DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.11

УДК 519.635
ББК 22.19

ЕЩЕ ОДИН СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Максим Леонидович Зайцев

Аспирант, соискатель,
Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН
mlzaytsev@gmail.com, mlzaytsev@mail.ru
ул. Большая Тульская, 52, 115191 г. Москва, Российская Федерация

Вячеслав Борисович Аккерман

PhD, кандидат физико-математических наук,
преподаватель кафедры механики, авиа- и ракетостроения,
Университет Западной Вирджинии
Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu
WV 26506-6106 Моргантаун, США

Аннотация. Предложен новый метод нахождения частных решений у любых систем дифференциальных уравнений, сводящийся к нахождению дополнительных уравнений связи и преобразованию этих систем к переопределенным системам неявных уравнений. Показывается, как, решая эти системы неявных уравнений, можно находить, в том числе, и аналитические решения исходной системы дифференциальных уравнений. Приводятся оценки для минимальной затраты вычислительных мощностей при получении этих редуцированных неявных уравнений.

Ключевые слова: переопределенные системы дифференциальных уравнений, ОДУ, размерность дифференциальных уравнений, частные и аналитические решения, уравнения в частных производных.

1

Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных (нелинейные уравнения математической физики) часто встречаются в различных областях математики, физики, механики, химии, биологии и в многочисленных приложениях [12]. Общее решение нелинейных уравнений математической физики удается получить только в исключительных случаях. Поэтому обычно приходится ограничиваться поиском и анализом частных решений, которые принято называть точными решениями [7; 11].

Точные решения дифференциальных уравнений математической физики всегда играли и продолжают играть важнейшую роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях науки и техники [12]. Можно сказать, что невозможность решить эти уравнения аналитически является препятствием для дальнейшего изучения многих физических явлений и применения их на практике. Допускающие точные решения модельные уравнения и задачи служат основой для разработки новых численных, асимптотических и приближенных методов, которые, в свою очередь, позволяют исследовать уже более сложные задачи, не имеющие точного аналитического решения.

Существуют различные приемы для поиска точных решений уравнений математической физики, например, метод дифференциальных связей [11]. В данной работе мы развиваем идеи наших предыдущих работ [1; 4; 5] и предлагаем новый метод нахождения частных решений систем дифференциальных уравнений, сводящийся к нахождению дополнительных уравнений связи и преобразованию этих систем в переопределенные системы неявных уравнений. Показывается, как, решая эти переопределенные системы неявных уравнений, можно находить, в том числе, и аналитические решения исходной системы дифференциальных уравнений или решать задачу Коши.

2

Рассмотрим переопределенную систему из $p + n$ дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_\nu(\mathbf{x})$, $\nu = 1 \dots p$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots x_m)$

$$H_k\left(\frac{\partial S_\nu}{\partial \mathbf{x}}, S_\nu, \mathbf{x}\right) = 0,\ \nu = 1 \dots p,\ k = 1 \dots (p+n). \tag{1}$$

Продифференцируем выражения (1) $N_1 - 1$ раз по переменной x_1, $N_2 - 1$ раз по переменной x_2, … $N_m - 1$ раз по переменной x_m. В результате получим систему неявных уравнений вида

$$P_\alpha\left(Q_\beta, \mathbf{x}\right) = \frac{\partial^{(i_1+\dots+i_m)}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}}\left[H_k\left(\frac{\partial S_\nu}{\partial \mathbf{x}}, S_\nu, \mathbf{x}\right)\right] = 0,\ \nu = 1 \dots p,\ k = 1 \dots (p+n) \tag{2}$$

относительно неизвестных вида

$$Q_\beta = \frac{\partial^{(j_1+\dots+j_m)} S_\nu}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_m^{j_m}},\ \nu = 1 \dots p. \tag{3}$$

