



DOI: <https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.15>

УДК 004.94, 519.63

ББК 22.193

## СРАВНЕНИЕ ТОЧНОСТИ И СХОДИМОСТИ ДЛЯ МЕТОДА CSPH — TVD И НЕКОТОРЫХ ЭЙЛЕРОВЫХ СХЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОДИНАМИКИ<sup>1</sup>

**Сергей Сергеевич Храпов**

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем и компьютерного моделирования,  
Волгоградский государственный университет  
xss-ip@mail.ru, infomod@volsu.ru  
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Николай Михайлович Кузьмин**

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем и компьютерного моделирования,  
Волгоградский государственный университет  
nikolay.kuzmin@volsu.ru  
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Мария Анатольевна Бутенко**

Старший преподаватель кафедры информационных систем и компьютерного моделирования,  
Волгоградский государственный университет  
maria\_butenko@volsu.ru  
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Аннотация.** В работе представлены результаты исследования точности и сходимости методов CSPH — TVD, MUSCL, PPM и WENO для решения уравнений идеальной газодинамики в одномерном случае на примере задачи о распаде разрыва.

**Ключевые слова:** численное моделирование, газодинамика, лагранжево-эйлеров подход, порядок сходимости, точность численного решения.

## Введение

Многие физические процессы описываются с помощью уравнений газодинамики. В силу их нелинейности точные или приближенные аналитические решения могут быть получены лишь для ограниченного числа частных случаев. Поэтому, как правило, для решения газодинамических задач применяют различные численные методы.

Одним из таких методов является численная схема CSPH — TVD (Combined Smooth Particle Hydrodynamics — Total Variation Diminishing). Она была впервые предложена в работе [10] для интегрирования уравнений мелкой воды на нерегулярном рельефе. Этот метод основан на последовательном применении лагранжева (SPH) и эйлерова (TVD) подходов.

В дальнейшем было сделано обобщение этой численной схемы для уравнений идеальной газодинамики [1]. Отметим также работу [12], в которой приведено описание метода SPH — PPM, являющегося расширением CSPH — TVD на случай кусочно-параболического распределения газодинамических параметров внутри эйлеровых ячеек. В работе [11] проанализировано влияние ограничителей наклонов и способов приближенного решения задачи Римана на точность метода CSPH — TVD.

В данной работе приведены результаты исследования точности и сходимости для методов CSPH — TVD, MUSCL [18], PPM [13] и WENO [15].

## 1. Постановка задачи

Динамику невязкого нетеплопроводного газа в отсутствие внешних сил для одномерного случая можно описать с помощью уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e + p)u \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $x$  — декартова координата;  $t$  — время;  $\rho$  — плотность;  $u$  — скорость;  $p$  — давление;  $e$  — объемная плотность энергии. Система уравнений (1) замыкается уравнением на объемную плотность энергии:

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho u^2}{2}, \quad (2)$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты.

Будем интересоваться численным решением задачи о распаде газодинамического разрыва для уравнений (1), (2) в точке  $x_0$  с начальными условиями

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1), & x < x_0, \\ (0.125, 0, 0.1), & x_0 \leq x, \end{cases} \quad (3)$$

для  $\gamma = 1.4$ . В качестве граничных условий будем использовать условия свободного протекания.

## 2. Сравнение результатов для различных методов решения

Для численного решения применялись методы CSPH — TVD, MUSCL [18], PPM [13] и WENO [15].

В численных схемах CSPH — TVD, MUSCL и PPM был использован метод HLL [14] для решения задачи Римана; в схемах CSPH — TVD и MUSCL использовался ограничитель наклонов ван Лира [17]. Для схемы WENO применялось расщепление потоков методом Лакса — Фридрихса [16], сеточные шаблоны для пятого порядка точности по пространству и метод Рунге — Кутты третьего порядка по времени для интегрирования по времени.

