УДК 517.95
ББК 22.161.6

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ ДЛЯ ФИНСЛЕРОВОЙ МЕТРИКИ [1]

Е.Г. Григорьева

Результаты исследований качественного поведения решений уравнений в частных производных нередко формулируются в терминах основной частоты — первого собственного числа дифференциального оператора (см.: [1; 2; 6]).
В настоящей работе доказываются оценки основной частоты открытых множеств в финслеровой метрике. Полученные результаты обобщают аналогичные оценки Яу [6] и Чигера [5].

Ключевые слова: *основная частота, собственные числа оператора, финслерова метрика, неравенство Чигера, формула коплощади.*

Пусть в области $D \subset R^n$ задана непрерывно дифференцируемая, неотрицательная функция $\Phi(x, \xi)$, удовлетворяющая условиям:

1.$\forall \xi \in R^n, \alpha > 0 \quad \Phi(x, \alpha\xi) = \alpha\Phi(x, \xi)$.

2. $\Phi(x, \xi)$ выпукла по переменной ξ.

3. Для любого $x \in D$ множества $\Xi(x) = \{\xi \in R^n : \Phi(x, \xi) \leq 1\}$ локально равномерно ограничены.

Определим двойственную к функции $\Phi(x, \xi)$ функцию

$$H(x, \eta) = \sup_{\xi \in \Xi(x)} \langle \xi, \eta \rangle = \sup_{\xi \neq 0} \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{\Phi(x, \xi)}.$$

Ясно, что функция $H(x, \eta)$ является однородной степени 1 по переменной η. Введем финслерову метрику $d(x, y)$, полагая

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} \int\limits_{\gamma} H(x, dx), \qquad \forall x, y \in D,$$

где точная нижняя грань берется по всем локально спрямляемым кривым $\gamma \in D$, соединяющим точки x, y (см.: [3]). Область D с определенной так финслеровой метрикой будем называть *финслеровым пространством*.

Рассмотрим иллюстрирующий пример. Предположим, что в области $D \subset \mathbf{R}^n$ задана положительно определенная квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$ и определим функцию Φ посредством равенства

$$\Phi(x,\xi)=\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\right)^{1/2}.$$

Так определенная функция $\Phi(x,\xi)$ удовлетворяет условиям (1)–(3). Метрика d, заданная равенством

$$d(x,y)=\inf\int_{\gamma}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)dx_idx_j},$$

где $a^{ij}(x)$ — элементы обратной матрицы к матрице $||a_{ij}(x)||$, совпадает с обычной римановой метрикой в области D.

Пусть $h(x):D\to R, 0<h(x)<+\infty, \nabla h\neq 0$ — функция исчерпания области D. Введем множества

$$D(t)=\{x\in D: h(x)<t\},\quad \Sigma(t)=\{x\in D: h(x)=t\}.$$

Определим основную частоту множества $\Sigma(t)$ по формуле

$$\lambda_p(\Sigma)=\inf_{\varphi(x)\in C_0^1(\Sigma(t))}\frac{\int_{\Sigma(t)}\frac{\Phi^p(x,\nabla_\Sigma\varphi(x))}{|\nabla h(x)|}dH_{n-1}}{\int_{\Sigma(t)}\varphi^p(x)|\nabla h(x)|dH_{n-1}}, p>1.$$

Заметим, что для области в R^n и функции $\Phi(x,\xi)=|\xi|$ основная частота имеет конкретный физический смысл и достаточно хорошо изучена (см., напр., работы: [1; 2; 6] и др.).

Будем рассматривать оператор

$$L[f]=\operatorname{div}(A(x,\nabla_\xi\Phi^2(x,\nabla f(x))),$$

где $A(x,\xi):D\times R^n\to R^n$ — C^1-гладкая функция. Предположим, что

$$\langle A(x,\nabla_\xi\Phi^2(x,\eta),\eta\rangle\geq c_1\Phi^2(x,\eta), \tag{1}$$

$$H(x,A(x,\nabla_\xi\Phi^2(x,\eta)))\leq c_2\Phi(x,\eta). \tag{2}$$

Условия (1)–(2) для $A(x,Y)=Y$ выполняются автоматически в виде равенств и с постоянными $c_1=c_2=1$.

Для получения оценки величины λ_2 воспользуемся методом, предложенным в работе Яу [6].