Здесь $\alpha = \alpha(k, i_1, \dots i_m) = 1 \dots N_H$, $\beta = \beta(\nu, j_1, \dots j_m) = 1 \dots N_S$ – функции от индексов (мульти-индексов) такие, что $Q_{\beta(\nu,0,\dots0)} = S_\nu$, $\nu = 1 \dots p$, и

$$i_1 = 0 \dots (N_1 - 1),\ i_2 = 0 \dots (N_2 - 1),\ \dots\ i_m = 0 \dots (N_m - 1). \tag{4}$$

$$j_1 = 0 \dots N_1,\ j_2 = 0 \dots N_2,\ \dots\ j_m = 0 \dots N_m. \tag{5}$$

Если решение системы (1) существует, то оно удовлетворяет системе неявных уравнений (2). Очевидно, количество уравнений (2), учитывая (4), равно

$$N_H = (p+n) N_1 N_2 \dots N_m, \tag{6}$$

а количество неизвестных (3), учитывая (5), равно

$$N_S = p \cdot (N_1 + 1)(N_2 + 1) \dots (N_m + 1). \tag{7}$$

Из (2)–(5) видно, что реально некоторые высшие производные (3) не входят в выражения (2), то есть на самом деле от некоторых неизвестных Q_β выражения P_α не зависят. Выберем такие N_1, … N_m, чтобы выполнялось неравенство $N_S < N_H$ (см.: (6)–(7)), то есть

$$p \cdot (N_1 + 1)(N_2 + 1) \dots (N_m + 1) < (p+n) N_1 N_2 \dots N_m$$

или

$$\left(1+\frac{1}{N_1}\right)\left(1+\frac{1}{N_2}\right)...\left(1+\frac{1}{N_m}\right)<\left(1+\frac{n}{p}\right). \tag{8}$$

Рассмотрим частный случай $N = N_1 = N_2 = ... = N_m$. Тогда условие (8) означает, что

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^m<\left(1+\frac{n}{p}\right)$$

или

$$N>\frac{1}{\left(1+\frac{n}{p}\right)^{\frac{1}{m}}-1}$$

или

$$N>\frac{mp}{n} \text{ и } N_H=(p+n)N^m>(p+n)\left(\frac{mp}{n}\right)^m. \tag{9}$$

В случае переопределенных уравнений Навье – Стокса, полученных авторами в работах [1; 4; 5], имеем $m = 4$, $p \sim 10$, $n = 1$, значит, из (9) $N_{\min} = mp / n \approx 40$ и $N_{H\min} = (p + n)(mp / n)^m \approx 10^7$.

3

Рассмотрим матрицу [2]

$$A_{\alpha\beta}=\left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial Q_\beta}\right),\ \alpha=1...N_H,\ \beta=1...N_S. \tag{10}$$

Разберем **расширенную** переопределенную систему неявных уравнений вида

$$P_\alpha\left(Q_\beta,\mathbf{x}\right)=\frac{\partial^{(i_1+...+i_m)}}{\partial x_1^{i_1}...\partial x_m^{i_m}}\left[H_k\left(\frac{\partial S_\nu}{\partial \mathbf{x}},S_\nu,\mathbf{x}\right)\right]=0,\ \nu=1...p,\ k=1...(p+n) \tag{11}$$

относительно неизвестных вида

$$Q_\beta=\frac{\partial^{(j_1+...+j_m)}S_\nu}{\partial x_1^{j_1}...\partial x_m^{j_m}},\ \nu=1...p. \tag{12}$$

Но функции от мульти-индексов $\alpha=\alpha(k,i_1,...i_m)$, $\beta=\beta(\nu,j_1,...j_m)$, в отличие от (4), (5), пусть определяются из условий:

$$i_1=0...N_1,\ i_2=0...N_2,\ ...\ i_m=0...N_m, \tag{13}$$

$$j_1=0...(N_1+1),\ j_2=0...(N_2+1),\ ...\ j_m=0...(N_m+1). \tag{14}$$

Система уравнений (11) (с индексами из (13)) включает в себя систему уравнений (2). Неизвестных (12) (с индексами из (14)) несколько больше неизвестных (3). Докажем следующее утверждение.

