DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.8
УДК 517.95
ББК 22.1

СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НАГРУЖЕННЫМИ МНОЖЕСТВАМИ УРОВНЯ

Борис Ефимович Левицкий
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций,
Кубанский государственный университет
bel@kubsu.ru
ул. Ставропольская, 149, 350040 г. Краснодар, Российская Федерация

Андрей Эдуардович Бирюк
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций,
Кубанский государственный университет
abiryuk@kubsu.ru
ул. Ставропольская, 149, 350040 г. Краснодар, Российская Федерация

Аннотация. Рассматривается обобщение известных теорем сравнения решений дифференциальных уравнений с частными производными на случай уравнений с дивергентной главной частью, содержащей весовой функциональный коэффициент.

Ключевые слова: теоремы сравнения, p-эллиптические уравнения, вырождающиеся нелинейности.

Введение

Теоремы сравнения для эллиптических уравнений с частными производными начинают появляться в научной литературе как отдельное направление в изучении свойств решений дифференциальных уравнений с частными производными с середины 70-х гг. XX столетия, особенно после того, как Таленти получил свой, ставший уже давно классическим результат [15]. Позже были получены разнообразные обобщения этого результата на широкий класс уравнений, включая нелинейные p-эллиптические и другие уравнения [7; 10; 11; 14]. В данной работе теоремы сравнения распространяются на класс нелинейных уравнений с дивергентной главной частью с весовым коэффициентом, зависящим от меры множества уровня решения. Такие дифференциальные уравнения будем называть уравнениями с нагруженными множествами уровня.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — произвольная область конечного фиксированного объема $|\Omega|$. Пусть $L^0(\Omega)$ обозначает векторное пространство измеримых по Лебегу вещественнозначных функций, заданных в области Ω. Рассмотрим семейство пар $(\mathcal{L}, \Omega)$, где

$$\mathcal{L}u = -\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(g(x,u)\cdot|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) - k|\nabla u|^q,$$

p, q и k — вещественные числа, такие, что $p > 1$, $q \in (0,p]$ и $k \geqslant 0$; отображение $g : \Omega \times L^0(\Omega) \to [0,+\infty)$ удовлетворяет неравенству:

$$g(x,u) \geqslant \Phi\big(\mathrm{meas}\,\{\chi \in \Omega : u(\chi) > u(x)\}\big),$$

где Φ — непрерывная неотрицательная функция.

Пусть u — слабое неотрицательное решение уравнения

$$\mathcal{L}u = f(x)$$

в области Ω с нулевыми граничными условиями Дирихле, где $f \in L^1(\Omega)$. Через $f^* :$ $: [0, |\Omega|) \to \mathbb{R}$ обозначим убывающую равноизмеримую перестановку функции $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ [9]. Пусть $\Omega^\star$ — шар, равнообъемный области Ω и $f^\star : \Omega^\star \to \mathbb{R}$ — симметризация Шварца функции f [4]. Функции $f^\star$ и f^* связаны соотношением

$$f^\star(x) = f^*(\omega_m|x|^m) \qquad \text{для} \qquad x \in \Omega^\star,$$

где ω_m — объем m-мерного шара единичного радиуса. Аналогичное соотношение связывает функции $u^\star$ и u^*.

Через $h_{\max}$ обозначим максимальное решение интегрального неравенства

$$h(y) \leqslant \int_0^y f^*(s)ds + k\int_0^y \left(\frac{s^{-1+1/m}\cdot h(s)}{m\omega_m^{1/m}\Phi(s)}\right)^{\frac{q}{p-1}} ds\,, \qquad y \in [0, |\Omega|).$$

Для $x \in \Omega^\star$ положим

$$V(x) = \int_{\omega_m|x|^m}^{|\Omega|} \left(\frac{s^{-1+1/m}}{m\omega_m^{1/m}}\right)^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{h_{\max}(s)}{\Phi(s)}\right)^{\frac{1}{p-1}} ds. \tag{1}$$

В семействе пар $(\mathcal{L}, \Omega)$ рассмотрим пару $(\mathcal{L}_0, \Omega^\star)$, где

$$\mathcal{L}_0 u = -\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(g_0(x,u)\cdot|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) - k|\nabla u|^q,$$

и $g_0(x,u) = \Phi\big(\mathrm{meas}\,\{\chi \in \Omega^\star : u(\chi) > u(x)\}\big)$ — неотрицательный функционал, определенный на прямом произведении $\Omega^\star \times L^0(\Omega^\star)$.

В работе установлено:
1) $u^\star \leqslant V$ в области $\Omega^\star$.
2) $\int_\Omega |\nabla u|^p dx \leqslant \int_{\Omega^\star} |\nabla V|^p dx$ при условии, что интеграл в правой части имеет смысл.
3) Определены достаточные условия, при которых функция $V(x)$ является слабым (неотрицательным) решением уравнения

$$\mathcal{L}_0 V = f^\star(x) \tag{2}$$

в области $\Omega^\star$, удовлетворяющим нулевым граничным условиям Дирихле.

1. Основные определения и главные результаты

1.1. Равноизмеримые перестановки функций и их свойства

В этом разделе $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — произвольное измеримое множество конечной меры, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ — произвольная измеримая функция. Функцией распределения функции u называется отображение $\mu : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, определяемое формулой:

$$\mu(t) = |\Omega_t|, \quad \text{где} \ \ \Omega_t = \{y \in \Omega : u(y) > t\}.$$

Убывающей перестановкой функции u назовем функцию $u^* : [0, |\Omega|) \to \mathbb{R}$, определенную для каждого $y \in [0, |\Omega|)$ формулой

$$u^*(y) = \sup\{t \in \mathbb{R} : \mu(t) > y\}.$$

Как функция μ, так и функция u^* являются монотонно невозрастающими непрерывными справа функциями. Непосредственно из определения следует, что для каждого $\tau > \operatorname{ess\,inf} u$ выполнено:

$$u^*(\mu(\tau)) \leqslant \tau$$

и для каждого $y \in [0, |\Omega|)$ выполнено

$$\mu(u^*(y)) \leqslant y. \tag{3}$$

В случае если $u \in C(\Omega)$ или $u \in W^{1,1}(\Omega)$, то функция u^* — непрерывна, функция μ — строго монотонно убывает и для каждого $\tau > \operatorname{ess\,inf} u$ выполнено равенство

$$u^*(\mu(\tau)) = \tau. \tag{4}$$

В (3) возможно строгое неравенство, если функция u принимает одно из своих значений на множестве положительной меры. Эти и другие свойства равноизмеримых перестановок функций подробно рассмотрены, например, в [9; 13].

Пусть $\Omega^\star$ обозначает шар в $\mathbb{R}^m$, с центром в начале координат, объем которого равен $|\Omega|$. Обозначим через $\omega_m = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2+1)}$ — объем единичного шара в $\mathbb{R}^m$. Здесь $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера: $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx$. Определим функцию $u^\star : \Omega^\star \to \mathbb{R}$ формулой $u^\star(x) = u^*(\omega_m|x|^m)$.