Для расчетов точности и сходимости вычислялись относительные ошибки для плотности в нормах  $L^1$ ,  $L^2$  и  $L^\infty$ :

$$E_N^{L^1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\rho_i^n - \rho_i^e}{\rho_i^e} \right| \times 100 \%, \quad (4)$$

$$E_N^{L^2} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\rho_i^n - \rho_i^e}{\rho_i^e} \right)^2} \times 100 \%, \quad (5)$$

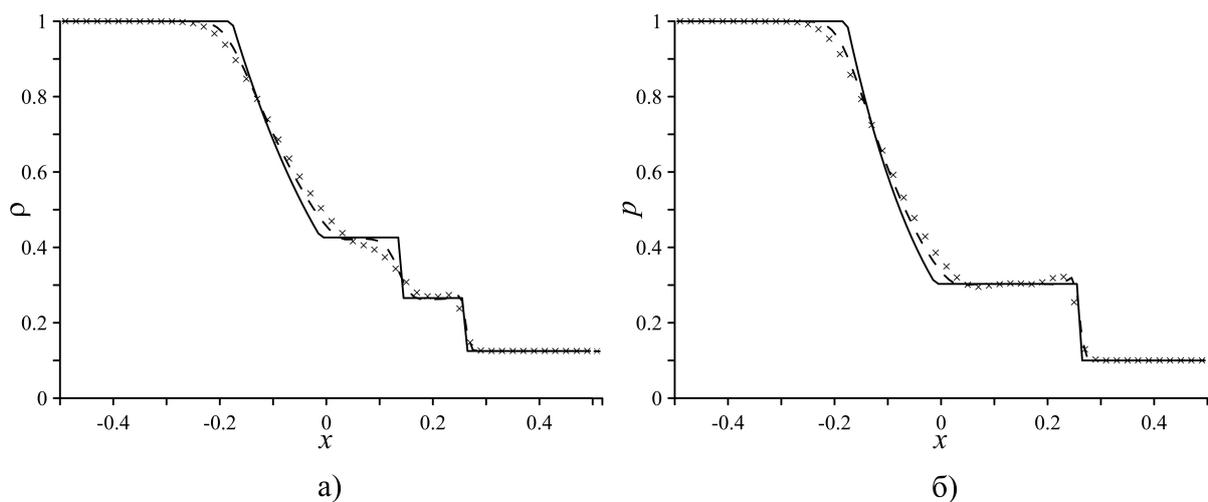
$$E_N^{L^\infty} = \frac{1}{N} \max_{i=1}^N \left| \frac{\rho_i^n - \rho_i^e}{\rho_i^e} \right| \times 100 \%, \quad (6)$$

где  $\rho^e$  — результаты аналитического решения;  $\rho^n$  — численного;  $N$  — количество расчетных ячеек.

Порядок сходимости для всех норм при использовании сеток с числом ячеек  $N_1$  и  $N_2 = 2N_1$  вычислялся по формуле

$$O_{N_1-N_2} = \log_2 \frac{E_{N_1}}{E_{N_2}}. \quad (7)$$

На рисунке показаны полученные с использованием метода CSPH — TVD распределения плотности и давления в момент времени  $t = 0.15$  для различного числа расчетных ячеек в сравнении с точным решением.



Распределение плотности (а) и давления (б) в момент времени  $t = 0.15$ . Крестиками показано численное решение для  $N = 50$ , пунктирной линией — для  $N = 100$ , сплошной линией показано точное решение

Относительные ошибки и порядки сходимости для рассматриваемых методов представлены в таблицах 1, 2, 3. Отметим, что для вычислений использовались только значения в области  $x < x_0$ , не содержащей разрывов первого рода.

