$$

Таким образом, из равенства (16) следует

$$a = b = c.$$

Выполнение обратного утверждения очевидно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альфорс, Л. Лекции о квазиконформных отображениях / Л. Альфорс. — М. : Мир, 1969. — 154 с.

2. Игумнов, А. Ю. О системах тетраэдров, удовлетворяющих условию пустоты шара / А. Ю. Игумнов // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2008. — Вып. 3. — С. 106–116.

3. Игумнов, А. Ю. Об отображениях, сохраняющих условие пустоты сферы / А. Ю. Игумнов // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2007. — Вып. 2. — С. 198–206.

4. Игумнов, А. Ю. Характеристика степени невырожденности треугольника / А. Ю. Игумнов // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2009. — Вып. 4. — С. 207–219.

5. Карабцев, С. Н. Построение диаграммы Вороного и определение границ области в методе естественных соседей / С. Н. Карабцев, С. В. Стуколов // Вычислительные технологии. — 2010. — Т. 13, № 3. — С. 65–80.

6. Клячин, В. А. О гомеоморфизмах, сохраняющих триангуляцию / В. А. Клячин // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2009. — Вып. 4. — С. 169–182.

7. Клячин, В. А. Об одном обобщении условия Делоне / В. А. Клячин // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2007. — Вып. 2. — С. 102–107.

8. Клячин, В. А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и ее аппроксимационные свойства / В. А. Клячин, А. А. Широкий // Изв. вузов. Математика. — 2012. — № 1. — С. 31–39.

9. Лебедев, А. С. Построение неструктурированных треугольных сеток с почти правильными ячейками / А. С. Лебедев // Вычислительные технологии. — 2010. — Т. 15, № 1. — С. 85–97.

10. Миклюков, В. М. Введение в негладкий анализ / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2008. — 424 с.

11. Миклюков, В. М. Некоторые задачи, возникающие в проблеме триангуляции пограничного слоя / В. М. Миклюков // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2006. — Вып. 1. — С. 154–162.

12. Неструктурированные адаптивные сетки для задач математической физики (обзор) / Л. В. Круглякова, А. В. Неледова, В. Ф. Тишкин, А. Ю. Филатов // Математическое моделирование. — 1998. — Т. 10, № 3. — С. 93–116.

13. Delaunay, B. Sur la sphère vide. A la mémoire de Georges Voronoï / B. Delaunay // Известия академии наук СССР. — 1934. — № 6. — С. 793–800.

REFERENCES

1. Alfors L. *Lektsii o kvazikonformnykh otobrazheniyakh* [Lectures on Quasiconformal Mappings]. Moscow, Mir Publ., 1969. 154 p.

2. Igumnov A.Yu. O sistemakh tetraedrov, udovletvoryayushchikh usloviyu pustoty shara [About Tetrahedra Systems Satisfying Empty Bowl]. *Zapiski seminara «Sverkhmedlennye protsessy»*. Volgograd, VolSU Publ., 2008, iss. 3, pp. 106-116.

3. Igumnov A.Yu. Ob otobrazheniyakh, sokhranyayushchikh uslovie pustoty sfery [Mappings That Preserve the Condition of the Sphere of Emptiness]. *Zapiski seminara «Sverkhmedlennye protsessy»*. Volgograd, VolSU Publ., 2007, iss. 2, pp. 198-206.

4. Igumnov A.Yu. Kharakteristika stepeni nevyrozhdennosti treugolnika [Feature Degree Triangle Nondegeneracy]. *Zapiski seminara «Sverkhmedlennye protsessy»*. Volgograd, VolSU Publ., 2009, iss. 4, pp. 207-219.

5. Karabtsev S.N., Stukolov S.V. Postroenie diagrammy Voronogo i opredelenie granits oblasti v metode estestvennykh sosedey [Voronoi Diagrams and Definition of the Field in the Method of Natural Boundaries Neighbors]. *Vychislitelnye tekhnologii.* [Computational technologies], 2010, vol. 13, no. 3, pp. 65-80.

6. Klyachin V.A. O gomeomorfizmakh, sokhranyayushchikh triangulyatsiyu [On Homomorphisms Preserving Triangulation]. *Zapiski seminara «Sverkhmedlennye protsessy».* Volgograd, VolSU Publ., 2009, iss. 4, pp. 169-182.

