DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.1.2

УДК 517.925.52+517.926
ББК 22.161.6

О СТРУКТУРЕ ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Владимир Шлеймович Ройтенберг

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики,
Ярославский государственный технический университет
vroitenberg@mail.ru
просп. Московский, 88, 150023 г. Ярославль, Российская Федерация

Аннотация. Рассматриваются линейные неоднородные ω-периодические системы дифференциальных уравнений в $\mathbf{R}^n$ и их продолжения на проективное пространство $\mathbf{RP}^n$. Необходимым и достаточным условием грубости линейной системы в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}/\omega\mathbf{Z}$ относительно пространства LS^n_ω всех таких систем является отсутствие у нее мультипликаторов с модулем, равным 1. Линейная система из LS^2_ω является грубой в $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{R}/\omega\mathbf{Z}$ тогда и только тогда, когда ее мультипликаторы действительны, различны и не совпадают с -1 и 1. В работе также описаны бифуркационные многообразия коразмерности один в пространстве LS^2_ω.

Ключевые слова: линейные периодические системы дифференциальных уравнений, проективная плоскость, грубость линейной системы, бифуркационные многообразия, мультипликаторы.

Введение

Фазовый портрет линейного векторного поля, заданного в пространстве $\mathbf{R}^n$, естественно рассматривать на компактификации $\mathbf{R}^n$ в виде проективного пространства $\mathbf{RP}^n$ [1, с. 249]. Этот подход позволяет различать поведение траекторий «на бесконечности». С такой точки зрения линейные векторные поля изучались в работе [3]. В частности, при $n = 2$ получено явное описание классов топологической эквивалентности и связных компонент множества грубых линейных векторных полей, а также бифуркаций таких векторных полей, при любом $n \geq 2$ даны необходимые и достаточные условия грубости линейных векторных полей в $\mathbf{RP}^n$.

В настоящей работе мы получим аналогичные результаты для систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

1. Линейные периодические системы в $\mathbf{R}^n$ и их продолжения на $\mathbf{RP}^n$

В пространстве $\mathbf{R}^n$ рассмотрим систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений (линейную систему) $l: \dot{x} = A(t)x + b(t)$, где $x = (x_1, ..., x_n)^T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, $A(t)$ – квадратная матрица n-го порядка, с элементами $a_{ij}(t)$, непрерывно и ω-периодически зависящими от $t \in \mathbf{R}$, $b(t) = (b_1(t), ..., b_n(t))^T$ непрерывно и ω-периодически зависит от $t \in \mathbf{R}$. Система l естественно отождествляется с функцией $(a_{11}, ..., a_{nn}, b_1, ..., b_n) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n^2+n}$, а множество LS^n_ω всех таких систем с банаховым пространством всех непрерывных ω-периодических функций $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n^2+n}$ с равномерной нормой: $\|l\| := \max\limits_{i,j} \max\limits_{t} \max\{|a_{ij}(t)|, |b_i(t)|\}$. Под траекториями системы l в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1$, где $\mathbf{S}^1 := \mathbf{R}/\omega\mathbf{Z}$, будем, как обычно, понимать траектории системы $\dot{x} = A(s)x + b(s)$, $\dot{s} = 1$ в фазовом пространстве $\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1$.

Будем рассматривать $\mathbf{R}^n$ как аффинную часть проективного пространства $\mathbf{RP}^n$. Система $\dot{x} = A(s)x + b(s)$, $\dot{s} = 1$ единственным образом продолжается до динамической системы на фазовом пространстве $\mathbf{RP}^n \times \mathbf{S}^1$ [1]. Траектории продолженной системы будем называть *траекториями системы* l *в* $\mathbf{RP}^n \times \mathbf{S}^1$. Заметим, что бесконечно удаленное множество $\mathrm{E} := (\mathbf{RP}^n \setminus \mathbf{R}^n) \times \mathbf{S}^1 \equiv \mathbf{RP}^{n-1} \times \mathbf{S}^1$ состоит из траекторий.

Определение 1. *Линейные системы* $l \in \mathrm{LS}^n_\omega$ *и* $\tilde{l} \in \mathrm{LS}^n_\omega$ *топологически эквивалентны в* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1$, *если существует гомеоморфизм* $h : \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1 \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1$, *переводящий ориентированные траектории системы* l *в* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1$ *в ориентированные траектории системы* $\tilde{l}$ *в* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1$.