Теорема 1. *Если $f(x)$ — положительная C^2-гладкая функция в Ω, то*

$$\lambda_2(\Sigma)\geq\frac{c_1}{c_2^2}\inf_{\Sigma}\left[\frac{\frac{\operatorname{div}(-A(x,\nabla_\xi\Phi^2(x,\nabla f))}{|\nabla h|})}{f|\nabla h|}\right].$$

Доказательство. Для произвольной C^1-гладкой финитной функции $u(x)$ по формуле Гаусса — Остроградского

$$0=\int_{\Sigma}\operatorname{div}\left(u^2\frac{A(x,\nabla_\xi\Phi^2(x,\nabla f))}{f|\nabla h|}\right)dx=2\int_{\Sigma}u\langle\nabla u,\frac{A(x,\nabla_\xi\Phi^2(x,\nabla f))}{f|\nabla h|}\rangle dx+$$

$$+\int_\Sigma \frac{u^2|\nabla h|\mathrm{div}\frac{A(x,\nabla_\xi\Phi^2(x,\nabla_\xi f))}{|\nabla h|}dx}{f|\nabla h|} - \int_\Sigma u^2\frac{\langle A(x,\nabla_\xi\Phi^2(x,\nabla f)),\nabla f\rangle}{f^2|\nabla h|}dx \le$$

$$\le \int_\Sigma \frac{u^2|\nabla h|\mathrm{div}\frac{(A(x,\nabla_\xi\Phi^2(x,\nabla f)))}{|\nabla h|}}{f|\nabla h|}dx + 2\int_\Sigma \frac{u\Phi(x,\nabla u)}{f|\nabla h|}H(A(x,\nabla_\xi\Phi^2(x,\nabla f)))dx -$$

$$-c_1\int_\Sigma \frac{u^2\Phi^2(x,\nabla f))}{f^2|\nabla h|}dx.$$

Добавим и вычтем интеграл вида

$$\frac{c_2^2}{c_1}\int_\Sigma \frac{\Phi^2(x,\nabla u)}{|\nabla h|}dx,$$

получим

$$0 \le \int_\Sigma \frac{u^2|\nabla h|\mathrm{div}\frac{A(x,\nabla_\xi\Phi^2(x,\nabla f))}{|\nabla h}}{f|\nabla h|}dx + \frac{c_2^2}{c_1}\int_\Sigma \frac{\Phi^2(x,\nabla u)}{|\nabla h|}dx +$$

$$+2c_2\int_\Sigma \frac{u\Phi(x,\nabla f)\Phi(x,\nabla u)}{f|\nabla h|}dx - c_1\int_\Sigma \frac{u^2\Phi^2(x,\nabla f)}{f^2|\nabla h|}dx - \frac{c_2^2}{c_1}\int_\Sigma \frac{\Phi^2(x,\nabla u)}{|\nabla h|}dx.$$

Последние три слагаемых свернем в квадрат разности

$$0 \le \int_\Sigma \frac{u^2\mathrm{div}\frac{A(x,\nabla_\xi\Phi^2(x,\nabla f))}{|\nabla h|}}{f}dx + \frac{c_2^2}{c_1}\int_\Sigma \frac{\Phi^2(x,\nabla u)}{|\nabla h|}dx -$$

$$-\int_\Sigma \left[\frac{u\Phi(x,\nabla f)dx}{\sqrt{c_1}f|\nabla h|} - \frac{c_2}{\sqrt{c_1}}\frac{\Phi(x,\nabla u)}{|\nabla h|}\right]^2 dx.$$

Отбросим последнее слагаемое, поскольку оно всегда отрицательно.

$$0 \le \frac{c_2^2}{c_1}\int_\Sigma \frac{\Phi^2(x,\nabla u)}{|\nabla h|}dx - \int_\Sigma \frac{u^2}{f}\mathrm{div}\left(\frac{-A(x,\nabla_\xi\Phi^2(x,\nabla f))}{|\nabla h|}\right)dx.$$

Введем величину

$$\lambda_0 = \inf_\Sigma \left[\frac{\mathrm{div}(\frac{-A(x,\nabla_\xi\Phi^2(x,\nabla f))}{|\nabla h|})}{f|\nabla h|}\right].$$

Тогда неравенство может быть записано в виде

$$0 \le \frac{c_2^2}{c_1}\int_\Sigma \frac{\Phi^2(x,\nabla u)}{|\nabla h|}dx - \lambda_0\int_\Sigma u^2|\nabla h|dx.$$

Следовательно, для основной частоты λ_2 справедлива оценка

$$\lambda_2(\Sigma) \ge \frac{c_1\lambda_0}{c_2^2}.$$

Аналог неравенства Чигера

Далее будем считать, что $R^{n+1} \supset D = \Omega\times(0,+\infty)$, $h(x) = x_{n+1}$. Тогда $\Sigma(t) = \Omega\times$ $\times\{t\}$ и

$$\lambda_p(\Omega) = \inf_{\varphi\in C_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega \Phi^p(x,\nabla\varphi)dx}{\int_\Omega \varphi^p(x)dx}.$$

Введем в рассмотрение величину

$$h(\Omega) = \inf_{G \subseteq \Omega} \frac{\int_{\partial G} \Phi(x, \nu) dx}{|G|},$$