Таблица 1

**Относительные ошибки и порядки сходимости в норме  $L^1$**

Схема	$E_{50}$	$O_{50-100}$	$E_{100}$	$O_{100-200}$	$E_{200}$	$O_{200-400}$	$E_{400}$
MUSCL	1.55	1.03	0.76	0.99	0.38	1.0	0.19
PPM	1.02	1.01	0.5	0.99	0.25	1.02	0.12
WENO	1.99	0.96	1.03	0.94	0.53	0.98	0.27
CSPH — TVD	3.3	0.78	1.92	0.8	1.1	0.83	0.62

Таблица 2

**Относительные ошибки и порядки сходимости в норме  $L^2$**

Схема	$E_{50}$	$O_{50-100}$	$E_{100}$	$O_{100-200}$	$E_{200}$	$O_{200-400}$	$E_{400}$
MUSCL	0.56	1.5	0.2	1.43	0.07	1.47	0.03
PPM	0.45	1.5	0.16	1.4	0.06	1.45	0.02
WENO	0.73	1.43	0.27	1.38	0.1	1.42	0.04
CSPH — TVD	1.19	1.26	0.5	1.25	0.21	1.27	0.09

Таблица 3

**Относительные ошибки и порядки сходимости в норме  $L^\infty$**

Схема	$E_{50}$	$O_{50-100}$	$E_{100}$	$O_{100-200}$	$E_{200}$	$O_{200-400}$	$E_{400}$
MUSCL	0.32	1.97	0.08	1.69	0.02	1.82	0.01
PPM	0.36	1.94	0.09	1.67	0.03	1.76	0.01
WENO	0.47	1.86	0.13	1.69	0.04	1.7	0.01
CSPH — TVD	0.73	1.75	0.22	1.61	0.07	1.58	0.02

Из таблиц 1, 2, 3 следует, что относительные ошибки и порядки сходимости всех рассмотренных численных схем довольно близки для рассматриваемого случая (3), что может быть обусловлено наличием в структуре решения слабого разрыва (разрыва второго рода), которые присутствуют в решениях практически всех газодинамических задач. Отметим, что наличие слабого разрыва как раз и позволяет понять свойства численных схем в условиях реальных расчетов, а не синтетических тестов с переносом гладких профилей (вопрос о точности численного решения в окрестности сильного разрыва рассматривать здесь не будем).

### Заключение

Проведенное исследование показывает, что метод CSPH — TVD имеет сопоставимые с популярными эйлеровыми численными схемами точность и сходимость. Отличительной его чертой является возможность расчетов на границе с вакуумом без необходимости дополнительной регуляризации, что успешно применяется при решении различных газодинамических задач: [2; 6–9; 19].

Отметим также, что данный метод может быть применен при решении задач для различных предметных областей, подобных описанным в [3–5].