Определение 2. *Линейные системы* $l \in \mathrm{LS}^n_\omega$ *и* $\tilde{l} \in \mathrm{LS}^n_\omega$ *топологически эквивалентны в* $\mathbf{RP}^n \times \mathbf{S}^1$, *если существует гомеоморфизм* $h : \mathbf{RP}^n \times \mathbf{S}^1 \to \mathbf{RP}^n \times \mathbf{S}^1$, $h(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$, *переводящий ориентированные траектории системы* l *в* $\mathbf{RP}^n \times \mathbf{S}^1$ *в ориентированные траектории системы* $\tilde{l}$ *в* $\mathbf{RP}^n \times \mathbf{S}^1$.

Определение 3. *Линейная система* $l \in \mathrm{LS}^n_\omega$ *называется грубой в* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1$ (*соответственно в* $\mathbf{RP}^n \times \mathbf{S}^1$) (*относительно пространства* LS^n_ω), *если существует такая ее окрестность V в* LS^n_ω, *что любая система* $\tilde{l} \in V$ *топологически эквивалентна* l.

Пусть $\Phi(t)$ – невырожденная квадратная матрица n-го порядка, C^1-гладко и ω-периодически зависящая от $t \in \mathbf{R}$, а $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ – ω-периодическая C^1-функция. Рассмотрим C^1-диффеоморфизм $T : \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1 \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1$, $T(y,t) = (\Phi(t)y + g(t),\ t)$. Он единственным образом продолжается до C^1-диффеоморфизма $\overline{T} : \mathbf{RP}^n \times \mathbf{S}^1 \to \mathbf{RP}^n \times \mathbf{S}^1$. Диффеоморфизм T индуцирует отображение $T_* : \mathrm{LS}^n_\omega \to \mathrm{LS}^n_\omega$, ставящее в соответствие линейной системе l : $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ линейную систему $T_*(l)$: $\dot{y} = (\Phi^{-1}(t)A(t)\Phi(t) - \Phi^{-1}(t)\dot{\Phi}(t))y + \Phi^{-1}(t)(b(t) + A(t)g(t) - \dot{g}(t))$, получающуюся из l заменой $x = \Phi(t)y + g(t)$. Система $T_*(l)$ топологически эквивалентна в $\mathbf{RP}^n \times \mathbf{S}^1$ системе l (при этом $\overline{T}$ переводит траектории системы $T_*(l)$ в траектории системы l). Кроме того, T_* является обратимым аффинным преобразованием банахова пространства LS^n_ω, а потому и C^∞-диффеоморфизмом. Следовательно, оно переводит грубые системы в грубые, а негрубые в негрубые.

2. Формулировки результатов

Пусть $X(t) = X(t,l)$ – нормированная фундаментальная матрица системы l, то есть $X(0,l) = E$ – единичная матрица. Как обычно, мультипликаторами системы называются собственные значения матрицы монодромии $X(\omega,l)$. Отображения взятия значений $\mathbf{R} \times \mathrm{LS}^n_\omega \ni (t,l) \mapsto A(t)$ и $\mathbf{R} \times \mathrm{LS}^n_\omega \ni (t,l) \mapsto b(t)$ непрерывны. Кроме того, они линейны, а потому и бесконечно дифференцируемы как функции от l. Следовательно, матрица $X(t,l)$ – гладкая функция от l.

Обозначим $\Sigma_0\mathrm{LS}^n_\omega$ множество линейных систем из LS^n_ω, мультипликаторы которых не лежат на единичной окружности комплексной плоскости.

Теорема 1. 1) Множество $\Sigma_0\mathrm{LS}^n_\omega$ *открыто и всюду плотно в* LS^n_ω.

2) *Линейная система* $l \in \mathrm{LS}^n_\omega$ *является грубой в* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1$ *тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству* $\Sigma_0\mathrm{LS}^n_\omega$.

Остальные результаты работы относятся к случаю $n = 2$.

Обозначим $\Sigma = \Sigma\mathrm{LS}^2_\omega$ множество линейных систем из LS^2_ω, мультипликаторы которых действительны, различны и не совпадают с ± 1. Выделим в Σ подмножества Σ^+_s, Σ^-_s, Σ^+_{ns}, Σ^-_{ns}, Σ^+_{nu} и Σ^-_{nu}, состоящие из систем l с мультипликаторами μ_1, μ_2, для которых $\mu_1 < 1 < \mu_2$ ($\mu_2 < -1 < \mu_1$), если $l \in \Sigma_s^+$ $(l \in \Sigma_s^-)$, $0 < \mu_1 < \mu_2 < 1$ $(-1 < \mu_1 < \mu_2 < 0)$, если $l \in \Sigma_{ns}^+$ $(l \in \Sigma_{ns}^-)$, $1 < \mu_1 < \mu_2$ $(\mu_1 < \mu_2 < -1)$, если $l \in \Sigma_{nu}^+$ $(l \in \Sigma_{nu}^-)$.