1.2. Интегральные неравенства

Пусть $f \in L^1(\Omega)$ и вещественное число $k \geqslant 0$. Функцию $h : [0, |\Omega|) \to \mathbb{R} \cup \cup \{+\infty\}$ назовем *локально ограниченной справа*, если для каждой точки $y_0 \in [0, |\Omega|)$ существуют $M > 0$ и $\delta > 0$ такие, что $\sup_{y\in[y_0,y_0+\delta]} h(y) < h(y_0) + M$. Пусть $p > 1$ и $q \in (0, p]$ — вещественные числа. Пусть $\Phi(\cdot)$ — неотрицательная функция, определенная на промежутке $[0, |\Omega|)$; $h^+ = \max\{h, 0\}$.

Лемма 1. *В классе локально ограниченных справа функций $h : [0, |\Omega|) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, удовлетворяющих неравенству*

$$h(y) \leqslant \int_0^y f^*(s)ds + k\int_0^y \left(\frac{s^{-1+\frac{1}{m}}\, h^+(s)}{m\omega_m^{1/m}\Phi(s)}\right)^{\frac{q}{p-1}} ds, \qquad y \in [0, |\Omega|), \tag{5}$$

существует наибольшая функция $h_{\max}$ ($h_{\max} \geqslant h$). Для этой функции в неравенстве (5) *имеет место равенство.*

Доказательство. Отметим, что множество решений неравенства (5) не пусто. Например, одно из решений дается функцией $h(y) = \int_0^y f^*(s)ds$. Определим функцию $h_{\max} : [0, |\Omega|) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ следующим образом:

$$h_{\max}(y) = \{\sup h(y) : h \text{ — локально ограниченное справа решение неравенства (5)}\}.$$

Очевидно, что функция $h_{\max}$ мажорирует любое решение h неравенства (5), то есть $h \leqslant h_{\max}$. Покажем, что функция $h_{\max}$ удовлетворяет неравенству (5). Обозначим символом F (нелинейный) оператор $h \mapsto Fh$, определенный следующим образом:

$$Fh(s) = f^*(s) + k \left(\frac{s^{-1+\frac{1}{m}}\, h^+(s)}{m\omega_m^{1/m}\Phi(s)} \right)^{\frac{q}{p-1}}.$$

Отметим, что оператор F (не строго) монотонно зависит от h. Зафиксируем $y \in [0, |\Omega|)$. Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется локально ограниченная справа функция h, удовлетворяющая (5), такая, что $h_{\max}(y) \leqslant h(y) + \varepsilon$. Тогда

$$h_{\max}(y) - \varepsilon \leqslant h(y) \leqslant \int_0^y Fh\, ds \leqslant \int_0^y Fh_{\max}\, ds.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ мы получаем неравенство $h_{\max}(y) \leqslant \int_0^y Fh_{\max} ds$. Это означает, что $h_{\max}$ удовлетворяет (5). Докажем, что функция $h_{\max}$ удовлетворяет равенству в (5). Для этого достаточно убедиться, что справедливо противоположное неравенство ($\geqslant$). Зафиксируем $y_0 \in [0, |\Omega|)$. Положим

$$\tilde{h}(y) = \begin{cases} h_{\max}(y) & \text{при } y \neq y_0, \\ \int_0^{y_0} Fh_{\max} ds & \text{при } y = y_0. \end{cases}$$

Тогда $\tilde{h}$ — решение неравенства (5), но из определения $h_{\max}$ имеем $h_{\max}(y_0) \geqslant \tilde{h}(y_0)$. Лемма доказана.

1.3. Определение оператора L и основные результаты

Пусть $L^0(\Omega)$ обозначает пространство всех измеримых функций $\Omega \to \mathbb{R}$. Пусть $\Phi : [0, |\Omega|) \to [0, +\infty)$ — неотрицательная полунепрерывная снизу функция. Напомним, что полунепрерывность снизу означает:

$$\lim_{\delta \to 0} \inf_{\xi \in [x-\delta, x+\delta]} \Phi(\xi) = \Phi(x).$$

Пусть (нелинейное) отображение $g : \Omega \times L^0(\Omega) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию:

$$g(x, u) \geqslant \Phi\big(|\{y \in \Omega : u(y) > u(x)\}|\big). \tag{6}$$

Рассмотрим дифференциальный оператор L, который обобщает следующее дифференциальное выражение:

$$Lu = -\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(g(x, u)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big).$$

Определение 1. *Пусть дана функция* $u \in W^{1,1}(\Omega)$ *такая, что отображение* $x \mapsto g(x,u)\,|(\nabla u)(x)|^{p-1}$ *принадлежит* $L^1(\Omega)$. *Предположим, что существует* $\Psi \in L^1(\Omega)$ *такая, что* $\forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *(с компактным носителем) выполнено интегральное тождество*

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^m g(x,u)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}dx = \int_\Omega \Psi(x)\varphi(x)dx.$$

В этом случае говорят, что $u \in \operatorname{Dom} L$, *а функция* Ψ *называется образом функции* u *при отображении* L *и обозначается* Lu.

Пусть даны число $k \in \mathbb{R}$, функция $f \in L^1(\Omega)$ и функция $u \in W^{1,q}$ такая, что отображение $x \mapsto g(x,u)\,|(\nabla u)(x)|^{p-1}$ принадлежит $L^1(\Omega)$. Будем говорить, что уравнение

$$-\sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(g(x,u)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big) = f + k|\nabla u|^q \tag{7}$$

выполнено в слабом смысле, если $\forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ (с компактным носителем) выполнено интегральное тождество

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^m g(x,u)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}dx = \int_\Omega \big(f(x) + k|(\nabla u)(x)|^q\big)\varphi(x)dx. \tag{8}$$

Отметим, что выполнение в слабом смысле уравнения (7) эквивалентно условию

$$Lu = f + k|\nabla u|^q. \tag{9}$$

Определение 2. *Пусть* G *— открытая область в* $\mathbb{R}^m$ *и пусть* $u \in C(G)$. *Положим*

$$G' = \{x \in G : \exists\varepsilon > 0 : u \in C^1(B_\varepsilon(x)) \text{ и } (\nabla u)(x) \neq 0\},$$

где $B_\varepsilon(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^m : |\xi - x| < \varepsilon\}$. *Будем говорить, что для функции* u *выполнено условие Сарда, если мера множества* $u(G \setminus G')$ *равна нулю.*

Образ множества $G \setminus G'$ при отображении u назовем критическими значениями функции u или просто критическими точками в $\mathbb{R}$. Если точка не является критической, то будем называть ее регулярной (регулярное значение).

Теорема 1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *— ограниченная открытая область. Пусть* $k \geqslant 0$ *и пусть* $0 < q \leqslant p$, $p > 1$, $f \in L^1(\Omega)$, *функция* $\Phi : [0, |\Omega|] \to [0, +\infty]$ *— полунепрерывна снизу. Пусть дана функция* $u \in C(\overline{\Omega}, [0,\infty])$ *такая, что* $u|_{\partial\Omega} = 0$. *Предположим, что мера множества* $\Omega_\infty = u^{-1}(\infty)$ *равна нулю. Кроме этого, предположим, что функция* u *непрерывно дифференцируема почти всюду, что для нее выполнено условие Сарда и* $u \in \operatorname{Dom} L$, $k|\nabla u|^q \in L^1(\Omega)$ *и выполнено* (9) *(то есть уравнение* (7) *выполняется в слабом смысле). Предположим, что выполнено условие* (6). *Пусть функция* $f \in L^1(\Omega)$ *обладает следующим свойством для каждого* $t \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\{x:u(x)=t\}} f(x)dx \geqslant 0. \tag{10}$$

Тогда неравенство (5) *имеет неотрицательное решение* h *и справедливо неравенство* $u^\star(y) \leqslant V(y)$ *для любого* $y \in \Omega^\star$, *где функция* V *определена в* (1).