## ПРИМЕЧАНИЕ

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области (гранты 16-07-01037 А, 16-02-00649 А, 15-02-06204 А, 15-45-02655-р\_поволжье\_а).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жумалиев, А. Г. Численная схема  $s\text{SPH} - \text{TVD}$ : моделирование фронта ударной волны / А. Г. Жумалиев, С. С. Храпов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2012. — № 2 (17). — С. 60–67.
2. Задача управления гидрологическим режимом в эколого-экономической системе «Волжская ГЭС — Волго-Ахтубинская пойма». Ч. 1. Моделирование динамики поверхностных вод в период весеннего паводка / А. В. Хоперсков, С. С. Храпов, А. В. Писарев, А. А. Воронин, М. В. Елисеева, И. А. Кобелев // Проблемы управления. — 2012. — № 5. — С. 18–25.
3. Информационно-компьютерный комплекс для моделирования динамики примесей от предприятий химической промышленности / А. А. Белослудцев, Д. В. Гусаров, М. А. Еремин, Н. М. Кузьмин, С. А. Хоперсков, С. С. Храпов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2009. — № 13. — С. 95–102.
4. Кузьмин, Н. М. Численное моделирование эволюции неустойчивых мод джетов, выходящих из молодых звездных объектов / Н. М. Кузьмин, В. В. Мусцовой, С. С. Храпов // Астрономический журнал. — 2007. — Т. 84, № 12. — С. 1089–1098.
5. Кузьмин, Н. М. Численный код для расчета аспирационных течений в промышленных цехах / Н. М. Кузьмин, М. А. Бутенко // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2015. — № 5 (30). — С. 51–59.
6. Писарев, А. В. Численная схема на основе комбинированного подхода  $\text{SPH} - \text{TVD}$ : проблема моделирования сдвиговых течений / А. В. Писарев, С. С. Храпов, А. В. Хоперсков // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2011. — № 2 (15). — С. 138–141.
7. Проектирование системы эколого-экономического управления территорией Волго-Ахтубинской поймы на основе гидродинамического и геоинформационного моделирования / А. А. Воронин, А. А. Васильченко, М. В. Писарева, А. В. Писарев, А. В. Хоперсков, С. С. Храпов, Ю. В. Подщипкова // Управление большими системами : сб. тр. — 2015. — № 55. — С. 79–102.
8. Храпов, С. С. Моделирование динамики поверхностных вод / С. С. Храпов, А. В. Хоперсков, М. А. Еремин. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2010. — 132 с.
9. Численная модель динамики поверхностных вод в русле Волги: оценка коэффициента шероховатости / А. В. Писарев, С. С. Храпов, Е. О. Агафонникова, А. В. Хоперсков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2013. — № 1. — С. 114–130.
10. Численная схема для моделирования динамики поверхностных вод на основе комбинированного  $\text{SPH-TVD}$  подхода / С. С. Храпов, А. В. Хоперсков, Н. М. Кузьмин, А. В. Писарев, И. А. Кобелев // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. — 2011. — Т. 12, № 1. — С. 282–297.
11. Численная схема  $s\text{SPH-TVD}$ : исследование влияния ограничителей наклонов / Н. М. Кузьмин, А. В. Белоусов, Т. С. Шушкевич, С. С. Храпов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2014. — № 1 (20). — С. 22–34.
12. Шушкевич, К. С. Одномерная численная схема для газодинамического моделирования на основе комбинированного подхода  $\text{SPH-PPM}$  / К. С. Шушкевич, Н. М. Кузьмин

// Вестник магистратуры. — 2013. — № 5 (20). — С. 40–44.

13. Colella, P. The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations / P. Colella, P. R. Woodward // *Journal of Computational Physics*. — 1984. — Vol. 54, № 1. — P. 174–201.

14. Harten, A. On upstream differencing and Godunov type methods for hyperbolic conservation laws / A. Harten, P. Lax, B. van Leer // *SIAM Review*. — 1983. — Vol. 25, № 1. — P. 35–61.

15. Jiang, G.-S. Efficient implementation of weighted ENO schemes / G.-S. Jiang, C. W. Shu // *Journal of Computational Physics*. — 1996. — Vol. 126, № 1. — P. 202–228.

16. Lax, P. D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation / P. D. Lax // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. — 1954. — Vol. 7, № 1. — P. 159–193.

17. Leer, B. van. Towards the ultimate conservative difference scheme. III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow / B. van Leer // *Journal of Computational Physics*. — 1977. — Vol. 23, № 3. — P. 263–275.

18. Leer, B. van. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's method / B. van Leer // *Journal of Computational Physics*. — 1979. — Vol. 32, № 1. — P. 101–136.

19. The numerical simulation of shallow water: estimation of the roughness coefficient on the flood stage / S. S. Khrapov, A. V. Pisarev, I. A. Kobelev, A. G. Zhumaliev, E. O. Agafonnikova, A. G. Losev, A. V. Khoperskov // *Advances in Mechanical Engineering*. — 2013. — Vol. 2013. — Article ID: 787016. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/787016>.

## REFERENCES

1. Zhumaliev A.G., Khrapov S.S. Chislennaya skhema cSPH — TVD: modelirovanie fronta udarnoy volny [Numerical Scheme CSPH — TVD: Front of Shock Wave Simulation]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2012, no. 2 (17), pp. 60-67.

2. Khoperskov A.V., Khrapov S.S., Pisarev A.V., Voronin A.A., Eliseeva M.V., Kobelev I.A. Zadacha upravleniya gidrologicheskim rezhimom v ekologo-ekonomicheskoy sisteme «Volzhskaya GES — Volgo-Akhtubinskaya poyma». Ch. 1. Modelirovanie dinamiki poverkhnostnykh vod v period vesennego pavodka [The Problem of Management Hydrological Regime in Ecology-Economic System «Volga HPS — Volga-Akhtuba Flood-Plain». Part 1. Simulation of Surface Water Dynamics in Springtime Flood]. *Problemy upravleniya* [Control Sciences], 2012, no. 5, pp. 18-25.