Теорема 2. 1) *Линейная система* $l \in \mathrm{LS}_\omega^2$ *является грубой в* $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{S}^1$ *тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству* $\Sigma = \Sigma\mathrm{LS}_\omega^2$.

2) *Динамические системы, задаваемые в* $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{S}^1$ *линейными системами из* $\Sigma\mathrm{LS}_\omega^2$, *являются системами Морса – Смейла. Множества* Σ_s^+, Σ_s^-, Σ_{ns}^+, Σ_{ns}^-, Σ_{nu}^+ и Σ_{nu}^- *– классы топологической эквивалентности в* $\Sigma\mathrm{LS}_\omega^2$.

Обозначим $B_{1,s}^\theta$, $B_{1,u}^\theta$, $\theta \in (0,1)$, $B_{2,s}^\pm$, $B_{2,u}^\pm$, $B_{3,s}^\pm$, $B_{3,u}^\pm$ множества линейных систем $l \in \mathrm{LS}_\omega^2$ с мультипликаторами μ_1, μ_2 следующего вида. Для $B_{1,s}^\theta$ $(B_{1,u}^\theta)$ $\mu_{1,2} = \rho e^{\pm i\pi\theta}, 0 < \rho < 1$ $(\rho > 1)$. Для $B_{2,s}^+$, $B_{2,s}^-$, $B_{2,u}^+$ и $B_{2,u}^-$ мультипликаторы $\mu_1 = \mu_2$ и отвечают одному элементарному делителю, кроме того, соответственно, $0 < \mu_1 < 1$, $-1 < \mu_1 < 0$, $\mu_1 > 1$ и $\mu_1 < -1$. Для $B_{3,s}^-$ $(B_{3,u}^-)$ $\mu_1 = -1$, $-1 < \mu_2 < 0$ $(\mu_1 = -1,\ \mu_2 < -1)$. Определим также множества $B_{3,s}^+$ $(B_{3,u}^+)$ систем $l \in \mathrm{LS}_\omega^2$, у которых $\mu_1 = 1$, $0 < \mu_2 < 1$ $(\mu_1 = 1, \mu_2 > 1)$ и нет периодических траекторий в $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1$; последнее равносильно тому, что ранг матрицы, полученной добавлением столбца $a = X(\omega)\int\limits_0^\omega X^{-1}(t)b(t)dt$ к матрице $X(\omega) - E$, равен двум.

Теорема 3. 1) *Каждое из множеств* $B_{1,s}^\theta$, $B_{1,u}^\theta$, $\theta \in (0,1)$, $B_{2,s}^\pm$, $B_{2,u}^\pm$, $B_{3,s}^\pm$, $B_{3,u}^\pm$ *является вложенным* C^∞*-подмногообразием* LS_ω^2 *коразмерности один и состоит из топологически эквивалентных систем.*

2) *Множество* $\Sigma\mathrm{LS}_\omega^2 \cup \bigcup\limits_{\theta\in(0,1)} (B_{1,\theta}^+ \cup B_{1,\theta}^-)$ *открыто и всюду плотно в* LS_ω^2.

3) *В* $\overline{\Sigma}_s^\pm \setminus \Sigma_s^\pm$, $\overline{\Sigma}_{ns}^\pm \setminus \Sigma_{ns}^\pm$ *и* $\overline{\Sigma}_{nu}^\pm \setminus \Sigma_{nu}^\pm$ *всюду плотны, соответственно, множества* $B_{3,s}^\pm \cup B_{3,u}^\pm$, $B_{2,s}^\pm \cup B_{3,s}^\pm$ *и* $B_{2,u}^\pm \cup B_{3,u}^\pm$.

3. Грубость в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1$: доказательство теоремы 1

Так как $X(\omega, l)$ непрерывно зависит от l, то для любой системы $l_0 \in \Sigma_0\mathrm{LS}_\omega^n$ существует столь малая окрестность V в LS_ω^n, что любая система $l \in V$ не имеет мультипликаторов на единичной окружности, а сумма кратностей мультипликаторов, лежащих внутри единичного круга, та же, что у l_0. Следовательно, окрестность V принадлежит $\Sigma_0\mathrm{LS}_\omega^n$ и состоит из систем, топологически эквивалентных в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1$ системе l_0. Тем самым доказано, что $\Sigma_0\mathrm{LS}_\omega^n$ открыто и состоит из систем, грубых в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1$.

Пусть $l_0 \in \mathrm{LS}_\omega^n \setminus \Sigma_0\mathrm{LS}_\omega^n, l_0 : \dot{x} = A(t)x + b(t)$. Обозначим $l_+ \in \mathrm{LS}_\omega^n : \dot{x} = x$, $l_\varepsilon = l_0 + \varepsilon l_+$: $: \dot{x} = (A(t) + \varepsilon E)x + b(t)$.