Отметим, что при «разумных обстоятельствах» условие (10) не является ограничительным, так как часто выполнено «автоматически». Например, оно выполнено, если каждое множество уровня функции u измеримо по Жордану (см. [1, т. 2, гл. XI]). В самом деле, в этом случае граница каждого множества уровня функции u имеет нулевую лебеговую меру, следовательно интеграл по границе множества уровня равен нулю. Во внутренних точках множества уровня функция u является константой, поэтому там f обращается в нуль в силу уравнения (9).

Лемма 2. *Предположим, что* $0 < q \leqslant p-1$, $k \geqslant 0$, *функция* $f \in L^1(\Omega)$ *и для измеримой функции* $\Phi : [0, |\Omega|] \to [0, +\infty)$ *выполнено*

$$\int_0^{|\Omega|} k\, s^{\frac{(1-m)q}{m(p-1)}} \Phi^{-\frac{q}{p-1}}(s)\, ds < \infty.$$

При $q < 1$, *а также при* $k = 0$ *потребуем выполнения следующего условия:*

$$\forall y \in (0, |\Omega|) \quad \textit{выполнено} \quad \int_y^{|\Omega|} \frac{1}{\Phi^{1/(p-1)}(s)}\, ds < \infty.$$

Тогда максимальное решение неравенства (5) *ограничено:*

$$\sup |h_{\max}| < \infty.$$

Для функции V, *определенной в* (1), *имеем* $V \in C^1(\Omega^\star \setminus \{0\})$, *на границе шара* $\Omega^\star$ *она обращается в ноль и для нее выполнено условие Сарда.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы 2. Предположим, что неравенство* (5) *имеет неотрицательное решение. Тогда функция* V, *определенная в* (1), *удовлетворяет уравнению* (2) *в слабом смысле. При дополнительном условии* $f \in C(\Omega)$, $\Phi \in C^1(0, |\Omega|)$, *функция* V *удовлетворяет уравнению* (2) *в классическом смысле при* $x \in \Omega^\star \setminus \{0\}$.

Заметим, что если Φ является полунепрерывной снизу, то можно применить теорему 1 и заключить, что V будет максимальным решением задачи Дирихле для уравнения $L_0 V = f^\star + k|\nabla V|^q$.

2. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим функцию $h : [0, |\Omega|) \to \mathbb{R}$, определенную тождеством

$$h(y) = \int_{\Omega_{u^*(y)}} Lu\, dx. \tag{11}$$

Справедливо следующее тождество:

$$\int_{\Omega_\tau} Lu\, dx = h(\mu(\tau)) \quad \text{при всех } \tau > 0. \tag{12}$$

В самом деле, при $\tau > \operatorname{ess\,sup} u$ как левая, так и правая часть в (12) равны нулю. При $\tau \in (0, \operatorname{ess\,sup} u]$ (12) получается из (11) подстановкой $y = \mu(\tau)$ с использованием равенства (4).

Лемма 3. *Предположим, что* $p > 1$, $u \in C(\overline{\Omega}, [0, +\infty])$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, *для* u *выполнено условие Сарда и* $u \in \mathit{Dom}\, L$. *Предположим, что выполнено* (6) *и функция* $\Phi \geqslant 0$ — *полунепрерывна снизу. Тогда для почти всех* $t > 0$ *выполнено*

$$\int_{\Omega_t} Lu\, dx \geqslant \Phi\bigl(\mu(t)\bigr) \int_{\partial\Omega_t} |\nabla u|^{p-1}\, d\sigma.$$

Доказательство. По условию Сарда, для почти всех $t > 0$, функция u непрерывно дифференцируема в окрестности точки x, если $u(x) = t$, причем $(\nabla u)(x) \neq 0$. Зафиксируем одно из таких $t > 0$. Тогда по теореме о неявной функции множество $\partial\Omega_t$ является C^1-гладким многообразием. Кроме того, поскольку область Ω ограничена, многообразие $\partial\Omega_t$ является компактным. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что $u \in C^1(\Omega_{t-\varepsilon} \setminus \overline{\Omega_{t+\varepsilon}})$. Возьмем $\delta < \varepsilon$ и

$$\varphi_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}(\min\{t + \delta, \max\{u(x), t - \delta\}\} - t + \delta).$$

По лемме 6 в интегральное тождество определения 1 можно подставлять функцию $\varphi = \varphi_\delta$. Следовательно, имеет место интегральное тождество:

$$\int\limits_{\Omega_{t-\delta} \setminus \Omega_{t+\delta}} g(x, u)|\nabla u|^{p-2} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_k} dx = \int\limits_{\Omega_{t-\delta}} (Lu)(x)\, \varphi_\delta(x)\, dx.$$

Используя неравенство (6), которое можно переписать в виде $g(x, u) \geqslant \Phi\bigl(\mu(u(x))\bigr)$, заключаем, что для любого фиксированного положительного $\delta_0 < \varepsilon$, при $\delta \in (0, \delta_0)$ выполнено следующее неравенство:

$$\inf_{\tau \in [t-\delta_0, t+\delta_0]} \Phi(\mu(\tau))\ \frac{1}{2\delta} \int\limits_{\Omega_{t-\delta} \setminus \Omega_{t+\delta}} |\nabla u|^p dx \leqslant \int\limits_{\Omega_{t-\delta}} (Lu)(x)\, \varphi_\delta(x)\, dx.$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем:

$$\inf_{\tau \in [t-\delta_0, t+\delta_0]} \Phi(\mu(\tau)) \int_{\partial\Omega_t} |\nabla u|^{p-1} d\sigma \leqslant \int_{\Omega_t} (Lu)(x)\, dx.$$

Теперь утверждение леммы следует из того, что δ_0 произвольно, отображение $\tau \mapsto \mu(\tau)$ непрерывно в точке $\tau = t$ (поскольку t — регулярное значение функции u), а функция $\Phi \geqslant 0$ полунепрерывна снизу. Лемма доказана.