7. Klyachin V.A. Ob odnom obobshchenii usloviya Delone [A Generalization of the Delaunay Condition]. *Zapiski seminara «Sverkhmedlennye protsessy».* Volgograd, VolSU Publ., 2007, iss. 2, pp. 102-107.

8. Klyachin V.A., Shirokiy A.A. Triangulyatsiya Delone mnogomernykh poverkhnostey i ee approksimatsionnye svoystva [Delaunay Triangulation of Multidimensional Surfaces and Its Approximation Properties]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2012, no. 1, pp. 31-39.

9. Lebedev A.S. Postroenie nestrukturirovannykh treugolnykh setok s pochti pravilnymi yacheykami [Construction of Unstructured Triangular Grids with Almost Correct Cells]. *Vychislitelnye tekhnologii.* [Computational technologies], 2010, vol. 15, no. 1, pp. 85-97.

10. Miklyukov V.M. *Vvedenie v negladkiy analiz* [Introduction to Non-Smooth Analysis]. Volgograd, VolSU Publ., 2008. 424 p.

11. Miklyukov V.M. Nekotorye zadachi, voznikayushchie v probleme triangulyatsii pogranichnogo sloya [Some of the Problems Arising in the Problem of Triangulation Boundary Layer]. *Zapiski seminara «Sverkhmedlennye protsessy».* Volgograd, VolSU Publ., 2006, iss. 1, pp. 154-162.

12. Kruglyakova L.V., Neledova A.V., Tishkin V.F., Filatov A.Yu. Nestrukturirovannye adaptivnye setki dlya zadach matematicheskoy fiziki (obzor) [Unstructured Adaptive Grids for Mathematical Physics Problems (Review)]. *Matematicheskoe modelirovanie.* [Mathematical Models and Computer Simulations], 1998, vol. 10, no. 3, pp. 93-116.

13. Delaunay B. Sur la sphère vide. A la mémoire de Georges Voronoï. *Izvestiya akademii nauk SSSR* [Izvestiya: Mathematics], 1934, no. 6, pp. 793-800.

METRIZATION OF SPACE OF POINTS FAMILIES IN R^n AND ADJOINING QUESTIONS

Alexander Yuryevich Igumnov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Lecturer,
Department of Information Technology and Mathematics,
Russian University of Cooperation, Volgograd Branch
IAJu1965@mail.ru
Novosibirskaya St., 76, 400002 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In the work we introduced the concept of a family of points in R^n and metrization of space of points families.

Under the family we understood the points numbered set of points in R^n. In the interpretation of points in space as the nodes of a grid (lattice) introduced in this paper, the concept of distance can be used as a kind of measure of the differences between the test grid of reference or in some critical sense. Moreover, this measure of the difference can be determined through measure differences corresponding to the grid elements — for example, in the case of tetrahedral mesh — for its individual tetrahedrons adjacent, for couples tetrahedra.

A family of k points (k-point family) is a function $F : \{1, \ldots, k\} \to \mathrm{R}^n$. We define the distance $\rho(F, G)$ between the families F and G as the logarithm

of some expression that contains the Euclidean distance $|F(i)F(j)|$, $|G(i)G(j)|$. Distance ρ is invariant relatively orthogonal mapping: $\rho(O \circ F, G) = \rho(F, G)$ for any orthogonal mapping $O : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$. We give an estimate of the distance that moves the family F under the action of quasi-isometric mapping f: $\rho(F, f \circ F) \leq \leq \log \frac{L}{l}$, where l is minimum distortion mapping f, L is maximum distortion mapping f. Next, we prove the following sufficient sign of preservation any properties of families of points at quasi-isometric mapping:

Theorem 2. *Let F is k-point family in R^n, $f : F(I) \to \mathrm{R}^n$ is quasi-isometric mapping; $\mathcal{Z}$ — a set of k-point families. If $F \notin \mathcal{Z}$ and*

$$\log \frac{L}{l} < \rho(F, \mathcal{Z}),$$

then

$$f \circ F \notin \mathcal{Z}.$$

($\mathcal{Z}$ is a set of families without the considered property).

Also we provide a general scheme of finding the value $\rho(F, \mathcal{Z})$. For example, we explore the three-point families. We calculated distance from the arbitrary triangle to set of degenerate triangles. Also we prove that the most remote from set of degenerate triangles is an equilateral triangle, and calculated the corresponding distance. It is equal to $\log 2$.

Key words: Delaunay's condition of empty ball, quasiisometric mapping, triangle nondegeneracy, meshes.