Тогда $X(t, l_\varepsilon) = e^{-\varepsilon t}X(t, l_0)$ и $X(\omega, l_\varepsilon) = e^{-\varepsilon\omega}X(\omega, l_0)$. Для любой окрестности V системы l_0 в LS_ω^n найдется такое $\overline{\varepsilon} > 0$, что при всех $\varepsilon \in (-\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon})$ $l_\varepsilon \in V$. Поскольку все собственные значения матрицы $X(\omega, l_\varepsilon)$ получаются из собственных значений матрицы $X(\omega, l_0)$ умножением на $e^{-\varepsilon\omega}$, то при достаточно малом $\overline{\varepsilon}$, для всех ε, $0 < |\varepsilon| < \overline{\varepsilon}$, их модули отличны от единицы. Таким образом, в V есть системы из $\Sigma_0\mathrm{LS}_\omega^n$, то есть $\Sigma_0\mathrm{LS}_\omega^n$ всюду плотно в LS_ω^n. Суммы кратностей мультипликаторов с модулем, меньшим единицы, у системы l_ε разные при положительных и отрицательных значениях ε. Следовательно, эти системы не могут быть топологически эквивалентны [2], и потому l_0 – негрубая система.

Теорема 1 доказана.

4. Грубость в $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{S}^1$: доказательство теоремы 2

Докажем, что линейная система $l \in \Sigma\mathrm{LS}_\omega^2$ является грубой в $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{S}^1$. Отображение $P_1 : \mathbf{RP}^2 \to \mathbf{RP}^2$ последования по траекториям l сечения $\mathbf{RP}^2 = \mathbf{RP}^2 \times \{0\}$ в координатах

$x=(x_1,x_2)$ имеет вид $x \mapsto X(\omega,\lambda)x+a$, где $a=X(\omega,\lambda)\int_0^{\omega} X^{-1}(t,\lambda)b(t)dt$. Поскольку $\det(X(\omega,\lambda)-E)\neq 0$, то P_λ имеет неподвижную точку x^0. Поэтому существует такая замена координат $y=S(x-x^0)$, что в координатах $y=(y_1,y_2)$ отображение последования имеет вид $(y_1,y_2)\mapsto(\mu_1 y_1,\mu_2 y_2)$. В координатах $u_1=y_2/y_1$, $z_1=1/y_1$ в $\mathbf{RP}^2$ P_λ имеет вид $(u_1,z_1)\mapsto(\mu_2\mu_1^{-1}u_1,\mu_1^{-1}z_1)$, а в координатах $u_2=y_1/y_2$, $z_2=1/y_2$ – вид $(u_2,z_2)\mapsto(\mu_1\mu_2^{-1}u_1,\mu_2^{-1}z_2)$. Поэтому для P_λ при $\lambda\in\Sigma_s^+$ точка с координатами $y_1=y_2=0$ – гиперболическая неподвижная точка типа седло, а точки с координатами $u_1=z_1=0$ и $u_2=z_2=0$, соответственно, гиперболические неподвижные точки типа неустойчивый и устойчивый узел. При любом $\lambda\in\Sigma_s^+$ P_λ является диффеоморфизмом Морса – Смейла и все отображения P_λ топологически сопряжены между собой. Соответственно и все системы $\lambda\in\Sigma_s^+$ топологически эквивалентны между собой в $\mathbf{RP}^2\times\mathbf{S}^1$. Поскольку Σ_s^+ – открытое множество, то системы $\lambda\in\Sigma_s^+$ являются грубыми в $\mathbf{RP}^2\times\mathbf{S}^1$. Аналогично получаем структуру фазовых портретов и грубость систем из Σ_s^-, Σ_{ns}^+, Σ_{ns}^-, Σ_{nu}^+ и Σ_{nu}^-.

Покажем, что система $\lambda\in\mathrm{LS}_\omega^2$, грубая в $\mathbf{RP}^2\times\mathbf{S}^1$, принадлежит множеству $\Sigma\mathrm{LS}_\omega^2$. Так как линейные системы, грубые в $\mathbf{RP}^2\times\mathbf{S}^1$, являются и грубыми в $\mathbf{R}^2\times\mathbf{S}^1$, то по теореме 1 $\lambda\in\Sigma_0\mathrm{LS}_\omega^2$. Предположим, что $\lambda\in\Sigma_0\mathrm{LS}_\omega^2\setminus\Sigma\mathrm{LS}_\omega^2$ и получим противоречие.