Используя теорему Кронрода — Федерера [5], получаем, что функция $\tau \mapsto \mu(\tau)$ дифференцируема в каждой регулярной точке τ (регулярном значении функции u) и

$$-\mu'(\tau) = \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{d\sigma}{|\nabla u|} \tag{13}$$

(см. также [12; 13]). Зафиксируем регулярное значение τ функции u. Применим неравенство Гёльдера:

$$|\partial\Omega_\tau| = \int_{\partial\Omega_\tau} |\nabla u|^{\frac{p-1}{p}} |\nabla u|^{\frac{1-p}{p}} d\sigma \leqslant \Bigl(\int_{\partial\Omega_\tau} |\nabla u|^{p-1} d\sigma\Bigr)^{\frac{1}{p}} \Bigl(\int_{\partial\Omega_\tau} |\nabla u|^{-1} d\sigma\Bigr)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Возводя это неравенство в степень $\frac{p}{p-1}$ и используя (13), получаем, что при $p > 1$ справедливо неравенство:

$$|\partial\Omega_\tau|^{\frac{p}{p-1}} \leqslant \Big(\int_{\partial\Omega_\tau} |\nabla u|^{p-1} d\sigma\Big)^{\frac{1}{p-1}} \big(-\mu'(\tau)\big). \tag{14}$$

В силу классического изопериметрического неравенства [6]

$$|\partial\Omega_\tau| \geqslant m\omega_m^{1/m} \mu(\tau)^{\frac{m-1}{m}}, \tag{15}$$

где ω_m — объем единичного шара в $\mathbb{R}^m$. Применяя последовательно результат леммы 3, неравенства (14) и (15), получаем следующую цепочку неравенств:

$$1 \leqslant \left(\frac{\int_{\Omega_\tau} Lu\,dx}{\Phi\big(\mu(\tau)\big)}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{1}{\Big(\int_{\partial\Omega_\tau} |\nabla u|^{p-1}\Big)^{1/(p-1)}} \leqslant \left(\frac{\int_{\Omega_\tau} Lu\,dx}{\Phi\big(\mu(\tau)\big)}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{\big(-\mu'(\tau)\big)}{|\partial\Omega_\tau|^{\frac{p}{p-1}}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\int_{\Omega_\tau} Lu\,dx}{\Phi\big(\mu(\tau)\big)}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{\big(-\mu'(\tau)\big)}{\big(m\omega_m^{1/m}\big)^{\frac{p}{p-1}} \big(\mu(\tau)\big)^{\frac{p(m-1)}{(p-1)m}}}.$$

Используя тождество $\frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1}$ и обозначение $k_m = 1/(m\omega_m^{1/m})$, перепишем последнее неравенство в следующем виде:

$$1 \leqslant k_m\big(\mu(\tau)\big)^{-1+\frac{1}{m}} \left(\frac{k_m\big(\mu(\tau)\big)^{-1+\frac{1}{m}} \int_{\Omega_\tau} Lu\,dx}{\Phi\big(\mu(\tau)\big)}\right)^{\frac{1}{p-1}} \big(-\mu'(\tau)\big). \tag{16}$$

Это неравенство справедливо для почти всех $\tau \in [0, \operatorname{ess\,sup} u]$.

Лемма 4. *Пусть $q > 0$. Предположим, что функция u является непрерывно дифференцируемой почти всюду, $\int_\Omega |\nabla u|^q dx < \infty$ и для функции u выполнено условие Сарда. Тогда для любого $t \geqslant 0$*

$$\int_{\Omega_t} |\nabla u|^q dx = \int_t^\infty \int_{\partial\Omega_\tau} |\nabla u|^{q-1}\, d\sigma\, d\tau.$$

Доказательство. Заметим, что отображение $t \mapsto \int_{\Omega_t} |\nabla u|^q dx$ дифференцируемо в каждой регулярной точке t (то есть регулярном значении функции u, следовательно, из-за условия Сарда, почти всюду) и

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} |\nabla u|^q dx = -\int_{\partial\Omega_t} |\nabla u|^{q-1} d\sigma. \tag{17}$$

Осталось показать, что отображение $t \mapsto \int_{\Omega_t} |\nabla u|^q dx$ абсолютно непрерывно. Определим множества

$$\Omega_t^{\text{рег}} = \{x \in \Omega_t : u(x) \text{ — регулярное значение}\}$$

и

$$\Omega_t^{\text{кр}} = \{x \in \Omega_t : u(x) \text{ — критическое значение}\}.$$

Очевидно, что эти множества не пересекаются и что $\Omega_t = \Omega_t^{\text{рег}} \cup \Omega_t^{\text{кр}}$. Равенство (17) означает, что

$$\int_{\Omega_t^{\text{рег}}} |\nabla u|^q dx = \int_t^\infty \int_{\partial\Omega_\tau} |\nabla u|^{q-1}\, d\sigma\, d\tau.$$

Осталось показать, что $\int_{\Omega_t^{\text{кр}}} |\nabla u|^q dx = 0$. Разделим множество $\Omega_t^{\text{кр}}$ на три части:

$$\Omega_t^{\text{кр}} = \Omega_t^{\text{кр},\emptyset} \cup \Omega_t^{\text{кр},0} \cup \Omega_t^{\text{кр},\neq},$$

где $\Omega_t^{\text{кр},\emptyset}$ состоит из точек, в которых функция u не является непрерывно дифференцируемой. Множество $\Omega_t^{\text{кр},0}$ состоит из точек, в которых производная равна нулю. Множество $\Omega_t^{\text{кр},\neq}$ состоит из точек, в которых функция является непрерывно дифференцируемой и производная в которых не равна нулю. Поскольку по условию функция u — непрерывно дифференцируема почти всюду, то $|\Omega_t^{\text{кр},\emptyset}| = 0$. Очевидно, что $\int_{\Omega_t^{\text{кр},0}} |\nabla u|^q dx = 0$. Остается заметить, что в силу условия Сарда мера критических значений равна нулю и, следовательно, $|\Omega_t^{\text{кр},\neq}| = 0$.

Лемма 5. *Пусть $0 < q \leqslant p$, $p > 1$. Предположим, что функция u является непрерывно дифференцируемой почти всюду, что $u \in W^{1,q}(\Omega)$, что для нее выполнено условие Сарда. Тогда для любого $t \geqslant 0$ выполнено неравенство:*

$$\int_{\Omega_t} |\nabla u|^q dx \leqslant \int_t^\infty \left(k_m\, \mu(\tau)^{-1+\frac{1}{m}} \int_{\partial\Omega_\tau} |\nabla u|^{p-1} d\sigma \right)^{\frac{q}{p-1}} \big(-\mu'(\tau)\big)\, d\tau.$$

Здесь $k_m = \frac{1}{m\omega_m^{1/m}}$, ω_m — объем m-мерного единичного шара.

Доказательство. Пусть $\tau \in \mathbb{R}^+$ — регулярное значение функции u. Применяя неравенство Йенсена, получаем, что при $q \leqslant p$ справедливо следующее неравенство

$$\frac{1}{|\partial\Omega_\tau|} \int_{\partial\Omega_\tau} |\nabla u|^{q-1} d\sigma \leqslant \left(\frac{1}{|\partial\Omega_\tau|} \int_{\partial\Omega_\tau} |\nabla u|^{p-1} d\sigma \right)^{\frac{q-1}{p-1}}.$$

Умножая это неравенство на неравенство (14) и деля обе части произведения на $|\partial\Omega_\tau|^{\frac{1}{p-1}}$, получаем, что при $0 < q \leqslant p$, $p > 1$ справедливо следующее неравенство:

$$\int_{\partial\Omega_\tau} |\nabla u|^{q-1} d\sigma \leqslant \left(\frac{1}{|\partial\Omega_\tau|} \int_{\partial\Omega_\tau} |\nabla u|^{p-1} d\sigma \right)^{\frac{q}{p-1}} \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{d\sigma}{|\nabla u|}.$$

В силу классического изопериметрического неравенства $\frac{1}{|\partial\Omega_\tau|} \leqslant k_m \mu(\tau)^{-1+\frac{1}{m}}$. Кроме того, поскольку τ — регулярное значение функции u, то $\mu'(\tau) = -\int_{\partial\Omega_\tau} \frac{d\sigma}{|\nabla u|}$. Таким образом:

$$\int_{\partial\Omega_\tau} |\nabla u|^{q-1} d\sigma \leqslant \left(k_m\, \mu(\tau)^{-1+\frac{1}{m}} \int_{\partial\Omega_\tau} |\nabla u|^{p-1} d\sigma \right)^{\frac{q}{p-1}} \big(-\mu'(\tau)\big).$$

Доказательство леммы завершается интегрированием последнего неравенства на интервале $\tau \in (t, +\infty)$ с использованием леммы 4.