3. Belosludtsev A.A., Gusarov D.V., Eremin M.A., Kuzmin N.M., Khoperskov S.A., Khrapov S.S. Informatsionno-kompyuternyy kompleks dlya modelirovaniya dinamiki primesey ot predpriyatiy khimicheskoy promyshlennosti [Informational-Computer System for Modeling the Dynamics of Contaminants From the Chemical Industry]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2009, no. 13, pp. 95-102.

4. Kuzmin N.M., Mustsevoy V.V., Khrapov S.S. Chislennoe modelirovanie evolyutsii neustoychivyykh mod dzhetov, vykhodyashchikh iz molodykh zvezdnykh obyektov [Numerical Simulation of Evolution of Unstable Modes of Jets From Young Star Objects]. *Astronomicheskii zhurnal*. [Astronomy Reports], 2007, vol. 84, no. 12, pp. 1089-1098.

5. Kuzmin N.M., Butenko M.A. Chislennyy kod dlya rascheta aspiratsionnykh techeniy v promyshlennykh tsekhakh [Numerical Code for Simulation of Aspiration Flows in Industry Workshop]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2015, no. 5 (30), pp. 51-59.

6. Pisarev A.V., Khrapov S.S., Khoperskov A.V. Chislennaya skhema na osnove kombinirovannogo podkhoda SPH — TVD: problema modelirovaniya sdvigovykh techeniy [Numerical Scheme on the Base of Combined SPH — TVD Approach: the Problem of

Shear Flows Simulation]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2011, no. 2 (15), pp. 138-141.

7. Voronin A.A., Vasilchenko A.A., Pisareva M.V., Pisarev A.V., Khoperskov A.V., Khrapov S.S., Podshchipkova Yu.V. Proektirovanie sistemy ekologo-ekonomicheskogo upravleniya territoriy Volgo-Akhtubinskoj poymy na osnove gidrodinamicheskogo i geoinformatsionnogo modelirovaniya [Systems Design of Ecological and Economic Management of the Volga-Akhtuba Floodplain Based on Hydrodynamic and Geoinformatics Simulation]. *Upravlenie bolshimi sistemami: sb. tr.*, 2015, no. 55, pp. 79-102.

8. Khrapov S.S., Khoperskov A.V., Eremin M.A. *Modelirovanie dinamiki poverkhnostnykh vod* [Simulation of Surface Water Dynamics]. Volgograd, Izd-vo VolGU, 2010. 132 p.

9. Pisarev A.V., Khrapov S.S., Agafonnikova E.O., Khoperskov A.V. Chislennaya model dinamiki poverkhnostnykh vod v rusle Volgi: otsenka koeffitsienta sherokhovatosti [Numerical Model of Surface Water Dynamics in Volgas Bed: Estimation of Roughness Coefficient]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye nauki*, 2013, no. 1, pp. 114-130.

10. Khrapov S.S., Khoperskov A.V., Kuzmin N.M., Pisarev A.V., Kobelev I.A. Chislennaya skhema dlya modelirovaniya dinamiki poverkhnostnykh vod na osnove kombinirovannogo SPH-TVD podkhoda [Numerical Scheme for Simulation of Dynamics Surface Waters on the Base of Combined SPH-TVD Approach]. *Vychislitelnye metody i programmirovaniye: novye vychislitelnye tekhnologii*. [Numerical Methods and Programming], 2011, vol. 12, no. 1, pp. 282-297.

11. Kuzmin N.M., Belousov A.V., Shushkevich T.S., Khrapov S.S. Chislennaya skhema cSPH-TVD: issledovanie vliyaniya ogranichiteley naklonov [Numerical Scheme CSPH-TVD: Investigation of Influence Slope Limiters]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2014, no. 1 (20), pp. 22-34.