Пусть сначала у λ мультипликаторы $\mu_1=\mu_2=\mu<0$, $\mu\neq-1$. Если они соответствуют одному элементарному делителю, то отображение последования P_λ в некоторых координатах (y_1,y_2) в $\mathbf{R}^2$ будет иметь вид

$$(y_1,y_2)\mapsto(\mu y_1+y_2,\mu y_2), \tag{1}$$

а в координатах (u_1,z_1) и (u_2,z_2), введенных выше, вид

$$(u_1,z_1)\mapsto\left(\frac{u_1}{1+u_1/\mu},\frac{1}{\mu}\frac{z_1}{1+u_1/\mu}\right) \text{ и } (u_2,z_2)\mapsto\left(u_2+\frac{1}{\mu},\frac{1}{\mu}z_2\right). \tag{2}$$

Поэтому P_λ имеет две неподвижные точки и не имеет периодических точек периода >1. Соответственно, система λ имеет в $\mathbf{RP}^2\times\mathbf{S}^1$ ровно две периодические траектории. Если мультипликаторы соответствуют разным элементарным делителям, то P_λ в некоторых координатах (y_1,y_2) в $\mathbf{R}^2$ будет иметь вид $(y_1,y_2)\mapsto(\mu y_1,\mu y_2)$, а в координатах (u_1,z_1) вид $(u_1,z_1)\mapsto\left(u_1,\mu^{-1}z_1\right)$. Поэтому система λ имеет в $\mathbf{RP}^2\times\mathbf{S}^1$ бесконечное множество периодических траекторий.

Пусть $X(t)=X(t,\lambda)$. У матрицы $-X(\omega)$ – положительные собственные значения и потому она имеет действительный логарифм. Матрица $D=\omega^{-1}\ln(-X(\omega))$ имеет двукратное собственное значение, не равное нулю. Функция $\Phi(t)=X(t)e^{-Dt}$ имеет следующее свойство:

$$\forall t\in\mathbf{R}\quad \Phi(t+\omega)=-\Phi(t). \tag{3}$$

Действительно,

$$\Phi(t+\omega)=X(t+\omega)e^{-\omega D}e^{-Dt}=X(t)X(\omega)e^{-\ln(-X(\omega))}e^{-Dt}=$$
$$=X(t)X(\omega)(-X(\omega))^{-1}e^{-Dt}=-X(t)e^{-Dt}=-\Phi(t).$$

Ясно, что найдется такая матрица M, что для чисел $\varepsilon\neq0$ с достаточно малым модулем матрица $D+\varepsilon M$ имеет различные действительные собственные значения, не равные нулю. Рассмотрим систему уравнений

$$\lambda_\varepsilon:\ \dot{x}=(A(t)+\varepsilon\,\Phi(t)M\Phi^{-1}(t))x+b(t). \tag{4}$$

В силу (3) $l_\varepsilon \in \mathrm{LS}^2_\omega$. Рассмотрим l_ε как систему из $\mathrm{LS}^2_{2\omega}$. Тогда замена $y = \Phi^{-1}(t)x$ переводит систему l_ε в систему $\tilde{l}_\varepsilon : \dot{y} = (D + \varepsilon M)y + \Phi^{-1}(t)b(t)$ из $\mathrm{LS}^2_{2\omega}$. Так как $\Phi(2\omega) = \Phi(0) = E$, то $\tilde{l}_\varepsilon$ имеет ту же матрицу монодромии $X(2\omega, l_\varepsilon) = X^2(\omega, l_\varepsilon)$, что и l_ε. С другой стороны, ясно, что эта матрица имеет вид $e^{2\omega(D+\varepsilon M)}$ и потому ее собственные значения положительны, различны и не равны 1. Но тогда $X(\omega, l_\varepsilon)$ имеет различные отрицательные собственные значения, не равные -1, то есть $l_\varepsilon \in \Sigma\mathrm{LS}^2_\omega$. Для любой окрестности V системы l мы можем выбрать ε так, чтобы $l_\varepsilon \in V$. Тем самым, в любой окрестности системы l существует система из $\Sigma\mathrm{LS}^2_\omega$. Как показано выше, системы из $\Sigma\mathrm{LS}^2_\omega$ имеют в $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{S}^1$ три периодические траектории и потому не могут быть топологически эквивалентны l. Получаем противоречие с предположением о грубости l.

В случае, когда мультипликаторы $\mu_1 = \mu_2 = \mu > 0$, противоречие получаем аналогично, взяв $D = \omega^{-1} \ln X(\omega)$.