Сочетая леммы 3 и 5, мы получаем, что для любого $t \geqslant 0$ выполнено неравенство:

$$\int_{\Omega_t} |\nabla u|^q dx \leqslant \int_t^\infty \left(\frac{k_m\, \mu(\tau)^{-1+\frac{1}{m}} \int_{\Omega_\tau} Lu\, dx}{\Phi(\mu(\tau))} \right)^{\frac{q}{p-1}} \big(-\mu'(\tau)\big)\, d\tau. \tag{18}$$

По условию теоремы 1 выполнено уравнение (9). Проинтегрировав его по Ω_t и применив неравенство (18), получаем:

$$\int_{\Omega_t} Lu\, dx \leqslant \int_{\Omega_t} f(x)\, dx + k \int_t^\infty \left(\frac{k_m\, \mu(\tau)^{-1+\frac{1}{m}} \int_{\Omega_\tau} Lu\, dx}{\Phi(\mu(\tau))} \right)^{\frac{q}{p-1}} \big(-\mu'(\tau)\big)\, d\tau.$$

Подставим сюда $t = u^*(y)$. Используя функцию (11) и свойство (12), получим:

$$h(y) \leqslant \int_{\Omega_{u^*(y)}} f(x)\, dx + k \int_{u^*(y)}^\infty \left(\frac{k_m\, \mu(\tau)^{-1+\frac{1}{m}} h(\mu(\tau))}{\Phi(\mu(\tau))} \right)^{\frac{q}{p-1}} \big(-\mu'(\tau)\big)\, d\tau.$$

Применяя лемму о замене переменных в интеграле Лебега, лемму 7, получаем:

$$h(y) \leqslant \int_{\Omega_{u^*(y)}} f(x)\, dx + k \int_0^{\mu(u^*(y))} \left(\frac{k_m\, s^{-1+\frac{1}{m}} h(s)}{\Phi(s)} \right)^{\frac{q}{p-1}} ds.$$

Для оценки второго интеграла в правой части воспользуемся неравенством (3) (в котором равенство достигается, в частности, если $u^*(y)$ — регулярное значение) и неотрицательностью подынтегрального выражения. Первый интеграл в правой части оценивается с помощью неравенства по лемме 8. В итоге получаем:

$$h(y) \leqslant \int_0^y f^*(s)\, ds + k \int_0^y \left(\frac{k_m\, s^{-1+\frac{1}{m}} h(s)}{\Phi(s)} \right)^{\frac{q}{p-1}} ds.$$

Далее мы заметим, что h — ограниченная функция. В самом деле: $h(y) \leqslant \int_\Omega |Lu|\, dx$, а последний интеграл конечен в силу условия $u \in \operatorname{Dom} L$. Следовательно, применима лемма 1, из которой следует, что

$$h(y) \leqslant h_{\max}(y). \tag{19}$$

Интегрируя (16) на $[0, t]$, получаем:

$$t \leqslant \int_0^t k_m \big(\mu(\tau)\big)^{-1+\frac{1}{m}} \left(\frac{k_m \big(\mu(\tau)\big)^{-1+\frac{1}{m}} \int_{\Omega_\tau} Lu\, dx}{\Phi\big(\mu(\tau)\big)} \right)^{\frac{1}{p-1}} \big(-\mu'(\tau)\big).$$

Используя (12) и применяя лемму 7, получаем:

$$t \leqslant \int_{\mu(t)}^{|\Omega|} k_m s^{-1+\frac{1}{m}} \left(\frac{k_m s^{-1+\frac{1}{m}} h(s)}{\Phi(s)} \right)^{\frac{1}{p-1}} ds.$$

Подставим в это неравенство $t = u^*(y)$:

$$u^*(y) \leqslant \int_{\mu(u^*(y))}^{|\Omega|} k_m s^{-1+\frac{1}{m}} \left(\frac{k_m s^{-1+\frac{1}{m}} h(s)}{\Phi(s)} \right)^{\frac{1}{p-1}} ds.$$

Используя непрерывность функции u^*, получаем

$$u^*(y) \leqslant \int_{y}^{|\Omega|} k_m s^{-1+\frac{1}{m}} \left(\frac{k_m s^{-1+\frac{1}{m}} h(s)}{\Phi(s)} \right)^{\frac{1}{p-1}} ds.$$

В самом деле, сначала замечаем, что это неравенство выполнено во всех точках y, в которых u^* не постоянна, так как для таких точек $y = \mu(u^*(y))$. По непрерывности заключаем, что оно справедливо всюду.

Отсюда для функции $u^\star(x) = u^*(\omega_m |x|^m)$ с использованием (19) получаем:

$$u^\star(x) \leqslant \int_{\omega_m |x|^m}^{|\Omega|} k_m s^{-1+\frac{1}{m}} \left(\frac{k_m s^{-1+\frac{1}{m}} h_{\max}(s)}{\Phi(s)} \right)^{\frac{1}{p-1}} ds =: V(x).$$

Теорема 1 доказана.

3. Вспомогательные утверждения

Отметим, что по теореме Радемахера (см., например, [5, § 3.1]) липшицева функция дифференцируема почти всюду. Кроме того, полученная производная является слабой производной в смысле обобщенных функций.

Лемма 6. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^m$. Пусть функции $\psi, \{\psi_k\}_{k=1}^m \in L^1(\Omega)$ таковы, что интегральное тождество*

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^m \psi_k(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) dx = \int_\Omega \psi(x) \varphi(x) dx$$

справедливо для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда это интегральное тождество также справедливо для любой липшицевой функции с условием $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай 1: функция φ — липшицева функция, носитель которой компактно вложен в Ω. Пусть φ_ε обозначает стандартное сглаживание функции φ, то есть $\varphi_\varepsilon = \varphi * \phi_\varepsilon$. Здесь $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-m} \phi(x/\varepsilon)$, а неотрицательная функция $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ является бесконечно гладкой функцией, носитель которой вложен в шар радиуса 1 и $\int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) dx = 1$, $\varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} \varphi, \partial\Omega)$. Имеем, что $\varphi_\varepsilon(x)$ сходится к $\varphi(x)$ в каждой точке x. Кроме того, в каждой точке (Фреше) дифференцируемости функции φ имеем $\lim_{\varepsilon \to 0} \nabla \varphi_\varepsilon(x) = \nabla \varphi(x)$. Применяя теорему Радемахера, мы заключаем, что эта сходимость наблюдается почти всюду. Теперь по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега в тождестве

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^m \psi_k(x) \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_k}(x) dx = \int_\Omega \psi(x) \varphi_\varepsilon(x) dx$$

можно перейти к пределу $\varepsilon \to 0$ и завершить случай 1.