12. Shushkevich K.S., Kuzmin N.M. Odnomernaya chislennaya skhema dlya gazodinamicheskogo modelirovaniya na osnove kombinirovannogo podkhoda SPH-PPM [One-Dimensional Numerical Scheme for Gas-Dynamics Simulation on the Base of Combined SPH-PPM Approach]. *Vestnik magistratury*, 2013, no. 5 (20), pp. 40-44.

13. Colella P., Woodward P.R. The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations. *Journal of Computational Physics*, 1984, vol. 54, no. 1, pp. 174-201.

14. Harten A., Lax P., Leer B. van. On Upstream Differencing and Godunov Type Methods for Hyperbolic Conservation Laws. *SIAM Review*, 1983, vol. 25, no. 1, pp. 35-61.

15. Jiang G.-S., Shu C.W. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes. *Journal of Computational Physics*, 1996, vol. 126, no. 1, pp. 202-228.

16. Lax P.D. Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1954, vol. 7, no. 1, pp. 159-193.

17. Leer B. van. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. III. Upstream-Centered Finite-Difference Schemes for Ideal Compressible Flow. *Journal of Computational Physics*, 1977, vol. 23, no. 3, pp. 263-275.

18. Leer B. van. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second Order Sequel to Godunov's Method. *Journal of Computational Physics*, 1979, vol. 32, no. 1, pp. 101-136.

19. Khrapov S.S., Pisarev A.V., Kobelev I.A., Zhumaliev A.G., Agafonnikova E.O., Losev A.G., Khoperskov A.V. The Numerical Simulation of Shallow Water: Estimation of the Roughness Coefficient on the Flood Stage. *Advances in Mechanical Engineering*, 2013, vol. 2013, article ID: 787016. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/787016>.

**THE COMPARISON OF ACCURACY AND CONVERGENCE  
FOR THE CSPH — TVD METHOD AND SOME EULERIAN SCHEMES  
FOR SOLVING GAS-DYNAMIC EQUATIONS**

**Sergey Sergeevich Khrapov**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Department of Information Systems and Computer Simulation,  
Volgograd State University  
xss-ip@mail.ru, infomod@volsu.ru  
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Nikolay Mikhaylovich Kuzmin**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Department of Information Systems and Computer Simulation,  
Volgograd State University  
nikolay.kuzmin@volsu.ru  
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Mariya Anatolyevna Butenko**

Senior Lecturer, Department of Information Systems and Computer Simulation,  
Volgograd State University  
maria\_butenko@volsu.ru  
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Abstract.** In this article the results of the study of accuracy and convergence methods CSPH — TVD, MUSCL, PPM and WENO for solving equations of ideal gas dynamics are presented. Many physical processes are described by the equations of gas dynamics. Because of their non-linearity, exact or approximate analytical solutions can be obtained only for a limited number of special cases. Therefore, numerical methods are usually used for gas-dynamic problems.

One of these methods is the numerical scheme CSPH — TVD (Combined Smooth Particle Hydrodynamics — Total Variation Diminishing). This method is based on the consistent application of the Lagrange (SPH) and Euler (TVD) approaches. Our results show that the relative error and orders the convergence of all the above numerical schemes are quite close. This can be due to the presence of a weak discontinuity in the structure of the solution. There are many solutions in gas dynamics problems with such discontinuities. The presence of a weak discontinuity allows us to understand the properties of numerical schemes in a real (not test) computations.

Our results show that CSPH — TVD method has comparable to popular Euler numerical schemes accuracy and convergence. A distinctive feature of this method is the possibility of computations at the boundary with vacuum (or dry bed for shallow water case). The additional regularization is not needed. The method is successfully used for solving various gas-dynamic problems in a variety of subject areas: the dynamics of surface water, aspiration flows, astrophysical jets, accretion flows, the transfer of contaminants and others.

**Key words:** numerical simulation, gas-dynamics, Lagrange — Eulerian approach, order of convergence, accuracy of numerical solution.