Рассмотрим теперь случай, когда мультипликаторы системы l комплексные: $\mu_{1,2} = e^{h \pm i\pi\theta}$, $h \neq 0$, $\theta \in (0,1)$. Тогда система имеет ω-периодическое решение $g(t)$. Пусть $S : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1 \to \mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1$, $S(x,t) = (x + g(t),\, t)$. Отображение S_* преобразует l в грубую систему $l_* = S_*(l) : \dot{x} = A(t)x$. Пусть $T : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1 \to \mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1$, $T(x,t) = (\Psi x,\, t)$, где Ψ – такая невырожденная квадратная матрица, что $\Psi^{-1} X(\omega) \Psi$ имеет действительную жорданову форму. Система $l_{**} = T_*(l_*) : \dot{x} = \Psi^{-1} A(t) \Psi x$ грубая, а ее матрица монодромии

$$X(\omega, l_{**}) = \Psi^{-1} X(\omega) \Psi = e^h \begin{pmatrix} \cos\pi\theta & -\sin\pi\theta \\ \sin\pi\theta & \cos\pi\theta \end{pmatrix}.$$

Так как $\ln X(\omega, l_{**}) = \begin{pmatrix} h & -\pi\theta \\ \pi\theta & h \end{pmatrix}$, то отображение $U_* : \mathrm{LS}^2_\omega \to \mathrm{LS}^2_\omega$, где

$$U(y,t) = (X(t, l_{**}) e^{-t(1/\omega)\ln X(\omega, l_{**})} y,\, t),$$

переводит l_{**} в линейную систему

$$l_0 : \dot{y}_1 = (h/\omega) y_1 - (\pi\theta/\omega) y_2,\ \dot{y}_2 = (\pi\theta/\omega) y_1 + (\pi h/\omega) y_2,$$

также грубую в $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{S}^1$. Рассмотрим систему

$$l_\varepsilon : \dot{y}_1 = (h/\omega) y_1 - (\pi(\theta+\varepsilon)/\omega) y_2,\ \dot{y}_2 = (\pi(\theta+\varepsilon)/\omega) y_1 + (h/\omega) y_2,\ \theta + \varepsilon \in (0,1).$$

Перейдем в окрестности бесконечно удаленного тора E к координатам $(r, \varphi) : y_1 = (1/r)\cos\varphi$, $y_2 = (1/r)\sin\varphi$. Получим систему $\dot{r} = -(h/\omega) r$, $\dot{\varphi} = \pi(\theta+\varepsilon)/\omega$. На торе E ($r = 0$) введем циклические координаты (φ, s). Точки с координатами $(\varphi + p\pi, s + q\omega)$, $p, q \in \mathbf{Z}$, отождествляются. Ограничение системы l_ε на инвариантный тор E имеет число вращения θ + ε и, следовательно, существует сколь угодно малое ε > 0, при котором l_ε не топологически эквивалентно l_0, что противоречит грубости l_0.

Таким образом, система $l \in \Sigma_0\mathrm{LS}^2_\omega \setminus \Sigma\mathrm{LS}^2_\omega$ не может быть грубой в $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{S}^1$ и потому множество систем $l \in \mathrm{LS}^2_\omega$, грубых в $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{S}^1$, совпадает с $\Sigma\mathrm{LS}^2_\omega$.

Поскольку множество линейных систем с комплексными мультипликаторами открыто в LS^2_ω, то грубые в $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{S}^1$ линейные системы не плотны в LS^2_ω.

Теорема 2 доказана.

5. Бифуркационные многообразия: доказательство теоремы 3

Простые мультипликаторы системы $l \in \mathrm{LS}^2_\omega$ гладко зависят от элементов матрицы $X(\omega, l)$, а потому и от l.

На открытом множестве $B_{1,s}$ систем с мультипликаторами $\mu_{1,2} = \rho e^{\pm i\theta\pi}$, $\theta \in (0, 1)$, $0 < \rho < 1$, определим C^{∞}-функцию *f*, положив $f(l) = \theta$. Докажем, что *f* – невырожденная функция, то есть $\forall l_0 \in B_{1,s}$ $f'(l_0) \neq 0$. Без ограничения общности можно считать $l_0 : \dot y_1 = (h/\omega) y_1 - (\theta\pi/\omega) y_2$, $\dot y_2 = (\theta\pi/\omega) y_1 + (h/\omega) y_2$, где $h = \ln\rho$, поскольку, как было показано при доказательстве теоремы 2, в такую систему можно преобразовать с помощью C^{∞}-диффеоморфизма пространства LS^2_{ω} любую систему из $B_{1,s}$. Пусть $l_+ \in \mathrm{LS}^2_{\omega}$, $l_+ : \dot y_1 = -(\pi/\omega) y_2$, $\dot y_2 = (\pi/\omega) y_1$. Тогда $f'(l_0) l_+ = \frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} f(l_0 + \varepsilon l_+) = 1 \neq 0$, и $f'(l_0) \neq 0$. Поэтому множества $B^{\theta}_{1,s} = f^{-1}(\theta)$, $\theta \in (0,1)$, являются вложенными C^{∞}-подмногообразиями коразмерности один. Нетрудно убедиться, что все системы из $B^{\theta}_{1,s}$ топологически эквивалентны в $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{S}^1$. Они имеют в $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{S}^1$ единственную периодическую траекторию Γ, на бесконечно удаленном торе *E* система топологически эквивалентна стандартной системе $\dot\varphi = (\pi/\omega)\theta$, $\dot s = 1$ на торе $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z} \times \mathbf{R}/\omega\mathbf{Z}$ с числом вращения θ, остальные траектории ω-предельны к Γ и α-предельны к траектории на *E*.