Утверждение. *Любая система из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, переопределенная любыми n дифференциальными уравнениями первого порядка (1) и редуцированная изложенным выше методом, переопределенная расширенная система неявных уравнений вида (11) от неизвестных вида (12) имеют одинаковое множество решений, если ранг матрицы (10) (на каждом решении этой расширенной системы неявных уравнений) равен количеству неизвестных Q_β, реально присутствующих в уравнениях (2).*

Подсчет показывает, что это число не более

$$N_S^{real} \le N_H \frac{p}{(p+n)}\left(1+\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{N_l}\right). \tag{15}$$

Поскольку мы допускаем, что ранг матрицы (10) равен N_S^{real}, значит, существует N_S^{real} независимых уравнений из системы (2) от такого же числа неизвестных [6; 13]. Обозначим их как

$$P_{\alpha_l}\left(Q_{\beta_l},\mathbf{x}\right)=0,\ l=1...N_S^{real}. \tag{16}$$

Здесь $\alpha_l=\alpha\left(k^l,i_1^l,...i_m^l\right)$, $\beta_l=\beta\left(v^l,j_1^l,...j_m^l\right)$. Продифференцируем уравнения (16) по переменной x_s, $1\le s\le m$. Имеем

$$\sum_{l^*=1}^{N_S^{real}}\frac{\partial P_{\alpha_l}}{\partial Q_{\beta_{l^*}}}\frac{\partial Q_{\beta_{l^*}}}{\partial x_s}+\frac{\partial P_{\alpha_l}\left(Q_{\beta_l},\mathbf{x}\right)}{\partial x_s}=0,\ l=1...N_S^{real}. \tag{17}$$

С другой стороны, из определения уравнений (11) следует, что

$$P_{\tilde{\alpha}_l}\left(Q_{\beta_l},\mathbf{x}\right)=\sum_{l^*=1}^{N_S^{real}}\frac{\partial P_{\alpha_l}}{\partial Q_{\beta_{l^*}}}Q_{\tilde{\beta}_{l^*}}+\frac{\partial P_{\alpha_l}\left(Q_{\beta_l},\mathbf{x}\right)}{\partial x_s}=0,\ l=1...N_S^{real}, \tag{18}$$

где $\tilde{\alpha}_l=\alpha\left(k^l,i_1^l,...\left(i_s^l+1\right)...i_m^l\right)$, $\tilde{\beta}_l=\beta\left(v^l,j_1^l,...\left(j_s^l+1\right)...j_m^l\right)$.

Вычтем почленно из выражений (18) выражения (17). Тогда

$$\sum_{l^*=1}^{N_S^{real}}\frac{\partial P_{\alpha_l}}{\partial Q_{\beta_{l^*}}}\left(Q_{\tilde{\beta}_{l^*}}-\frac{\partial Q_{\beta_{l^*}}}{\partial x_s}\right)=0,\ l=1...N_S^{real}. \tag{19}$$

В силу нашего предположения относительно независимости уравнений (16) из выражений (19) следует [2]

$$\left(Q_{\tilde{\beta}_l}-\frac{\partial Q_{\beta_l}}{\partial x_s}\right)=0 \text{ или } Q_{\tilde{\beta}_l}=\frac{\partial Q_{\beta_l}}{\partial x_s},\ l=1...N_S^{real}. \tag{20}$$