Случай 2: общий случай. Пусть φ — липшицева функция с условием $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$. Построим последовательность $\varphi_j(x) = \mathrm{sign}(\varphi(x)) \max\{|\varphi(x)| - \frac{1}{j}, 0\}$, $j = 1, 2, \ldots$. Теперь общий случай сводится к случаю 1 при помощи перехода к пределу при $j \to \infty$ с использованием теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

Лемма о замене переменных в интеграле Лебега.

Лемма 7. *Пусть $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неотрицательная функция, а μ — монотонная не возрастающая функция, тогда*

$$\int_a^b F\big(\mu(s)\big)\big(-\mu'(s)\big)ds \leqslant \int_{\mu(b)}^{\mu(a)} F(y)\,dy.$$

Доказательство. Для $F \equiv 1$ результат стандартен (см., например, [2, гл. VI, § 4], [3, гл. VIII, § 2]). Для произвольной функции F результат получается стандартной процедурой аппроксимации, например, ступенчатыми функциями.

Лемма 8. *Пусть $u : \Omega \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, а функция $f \in L^1(\Omega)$ обладает следующим свойством для каждого $t \in \mathbb{R}$:*

$$\int_{\{x:u(x)=t\}} f(x)dx \geqslant 0.$$

Тогда для каждого $y \in [0, |\Omega|)$ справедливо неравенство:

$$\int_{\Omega_{u*(y)}} f(x)\,dx \leqslant \int_0^y f^*(s)\,ds.$$

Доказательство. По свойствам (невозрастающих) равноизмеримых перестановок, для любого множества $A \subset \Omega$ такого, что $|A| = y$ выполнено неравенство

$$\int_A f(x)\,dx \leqslant \int_0^y f^*(s)\,ds.$$

Это доказывает лемму в случае, когда $\big|\{x \in \Omega : u(x) = u^*(y)\}\big| = 0$. Если $\big|\{x \in \Omega : u(x) = u^*(y)\}\big| > 0$, то найдется множество $B \subset \{x \in \Omega : u(x) = u^*(y)\}$ такое, что $\big|\Omega_{u*(y)} \cup B\big| = y$ и $\int_B f(x)\,dx \geqslant 0$. Получаем, что:

$$\int_{\Omega_{u*(y)}} f(x)\,dx \leqslant \int_{\Omega_{u*(y)} \cup B} f(x)\,dx \leqslant \int_0^y f^*(s)\,ds.$$

Лемма доказана.

4. Достаточные условия ограниченности функции $h_{\max}$

Вводя $\alpha = \frac{q}{p-1}$ и $F(s) = k\, k_m^{\frac{q}{p-1}} \left(\frac{s^{(-1+\frac{1}{m})}}{\Phi(s)}\right)^{\frac{q}{p-1}}$, мы можем переписать неравенство (5) в виде неравенства Бихари [8]:

$$h(t) \leqslant \int_0^t f^*(s)ds + \int_0^t F(s)h^\alpha(s)ds. \tag{20}$$

Лемма 9. *Пусть* $\alpha \in (0,1]$, *функции* f^* *и* F *измеримы и* $F \geqslant 0$. *Тогда максимальное решение неравенства Бихари* (20) *меньше бесконечности в точке* $T > 0$, *если оба интеграла* $\int_0^T F(s)ds$ *и* $\int_0^T f^*(s)ds$ *конечны.*

Доказательство. Для доказательства можно заметить, что в силу неравенства $h^\alpha < 1 + h$ решения неравенства Бихари мажорируются решениями неравенства Гронвалла. Лемма доказана.

Таким образом, при $q \leqslant p-1$ и $k > 0$ достаточное условие можно сформулировать так:

$$\int_0^{|\Omega|} \left(\frac{s^{(-1+\frac{1}{m})}}{\Phi(s)} \right)^{\frac{q}{p-1}} ds < \infty.$$

5. Неравенство для градиента

Докажем, что

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \leqslant \int_{\Omega^\star} |\nabla V|^p dx. \tag{21}$$

Применяя лемму 3 и лемму 4 с $q = p$, получаем неравенство

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \leqslant \int_0^\infty \frac{\int_{\Omega_\tau} Lu\, dx}{\Phi\big(\mu(\tau)\big)} d\tau.$$

Используя неравенство (16), получаем следующее неравенство:

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \leqslant \int_0^\infty \left(\frac{k_m \big(\mu(\tau)\big)^{-1+\frac{1}{m}} \int_{\Omega_\tau} Lu\, dx}{\Phi\big(\mu(\tau)\big)} \right)^{\frac{p}{p-1}} \big(-\mu'(\tau)\big) d\tau.$$

Вводя функцию ψ по формуле (11) и учитывая (12), по лемме о замене переменных, лемме 7, получаем:

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \leqslant \int_0^{|\Omega|} \left(\frac{k_m s^{-1+\frac{1}{m}} \psi(s)}{\Phi(s)} \right)^{\frac{p}{p-1}} ds.$$

Далее мы используем неравенство (19) и тождество

$$\int_0^{|\Omega|} \left(\frac{k_m s^{-1+\frac{1}{m}} h_{\max}(s)}{\Phi(s)} \right)^{\frac{p}{p-1}} ds = \int_{\Omega^\star} |\nabla V|^p dx. \tag{22}$$

Неравенство (21) доказано, осталось проверить лишь тождество (22). Производя замену $s = \omega_m r^m$ и учитывая, что $k_m = \frac{1}{m\omega_m^{1/m}}$, получаем:

$$\int_0^{|\Omega|} \left(\frac{k_m s^{-1+\frac{1}{m}} h_{\max}(s)}{\Phi(s)} \right)^{\frac{p}{p-1}} ds = \int_0^R \left(\frac{r^{1-m} h_{\max}(\omega_m r^m)}{m\omega_m \Phi(\omega_m r^m)} \right)^{\frac{p}{p-1}} m\omega_m r^{m-1} dr,$$

где $R = (|\Omega|/\omega_m)^{1/m}$ — радиус шара $\Omega^\star$. Из определения V (см. (1)) следует, что

$$\big|(\nabla V)(x)\big| = \left(\frac{|x|^{1-m}h_{\max}(\omega_m|x|^m)}{m\omega_m\Phi(\omega_m|x|^m)}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Остается заметить, что если $v : [0,R] \to \mathbb{R}$, то

$$\int_{\Omega^\star} v(|x|)dx = \int_0^R m\omega_m r^{m-1}v(r)dr.$$

Взяв функцию v такую, что $v(|x|) = \big|(\nabla V)(x)\big|^p$, мы приходим к (22).

6. Доказательство теоремы 2

Пусть R — радиус шара, равнообъемного области Ω. Пусть $f^* \in L^1(0,|\Omega|)$. В этом разделе не предполагается, что f^* — это перестановка какой-либо функции, однако мы используем это обозначение, поскольку результаты этого раздела будут применяться к случаю, когда f^* — невозрастающая перестановка функции f. Предположим, что для неотрицательной, локально ограниченной справа функции $h : [0,|\Omega|] \to [0,+\infty]$ выполнено следующее интегральное тождество:

$$h(y) = \int_0^y f^*(s)ds + k\int_0^y \left(\frac{k_m s^{-1+\frac{1}{m}}h(s)}{\Phi(s)}\right)^{\frac{q}{p-1}} ds \tag{23}$$

для любого $y \in [0,|\Omega|]$. Здесь $k_m = \frac{1}{m\omega_m^{1/m}}$. Заметим, что любая такая функция обладает свойством: если $h(y_0) = +\infty$, то для любого $y > y_0$ выполнено $h(y) = +\infty$. Если y_0 наименьшее такое число, то на интервале $[0,y_0) \cap [0,|\Omega|]$ она будет непрерывной (а на компактных подынтервалах — абсолютно непрерывной). Кроме того, $h(0) = 0$.