Аналогично рассматриваются системы из $B^{\theta}_{1,u}$.

Пусть система $l_0 \in B^{-}_{3,s}$. Выберем столь малую окрестность *V* системы l_0 в LS^2_{ω}, что любая система $l \in V$ имеет мультипликаторы $\tilde\mu_1(l)$ и $\tilde\mu_2(l)$, гладко зависящие от l, $\tilde\mu_1(l_0) = -1$, $\tilde\mu_1(l) \neq \tilde\mu_2(l)$, $-1 < \tilde\mu_2(l) < 0$. Определим C^{∞}-функцию $f : V \to \mathbf{R}$, положив $f(l) = \ln|\tilde\mu_1(l)|$. Пусть матрицы *D* и Φ(*t*) выбраны, как и в доказательстве теоремы 2. Приведем *D* к диагональному виду: $KDK^{-1} = \mathrm{diag}(0, \omega^{-1}\ln|\mu_2|)$. Обозначим $M = K^{-1}\mathrm{diag}(1,0)K$. Пусть $l_+ \in \mathrm{LS}^2_{\omega}$, $l_+ :$ $\dot x = \Phi(t) M \Phi^{-1}(t)) x$. Тогда

$$\ln|\tilde\mu_1(l_0 + \varepsilon l_+)| = \omega\varepsilon \text{ и } f'(l_0) l_+ = \tfrac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} f(l_0 + \varepsilon l_+) = \omega \neq 0 .$$

Следовательно, $f'(l_0) \neq 0$. Уменьшив при необходимости окрестность *V*, можно считать, что для всех $l \in V$ $f'(l) \neq 0$. Так как $B^{-}_{3,s} \cap V = f^{-1}(0)$, то $B^{-}_{3,s}$ – вложенное C^{∞}-подмногообразие в LS^2_{ω}. При малых $|\varepsilon|$ $\mathrm{sgn}(\tilde\mu_2(l_0 + \varepsilon l_+) + 1) = -\mathrm{sgn}\,\varepsilon$, и потому $B^{-}_{3,s}$ принадлежит общей части границ множеств Σ^{-}_{ns} и Σ^{-}_{s}.

Отображение P_l, $l \in B^{-}_{3,s}$, можно записать в некоторых координатах (y_1, y_2) в $\mathbf{R}^2$ (зависящих от l) в виде $(y_1, y_2) \mapsto (-y_1, \tilde\mu_2(l) y_2)$. Поэтому для любых двух систем $l_0 \in B^{-}_{3,s}$ и $l \in B^{-}_{3,s}$ диффеоморфизмы P_{l_0} и P_l сопряжены. Сопрягающий гомеоморфизм имеет в координатах (y_1, y_2), (u_1, z_1) и (u_2, z_2), соответственно, вид $(y_1, y_2) \mapsto (y_1, \frac{\tilde\mu_2(l)}{\tilde\mu_2(l_0)} y_2)$, $(u_1, z_1) \mapsto (\frac{\tilde\mu_2(l)}{\tilde\mu_2(l_0)} u_1, z_1)$ и $(u_2, z_2) \mapsto (\frac{\tilde\mu_2(l_0)}{\tilde\mu_2(l)} u_2, \frac{\tilde\mu_2(l_0)}{\tilde\mu_2(l)} z_2)$. Следовательно, l_0 и l топологически эквивалентны в $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{S}^1$.

Утверждение 1) теоремы для множества $B^{-}_{3,u}$ доказывается аналогично.