где G-компактная подобласть области Ω, а ν — вектор внешней нормали к границе ∂G. Заметим, что $h(\Omega)$ для случая $\Phi(x, \xi) = |\xi|$ была введена Чигером в работе [5]. Обозначим также

$$\Omega_t = \{x \in \Omega : f(x) > t\}, \quad E_t = \{x \in \Omega : f(x) = t\}.$$

Теорема 2. *Имеет место оценка*

$$\lambda_p(\Omega) \geq \frac{1}{p^p} h^p(\Omega).$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ — функция, на которой достигается точная нижняя грань в определении λ_p, то есть

$$\lambda_p = \frac{\int_\Omega \Phi^p(x, \nabla f) dx}{\int_\Omega f^p(x) dx} \cdot \frac{\left(\int_\Omega f^p(x) dx\right)^{p/q}}{\left(\int_\Omega f^p(x) dx\right)^{p/q}} \geq \frac{\left(\int_\Omega \Phi(x, \nabla f) \cdot f^{p/q}(x) dx\right)^p}{\left(\int_\Omega f^p(x) dx\right)^p}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством Гельдера

$$\left(\int_\Omega \Phi(x, \nabla f) \cdot f^{p/q}(x) dx\right)^p \leq \int_\Omega \Phi^p(x, \nabla f) dx \cdot \left(\int_\Omega f^p(x) dx\right)^{p/q}$$

и соотношением $1 + p/q = 1$. По формуле коплощади [4]

$$\lambda_p \geq \frac{\left(\int\limits_0^1 t^{p/q} dt \int_{E_t} \frac{\Phi(x, \nabla f)}{|\nabla f|} dH_{n-1}\right)^p}{\left(\int_\Omega f^p(x) dx\right)^p} = \frac{\left(\int\limits_0^1 t^{p/q} dt \int_{E_t} \Phi(x, \nu) dH_{n-1}\right)^p}{\left(\int_\Omega f^p(x) dx\right)^p} \geq$$

$$\geq \frac{h^p(\Omega) \left(\int\limits_0^1 t^{p/q} |\Omega_t| dt\right)^p}{\left(\int_\Omega f^p(x) dx\right)^p},$$

поскольку в силу определения величины $h(\Omega)$ выполнено

$$|\Omega_t| \cdot h(\Omega) \leq \int_{E_t} \Phi(x, \nu) dH_{n-1}.$$

Проинтегрируем по частям интеграл, заметив, что $|\Omega_1| = 0$:

$$\int\limits_0^1 t^{p/q} |\Omega_t| dt = \frac{1}{p} \int\limits_0^1 |\Omega_t| dt^p = -\frac{1}{p} \int\limits_0^1 t^p \frac{d}{dt} |\Omega_t| dt.$$

Так как

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} 1 dx = \frac{d}{dt} \left(\int\limits_0^1 d\tau \int_{E_\tau} \frac{1}{|\nabla f(x)|} dH_{n-1}\right) = -\int_{E_t} \frac{1}{|\nabla f(x)|} dH_{n-1},$$

тогда

$$\lambda_p \geq \frac{h^p(\Omega)\frac{1}{p^p}\left(\int\limits_0^1 t^p dt \int_{E_t} \frac{1}{|\nabla f(x)|} dH_{n-1}\right)^p}{\left(\int\limits_0^1 t^p dt \int_{E_t} \frac{1}{|\nabla f(x)|} dH_{n-1}\right)^p} = \frac{1}{p^p} h^p(\Omega).$$

К интегралу в знаменателе снова была применена формула коплощади

$$\int_\Omega f^p(x)dx = \int\limits_0^1 t^p dt \int_{E_t} \frac{1}{|\nabla f(x)|} dH_{n-1}.$$

Окончательно

$$\lambda_p \geq \frac{1}{p^p} h^p(\Omega).$$

Примечания

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-01-97021-р_поволжье_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миклюков, В. М. Геометрический анализ / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2007. — 532 с.
2. Полиа, Г. Изопериметрические неравенства в математической физике / Г. Полиа, Г. Сеге. — М. : Физматгиз, 1962. — 336 с.
3. Рунд, Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств / Х. Рунд. — М. : Наука, 1981. — 504 с.
4. Федерер, Г. Геометрическая теория меры / Г. Федерер. — М. : Наука, 1987. — 761 с.
5. Cheeger, J. A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian in Problems in Analysis / J. Cheeger. — Princeton : Princeton University Press, 1970. P. 195–199.
6. Yau, S.-T. Survey on Partial Differential equations in Differential Geometry / S.-T. Yau. — Princeton : Princeton University Press, 1982. P. 669–706.

SOME ESTIMATES OF PRINCIPAL FREQUENCY FOR FINSLER METRICS

E.G. Grigoryeva

We give some estimates for principal p-frequency in Finsler metrics. Also, we prove some version of Cheeger's inequality for Finsler metrics.

Key words: *principal frequency, eigenvalues of operator, Finsler metric, Cheeger inequality, coarea formula.*