Таким образом, мы доказали, что для каждой переменной x_s, $1\le s\le m$ выполняется соотношение (20). Отсюда, учитывая, что по определению $Q_{\beta(\nu,0,...0)}=S_\nu(\mathbf{x})$, $\nu=1\ ...\ p$, следует

$$Q_{\beta(v,j_1,...j_m)}=\frac{\partial Q_{\beta(v,j_1-1,...j_m)}}{\partial x_1}=...=\frac{\partial^{j_1}Q_{\beta(v,0,...j_m)}}{\partial x_1^{j_1}}=...=\frac{\partial^{(j_1+j_2)}Q_{\beta(v,0,0...j_m)}}{\partial x_1^{j_1}\partial x_2^{j_2}}=...$$

$$...=\frac{\partial^{(j_1+...+j_m)}Q_{\beta(v,0,...0)}}{\partial x_1^{j_1}...\partial x_m^{j_m}}=\frac{\partial^{(j_1+...+j_m)}S_v}{\partial x_1^{j_1}...\partial x_m^{j_m}}. \tag{21}$$

В итоге мы показали, что функции $S_\nu(\mathbf{x})$, $\nu=1\ ...\ p$ являются решением (1), а величины (3) являются соответствующими частными производными этого решения (21).

Утверждение предлагает некоторое достаточное условие для существования сразу аналитического решения у переопределенных систем дифференциальных уравнений.

Это утверждение описывает некоторый прием для получения частных решений систем дифференциальных уравнений. А именно нужно выбрать уравнения связи таким образом, чтобы имело «хорошее» решение некоторая переопределенная система неявных уравнений, из которой находится частное решение.

Из формулы (8) следует, что

$$\left(1+\frac{n}{p}\right)>\left(1+\frac{1}{N_1}\right)\left(1+\frac{1}{N_2}\right)...\left(1+\frac{1}{N_m}\right)\geq 1+\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}+...+\frac{1}{N_m}. \tag{22}$$

Следовательно, из (22) следует

$$\frac{n}{p}>\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}+...+\frac{1}{N_m}. \tag{23}$$

В частности, из (23) следует

$$N_l>\frac{p}{n},\ 1\leq l\leq m. \tag{24}$$

Тогда, используя известное соотношение между средним геометрическим, гармоническим и (23), мы имеем оценку для минимального количества редуцированных уравнений:

$$N_H=(p+n)N_1N_2...N_m\geq(p+n)\left(\frac{m}{\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}+...+\frac{1}{N_m}}\right)^m>(p+n)\left(\frac{mp}{n}\right)^m. \tag{25}$$

Как было показано выше (9), она реализуется при $N=N_1=N_2=...=N_m\approx mp/n$. Если использовать выражения из (15) вместо (7), то мы получим такие же результаты (25).

4

Рассмотрим для примера следующую переопределенную систему ОДУ (осциллятор) [8; 9]:

$$\dot{u}=-v, \tag{26}$$

$$\dot{v}=u, \tag{27}$$

$$u+v=\cos(t)+\sin(t). \tag{28}$$

Уравнения (26)–(28) имеют одно общее гармоническое решение

$$u=\cos(t),\ v=\sin(t). \tag{29}$$

Покажем, что оно в данной постановке задачи единственное. Здесь $p=2$, $n=1$, $m=1$. Из формулы (24) следует, что $N_1>p/n=2$, то есть $N_1\geq 3$. Продифференцируем уравнения (26)–(28) по переменной t $N_1-1=2$ раза. Тогда

$$\ddot{u}=-\dot{v}, \tag{30}$$

$$\ddot{v}=\dot{u}, \tag{31}$$

$$\dot{u}+\dot{v}=\cos(t)-\sin(t), \tag{32}$$

$$\dddot{u}=-\dddot{v}, \tag{33}$$

$$\dddot{v}=\ddot{u}, \tag{34}$$

$$\ddot{u}+\ddot{v}=-\cos(t)-\sin(t). \tag{35}$$

Мы имеем переопределенную линейную систему из 9 неявных уравнений (26)–(28) и (30)–(35) и 8 неизвестных u, v, $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\ddot{u}$, $\ddot{v}$, $\dddot{u}$ и $\dddot{v}$. Матрица (10) имеет вид:

$$A_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Определитель матрицы, составленной из первых 8 строк и столбцов матрицы (36), отличен от нуля. Следовательно, ее ранг равен 8, то есть количеству переменных в системе (26)–(28) и (30)–(35) [2]. Дополним систему (26)–(28) и (30)–(35) до расширенной. Продифференцируем уравнения (33)–(35) по переменной t. Тогда

$$u^{(4)}=-\dddot{v}, \tag{37}$$

$$v^{(4)}=\dddot{u}, \tag{38}$$

$$\dddot{u}+\dddot{v}=-\cos(t)+\sin(t). \tag{39}$$

Система неявных линейных уравнений (26)–(28), (30)–(35) и (37)–(39) имеет только одно общее решение

$$u=\dot{v}=-\ddot{u}=-\dddot{v}=u^{(4)}=\cos(t),\ v=-\dot{u}=-\ddot{v}=\dddot{u}=v^{(4)}=\sin(t). \tag{40}$$

Следовательно, согласно нашему **утверждению** это решение (40) является решением переопределенной системы ОДУ (26)–(28), и других решений эта система не имеет. Соотношение (28) выделяет из системы (26)–(27) только одно решение (29). Интерес представляет некоторое обобщение этого результата, а именно если к системе (26)–(28) добавить произвольную внешнюю силу, а также заменить в уравнении связи (28) правую часть на произвольную функцию от времени (взятую, например, из измерений в эксперименте), то аналогичными рассуждениями получим, что решение новой системы уравнений будет находиться из линейной системы уравнений (26)–(28), (30)–(35) и (37)–(39), но с другой правой частью (в виде конкретной формулы). Причем если это решение не существует, то не существует решение и исходной обобщенной системы. А если существует, то оно единственно [2].

В среде MATHCAD авторами были исследованы и другие модельные примеры в двухмерном случае, в том числе и из работы авторов [4]. К сожалению, возможности среды MATHCAD ограничены размером оперативной памяти ЭВМ. Удается только промоделировать системы порядка ста уравнений, которые, естественно, мы не можем представить в данной работе в явном виде, хотя сам алгоритм получения решений переопределенных систем УрЧП, как видится авторам, довольно простой. Отдельная программа символьными операциями создает систему неявных уравнений, а другая стандартными численными методами эту систему решает, используя результаты предыдущей программы как входные данные. Авторам представляется, что данная задача вызовет интерес для творчества у профессиональных программистов-математиков.

5

Предлагаемый в данной статье прием разработан и применим к любым системам дифференциальных уравнений в частных производных. Требуется только существование **независимого** переопределения, с помощью которого производится редукция исходной системы дифференциальных уравнений до переопределенной системы неявных уравнений. Если это будет сделано для любого определенного достаточно гладкого решения (например, выделенного с помощью задачи Коши), то мы можем найти аналитическое решение исходной системы дифференциальных уравнений в предположении его достаточной гладкости. В работах авторов [1; 4; 5] это переопределение пока только предлагается, в частности, для уравнений гидродинамики. Трудность заключается в том, что количество редуцированных неявных уравнений быстро растет с увеличением числа переменных в исходной системе дифференциальных уравнений (см.: (25)). То есть, чтобы их выписать и решить, необходимо произвести большое количество символьных операций. Для этого существуют специальные программы (MATHEMATICA, MATHCAD и др.) и среды, например, Лисп.

Во втором разделе статьи дана оценка количеству редуцированных неявных уравнений для некоторых переопределенных систем дифференциальных уравнений математической физики, полученных авторами в более ранних работах [1; 4; 5]. Мы видим, что это число может быть просто огромным. Одним из выходов может стать следующее: нужно стремиться получить как можно больше уравнений связи, чтобы как можно меньше было отношение mp / n (см.: (25)).