Пусть $\tilde{L}_0$ обозначает следующий дифференциальный оператор, заданный на функциях, определенных в шаре $\Omega^\star$ радиуса $R = (|\Omega|/\omega_m)^{1/m}$:

$$\tilde{L}_0 v = -\sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Phi(\omega_m r^m)|\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right).$$

Здесь $r = (x_1^2 + ... + x_m^2)$. Определим функцию

$$A(r) = k_m\int_{\omega_m r^m}^{|\Omega|} s^{-1+\frac{1}{m}}\left(\frac{k_m s^{-1+\frac{1}{m}}h(s)}{\Phi(s)}\right)^{\frac{1}{p-1}} ds, \qquad r \in [0,R] \tag{24}$$

и положим

$$V(x) = A(|x|). \tag{25}$$

Лемма 10. *Пусть $f^* \in L^1(0,|\Omega|)$, Φ — неотрицательная измеримая функция и h — неотрицательное решение уравнения* (23). *Предположим, что $\forall y \in (0,|\Omega|)$ справедливо*

$$\int_y^{|\Omega|}\left(\frac{h(s)}{\Phi(s)}\right)^{\frac{1}{p-1}} ds < \infty.$$

Тогда функция V, определенная формулой (25), *является слабым решением уравнения*

$$\tilde{L}_0 V = f^\star + k|\nabla V|^q \tag{26}$$

в шаре $\Omega^\star$. Здесь $f^\star(x) = f^*(\omega_m|x|^m)$.

Доказательство. Для любой функции $\varphi \in C^1[0,R]$, такой, что $\varphi = 0$ в некоторой окрестности точки R выполнено

$$-\frac{1}{m\omega_m}\int_0^R h(\omega_m r^m)\varphi'(r)dr = \int_0^R h'(\omega_m r^m)r^{m-1}\varphi(r)dr. \tag{27}$$

Здесь был использован факт, что $h(0) = 0$ и что h — абсолютно непрерывна. Заметим, что для каждого $\varepsilon \in (0,|\Omega|)$ функция A является абсолютно непрерывной на $[\varepsilon,|\Omega|]$ и

$$A'(r) = -\left(\frac{r^{1-m}\,h(\omega_m r^m)}{m\omega_m\Phi(\omega_m r^m)}\right)^{\frac{1}{p-1}} \qquad \text{почти всюду.}$$

Проверим, что (26) выполнено в слабом смысле. То есть для любой функции $\psi \in C^1(\Omega^\star)$ с компактным носителем выполнено

$$\int_{\Omega^\star}\Phi(\omega_m|x|^m)\big|(\nabla V)(x)\big|^{p-2}\sum_{j=1}^m\frac{\partial V}{\partial x_j}(x)\,\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x)dx = \int_{\Omega^\star}\left(f^\star(x) + k\big|(\nabla V)(x)\big|^q\right)\psi(x)dx.$$

Поскольку V — сферически симметрическая функция, то

$$\sum_{j=1}^m\frac{\partial V}{\partial x_j}(x)\,\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial V}{\partial r}(x)\frac{\partial\psi}{\partial r}(x).$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial r}$ обозначает производную вдоль радиуса, которая определена следующим образом:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}(x) = \sum_{j=1}^m\frac{x_j}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x) = \lim_{\delta\to 0}\frac{\psi(x+\delta x/|x|) - \psi(x)}{\delta} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\psi(x+\delta x) - \psi(x)}{\delta|x|}.$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$$-\int_0^R\Phi(\omega_m r^m)\big|A'(r)\big|^{p-1}\int_{S_r}\frac{\partial\psi}{\partial r}(\sigma)d\sigma dr = \int_0^R\left(f^*(\omega_m r^m) + k\big|A'(r)\big|^q\right)\int_{S_r}\psi(\sigma)d\sigma dr.$$

Введем функцию $\varphi(r) = \frac{1}{r^{m-1}}\int_{S_r}\psi(\sigma)d\sigma = \int_{S_1}\psi(r\sigma)d\sigma$. Тогда

$$\frac{d}{dr}\varphi(r) = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_{S_1}(\psi((r+\delta)\sigma) - \psi(r\sigma))d\sigma = \int_{S_1}\frac{\partial\psi}{\partial r}(r\sigma)d\sigma = r^{1-m}\int_{S_r}\frac{\partial\psi}{\partial r}(\sigma)d\sigma.$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$$-\int_0^R\Phi(\omega_m r^m)\big|A'(r)\big|^{p-1}r^{m-1}\varphi'(r)dr = \int_0^R\left(f^*(\omega_m r^m) + k\big|A'(r)\big|^q\right)r^{m-1}\varphi(r)dr.$$

Используя тождества

$$\Phi(\omega_m r^m)\big|A'(r)\big|^{p-1}r^{m-1} = \frac{1}{m\omega_m}h(\omega_m r^m) \quad \text{и} \quad h'(\omega_m r^m) = f^*(\omega_m r^m) + k\big|A'(r)\big|^q, \tag{28}$$

мы сводим проверку последнего интегрального тождества к (27). Лемма доказана.

Замечание. Из определения функции V следует, что $V(x) = 0$ при $|x| = R$ и $V(x) > 0$ при $|x| < R$.

Лемма 11. *В условиях леммы 10, при дополнительных предположениях непрерывности функции f^* и непрерывной дифференцируемости функции Φ, функция V будет удовлетворять уравнению* (26) *в классическом смысле при* $0 < |x| < R$, $R = (|\Omega|/\omega_m)^{1/m}$.

Доказательство. Используя формулу $\frac{\partial V}{\partial x_j} = A'(r)\frac{x_j}{r}$ и тот факт, что $\mathrm{sign}A' \leqslant 0$, мы находим, что

$$\tilde{L}_0 V = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Phi(\omega_m r^m)|A'(r)|^{p-1}\frac{x_j}{r}\right).$$

Нетрудно вычислить, что:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{r^{-m}}{m\omega_m}h(\omega_m r^m)x_j\right) = \frac{x_j^2}{r^2}\left(h'(\omega_m r^m) - \frac{r^{-m}}{\omega_m}h(\omega_m r^m)\right) + \frac{r^{-m}}{m\omega_m}h(\omega_m r^m).$$

Применяя это тождество совместно с (28), получаем:

$$\tilde{L}_0 V = -\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{r^{-m}}{m\omega_m}h(\omega_m r^m)x_j\right) = h'(\omega_m r^m) = f^*(\omega_m r^m) + k|A'(r)|^q.$$

Учитывая определение функции $f^\star$, получаем утверждение леммы.

Для завершения доказательства теоремы 2 остается заметить, что неравенство (5) имеет неотрицательное решение тогда и только тогда, когда его максимальное решение неотрицательно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зорич, В. А. Математический анализ / В. А. Зорич. — М. : МЦНМО, 2007. — 1458 с.

2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1989. — 624 с.

3. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. — М. : Наука, 1974. — 480 с.

4. Полиа, Г. Изопериметрические неравенства в математической физике / Г. Полиа, Г. Сегё. — М. : ФМЛ, 1962. — 336 с.

5. Федерер, Г. Геометрическая теория меры / Г. Федерер. — М. : Наука, 1987. — 760 с.

6. Хадвигер, Г. Лекции об объеме площади поверхности и изопериметрии / Г. Хадвигер. — М. : Наука, 1966. — 416 с.

7. Alvino, A. Risultati di simmetrizzazione per soluzioni di disequazioni variazionali / A. Alvino, S. Matarasso, G. Trombetti // Le Matematiche. — 1999. — Vol. 54, № 3. — P. 15–28.

8. Bihari, I. A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations / I. Bihari // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1956. — Vol. 7, № 1. — P. 81–94. — DOI: http://dx.doi.org10.1007/BF02022967.

9. Chong, K. M. Equimeasurable Rearrangements of Functions. Queen's Papers in Pure and Appl. Math — No. 28 / K. M. Chong, N. M. Rice. — Kingston, Ontario, Canada : Queen's University, 1971. — vi+177 p.

10. Comparison results for solutions of elliptic problems via symmetrization / A. Alvino, G. Trombetti, P. L. Lions, S. Matarasso // Annales de l'IHP Analyse non linéaire. — 1999. — Vol. 16, № 2. — P. 167–188. — DOI: http://dx.doi.org/10.1016/S0294-1449(99)80011-0.

11. Elliptic equations and Steiner symmetrization / A. Alvino, G. Trombetti, J. I. Diaz, P. L. Lions // Communications on pure and applied mathematics. — 1996. — Vol. 49, № 3. — P. 217–236.

12. Fleming, W. H. An integral formula for total gradient variation / W. H. Fleming, R. Rishel // Archiv der Mathematik. — 1960. — Vol. 11, № 1. — P. 218–222. — DOI: http://dx.doi.org/10.1007/BF01236935.

13. Kesavan, S. Symmetrization and applications / S. Kesavan. — New Jersey : World Scientific, 2006. — xii+148 p.

14. Maderna, C. Dirichlet problem for elliptic equations with nonlinear first order terms: a comparison result / C. Maderna, S. Salsa // Annali di Matematica pura ed applicata. — 1987. — Vol. 148, № 1. — P. 277–288. — DOI: http://dx.doi.org/10.1007/BF01774293.

15. Talenti, G. Elliptic Equations and Rearrangements / G. Talenti // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. — 1976. — Vol. 3, № 4. — P. 667–718.

REFERENCES

1. Zorich V.A. *Matematicheskiy analiz* [Mathematical Analysis]. Moscow, MCCME, 2007. 1458 p.

2. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza* [Introductory Real Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 624 p.

3. Natanson I.P. *Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy* [Theory of Functions of a Real Variable]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 480 p.

4. Pólya G., Szegő G. *Izoperimetricheskie neravenstva v matematicheskoy fizike* [Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics]. Moscow, FML Publ., 1962. 336 p.

5. Federer H. *Geometricheskaya teoriya mery* [Geometric Measure Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 760 p.

6. Hadwiger H. *Lektsii ob obyeme ploshchadi poverkhnosti i izoperimetrii* [Vorlesungen Über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 416 p.

7. Alvino A., Matarasso S., Trombetti G. Risultati Di Simmetrizzazione Per Soluzioni Di Disequazioni Variazionali. *Le Matematiche*, 1999, vol. 54, no. 3, pp. 15-28.

8. Bihari I. A Generalization of a Lemma of Bellman and Its Application to Uniqueness Problems of Differential Equations. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 1956, vol. 7, no. 1, pp. 81-94. DOI: http://dx.doi.org10.1007/BF02022967.

9. Chong K.M., Rice N.M. *Equimeasurable Rearrangements of Functions. Queen's Papers in Pure and Appl. Math — No. 28.* Kingston, Ontario, Canada, Queen's University, 1971. vi+177 p.

10. Alvino A., Trombetti G., Lions P.L., Matarasso S. Comparison Results for Solutions of Elliptic Problems Via Symmetrization. *Annales de l'IHP Analyse non linéaire*, 1999, vol. 16, no. 2, pp. 167-188. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/S0294-1449(99)80011-0.

11. Alvino A., Trombetti G., Diaz J.I., Lions P.L. Elliptic Equations and Steiner Symmetrization. *Communications on pure and applied mathematics*, 1996, vol. 49, no. 3, pp. 217-236.

12. Fleming W.H., Rishel R. An Integral Formula for Total Gradient Variation. *Archiv der Mathematik*, 1960, vol. 11, no. 1, pp. 218-222. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/BF01236935.

13. Kesavan S. *Symmetrization and applications*. New Jersey, World Scientific, 2006. xii+148 p.

14. Maderna C., Salsa S. Dirichlet Problem for Elliptic Equations with Nonlinear First Order Terms: a Comparison Result. *Annali di Matematica pura ed applicata*, 1987, vol. 148, no. 1, pp. 277-288. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/BF01774293.

15. Talenti G. Elliptic Equations and Rearrangements. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser.*, 1976, vol. 3, no. 4, pp. 667-718.

COMPARISON OF SOLUTIONS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH LOADED LEVEL SETS

Boris Efimovich Levitskiy

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Function Theory,
Kuban State University
bel@kubsu.ru
Stavropolskaya St., 149, 350040 Krasnodar, Russian Federation

Andrei Eduardovich Biryuk

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Function Theory,
Kuban State University
abiryuk@kubsu.ru
Stavropolskaya St., 149, 350040 Krasnodar, Russian Federation

Abstract. We extend well-known comparison results to a class of partial differential equations with a divergent principal part containing a weight coefficient that depends on the measure of a level set of solution. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ be an open set with finite volume. Let $g_0(x,u) = \Phi\big(\text{meas}\,\{\chi \in \Omega : u(\chi) > u(x)\}\big)$, where Φ is a continuous nonnegative function. Let $u : \Omega \to [0,\infty)$ be a weak solution to

$$-\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(g(x,u) \cdot |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) = f(x) + k|\nabla u|^q,$$

subject to homogeneous boundary conditions, where $g(x,u) \geq g_0(x,u)$, $k \geq 0$ and $f \in L^1(\Omega)$. We prove that under certain assumptions there is a weak nonnegative solution $V : \Omega^\star \to [0,\infty)$ to homogeneous Dirichlet problem for

$$-\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(g_0(x,V) \cdot |\nabla V|^{p-2}\frac{\partial V}{\partial x_j}\Big) = f(x) + k|\nabla V|^q,$$

such that $u^\star \leqslant V$ and $\int_\Omega |\nabla u|^p dx \leqslant \int_{\Omega^\star} |\nabla V|^p dx$. Here $\Omega^\star$ is the open ball whose volume coincides with the volume of Ω and $u^\star$ is the Schwarz symmetrization of u.

Key words: comparison theorems, p-elliptic equations, degenerate nonlinearities.