Следует отметить, что в работах авторов [1; 4; 5] производилось только преобразование от систем дифференциальных уравнений по объему к системам дифференциальных уравнений на поверхности. В форме гипотезы очевидным образом показывалась возможность дальнейшего сокращения размерности вплоть до полного решения задачи Коши или аналитического решения. Однако никаких условий, при которых обратно из огромного множества решений системы обыкновенных неявных уравнений выделялось именно нужное решение, удовлетворяющее исходной системе УрЧП, не приводилось. В данной работе показывается, какого именно числа систему редуцированных неявных уравнений нужно строить и решать и какое условие на определитель должно при этом выполняться. То есть все, что нужно для решения этой задачи на ЭВМ. Для удобства в предыдущих работах количество уравнений связи единица, в данной работе это число неограниченно.

Переопределенные системы уравнений, рассматриваемые в статье, использовались в теоретической физике и изучались и ранее, в частности, Картаном [10]. Может показаться, что предлагаемый в статье метод есть частный случай метода дифференциальных связей [11], являющийся обобщением метода теории групп. Однако сходство заключается только в наличии переопределенности и некоторой аналогии преобразований уравнений связи. В методе дифференциальных связей все равно необходимо решать дифференциальные уравнения определенного вида, тогда как в предлагаемом методе все сводится к решению систем обыкновенных неявных уравнений.

С помощью данного метода можно просто производить редукцию переопределенных систем дифференциальных уравнений, убирая производные у неизвестных функций по одной или нескольким переменным, но увеличивая их гладкость.

Заметим также, что относительно переменных Q_β, где $\beta = \beta\left(v, j_1, \ldots j_m\right)$ и $\left(j_1 + \ldots j_m\right) > 1$ система уравнений (11) алгебраическая (полиномиальная). Для таких систем созданы мощные методы нахождения их решений [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аккерман, В. Б. Снижение размерности в уравнениях гидродинамики / В. Б. Аккерман, М. Л. Зайцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 8. – С. 1518–1530.

2. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.

3. Бухбергер, Б. Базисы Гребнера. Алгоритмический метод в теории полиномиальных идеалов / Б. Бухбергер // Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления. – М. : Мир, 1986. – С. 331–372.

4. Зайцев, М. Л. Гипотеза об упрощении переопределенных систем дифференциальных уравнений и ее применение к уравнениям гидродинамики / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Вестник ВГУ. Серия «Физика. Математика». – 2015. – № 2. – С. 5–27.

5. Зайцев, М. Л. Задача обтекания и сокращение размерности в уравнениях Навье – Стокса / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Труды МФТИ. – 2015. – Т. 7, № 3. – С. 18–30.

6. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Дрофа, 2003. – 704 с.

7. Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М. : Мир, 1964. – 830 с.

8. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. В 10 т. Т. I. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 216 с.

9. Лурье, А. И. Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М. : ГИФМЛ, 1961. – 824 с.

10. Полянин, А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 256 с.

11. Сидоров, А. Ф. Метод дифференциальных связей и его приложения к газовой динамике / А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко. – Новосибирск : Наука, 1984. – 271 с.

12. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1966. – 742 с.

13. Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк. – СПб. : Лань, 2003. – 448 с.

REFERENCES

1. Akkerman V.B., Zaytsev M.L. Snizhenie razmernosti v uravneniyakh gidrodinamiki [Dimension Reduction in Fluid Dynamics Equations]. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2011, vol. 8, no. 2, pp. 1418-1430.

2. Beklemishev D.V. *Kurs analiticheskoy geometrii i lineynoy algebry* [Course of Analytical Geometry and Linear Algebra]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 304 p.

3. Bukhberger B. Bazisy Grebnera. Algoritmicheskiy metod v teorii polinomialnykh idealov [Groebner Bases. Algorithmic Method in the Theory of Polynomial Ideals]. *Kompyuternaya algebra. Simvolnye i algebraicheskie vychisleniya* [Computer Algebra. The Symbolic and Algebraic Computation]. Moscow, Mir Publ., 1986, pp. 331-372.

4. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Gipoteza ob uproshchenii pereopredelennykh sistem differentsialnykh uravneniy i ee primenenie k uravneniyam gidrodinamiki [Hypothesis on Reduction of Overdetermined Systems of Differential Equations and its Application to Equations of Hydrodynamics]. *Vestnik VGU*, 2015, no. 2, pp. 5-27.

5. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Zadacha obtekaniya i sokrashchenie razmernosti v uravneniyakh Navie – Stoksa [Flow Problem and Dimension Reduction in the Navier – Stokes Equations]. *Trudy MFTI*, 2015, vol. 7, no. 3, pp. 18-30.

6. Kudryavtsev L.D. *Kurs matematicheskogo analiza: v 3 t.* [Mathematical Analysis Course. In 3 vols.]. Moscow, Drofa Publ., 2003. 704 p.

7. Kurant R. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations]. Moscow, Mir Publ., 1964. 830 p.

8. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Teoreticheskaya fizika. V 10 t. T. 1. Mekhanika* [Course of Theoretical Physics. In 10 vols. Vol. 1. Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 216 p.

9. Lurye A.I. *Analiticheskaya mekhanika* [Analytical Mechanics]. Moscow, GIFML Publ., 1961. 824 p.

10. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. *Metody resheniya uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki* [Methods for Solution of Equations of Mathematical Physics and Mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 256 p.

11. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N. *Metod differentsialnykh svyazey i ego prilozheniya k gazovoy dinamike* [Method of Differential Constraints and Its Application to Gas Dynamics]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1984. 271 p.

12. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 742 p.

13. Fedoryuk M.V. *Obyknovennye differentsialnye uravneniya* [Ordinary Differential Equations]. Saint Petersburg, Lan Publ., 2003. 448 p.

ANOTHER METHOD FOR FINDING PARTICULAR SOLUTIONS OF EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

Maxim Leonidovich Zaytsev

Postgraduate Student, Candidate for a Degree,
Institute of Nuclear Safety, Russian Academy of Sciences
mlzaytsev@gmail.com, mlzaytsev@mail.ru
Bolshaya Tulskaya St., 52, 115191 Moscow, Russian Federation

Vyacheslav Borisovich Akkerman

PhD, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor,
Department of Mechanics and Aerospace Engineering,
West Virginia University
Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu
WV 26506-6106 Morgantown, USA

Abstract. Differential equations of Mathematical Physics and their partial solutions are analyzed by means of analytical endeavors. While a possibility of reducing the dimension of the overdetermined systems of ordinary differential equations (ODEs) was shown in our previous studies, such that consistent reduction of these equations yielded partial solutions of the original system of partial differential equations (PDEs), here we consider an arbitrary overdetermined system of 1st-oder PDEs, with the number of equations exceeding that of unknown variables. Specifically, these equations are differentiated with respect to all the variables certain times. As a result, a new set of implicit equations is obtained, with the number of equations exceeding the number of unknown variables, and with these unknown variables being all the unknown functions of the previous system, as well as their derivatives. This new equations are solved, and it is demonstrated that such a solution appears also either the solution to the initially-determined system of equations or the corresponding partial derivatives of this solution unless the Jacobian is not identically zero. If an original overdetermination of the system of differential equations is performed by means of a Cauchy problem, then the solution to this Cauchy problem is among the solution of the system. This method allows finding the analytical solution of the system as long as the system is overdetermined for any sufficiently smooth solution. It is shown that the number of reduced implicit equations can be very large. A number of these reduced implicit equations, in which the minimum cost of computing power is required, is estimated. In particular, this method is employed to the oscillator equations. In summary, a potential computational realization of this method is discussed, including the need to produce a large number of symbol operations, and comparing this method with the method of differential links.

Key words: overdetermined systems of differential equations, ODE, dimension of differential equations, particular and analytical solutions, partial differential equations.