Пусть $X(\omega, l) = (x_{ij}(l))$. Определим C^{∞}-функцию $f : \mathrm{LS}^2_{\omega} \to \mathbf{R}$, положив $f(l) = (x_{11}(l) + x_{22}(l))^2 - 4\det X(\omega, l)$. Множество $B^{-}_{2,s}$ задается условиями

$$f(l) = 0,\ -2 < x_{11}(l) + x_{22}(l) < 0,\ x_{12}(l) \neq 0 \vee x_{21}(l) \neq 0 .$$

Для доказательства того, что оно является C^{∞}-подмногообразием коразмерности один, достаточно убедиться, что для любого $l \in V$ $f'(l) \neq 0$. Пусть матрицы *D* и Φ(*t*) выбраны, как и выше. Приведем *D* к жордановой форме: $KDK^{-1} = \begin{pmatrix} \omega^{-1}\ln|\mu_1| & 1 \\ 0 & \omega^{-1}\ln|\mu_1| \end{pmatrix}$, $\mu_1 = (x_{11}(l) + x_{22}(l))/2$. Обозначим $M = K^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega^{-2} & 0 \end{pmatrix} K$. Пусть $l_+ \in \mathrm{LS}^2_{\omega}$,

$\lambda_+ :\ \dot x = \Phi(t)M\Phi^{-1}(t)x$, $\lambda_\varepsilon = \lambda + \varepsilon\lambda_+$. Тогда собственные значения матрицы $D + \varepsilon M$, $\varepsilon > 0$ – $\omega^{-1}(\ln|\mu_1| \pm \sqrt{\varepsilon})$, собственные значения матрицы $X^2(\omega,\lambda_\varepsilon) = e^{2\omega(D+\varepsilon M)}$ $|\mu_1|^2 e^{\pm 2\sqrt{\varepsilon}}$, а собственные значения матрицы $X(\omega,\lambda_\varepsilon)$ – $e^{\pm\sqrt{\varepsilon}}\mu_1$. Так как

$$f(\lambda) = 0,\ f(\lambda_\varepsilon) = (e^{\sqrt{\varepsilon}}\mu_1 + e^{-\sqrt{\varepsilon}}\mu_1)^2 - 4\mu_1^2 = \mu_1^2(e^{2\sqrt{\varepsilon}} + e^{-2\sqrt{\varepsilon}} - 2) = 4\mu_1^2(\mathrm{ch}\sqrt{\varepsilon} - 1)^2 \text{ при } \varepsilon > 0,$$

то $f'(\lambda)\lambda_+ = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \dfrac{f(\lambda + \varepsilon\lambda_+) - f(\lambda)}{\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \dfrac{f(\lambda + \varepsilon\lambda_+)}{\varepsilon} = 4\mu_1^2 \neq 0$. Следовательно, $f'(\lambda) \neq 0$, что и требовалось установить. При малых ε мультипликаторы $e^{\pm\sqrt{\varepsilon}}\mu_1$ системы λ_ε различны и находятся в интервале $(-1, 0)$. Поэтому $B_{2,s}^-$ содержится в границе множества Σ_{ns}^-.

Из вида (1) и (2) отображения P_1, $\lambda \in B_{2,s}^-$, в координатах (y_1, y_2), (u_1, z_1) и (u_2, z_2), приведенного в доказательстве теоремы 2, следует, что его неблуждающее множество – две неподвижные точки – устойчивый (обратный) узел с координатами $y_1 = y_2 = 0$, седло-узел с координатами $u_1 = z_1 = 0$ и центральным многообразием, задаваемым уравнением $z_1 = 0$, а неблуждающее множество системы λ в $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{S}^1$ состоит из двух соответствующих им ω-периодических траекторий. Поэтому все системы из $B_{2,s}^-$ топологически эквивалентны в $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{S}^1$.

Утверждение 1) теоремы для $B_{2,u}^-$, $B_{2,s}^+$ и $B_{2,u}^+$ доказывается аналогично утверждению для $B_{2,s}^-$.

Пусть система $\lambda_0 \in B_{3,s}^+$. Можно считать, что она имеет вид $\dot x_1 = b_1(t)$, $\dot x_2 = hx_2 + b_2(t)$, где $h = \ln\mu_2 < 0$. Второе уравнение системы имеет ω-периодическое решение $p(t)$. В координатах $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - p(t)$ система имеет вид $\dot y_1 = b_1(t)$, $\dot y_2 = hy_2(t)$. Отсутствие периодических решений системы $\lambda_0 \in B_{3,s}^+$ влечет неравенство $a_1 = \int_0^\omega b_1(t)dt \neq 0$.

Выберем столь малую окрестность V системы λ_0 в LS_ω^2, что любая система $\lambda \in V$ имеет мультипликаторы $\tilde\mu_1(\lambda)$ и $\tilde\mu_2(\lambda)$, гладко зависящие от λ, $\tilde\mu_1(\lambda_0) = 1$, $\tilde\mu_2(\lambda_0) = \mu_2$, $\tilde\mu_1(\lambda) \neq \tilde\mu_2(\lambda)$, $\tilde\mu_2(\lambda) < 1$. Определим C^∞-функцию $f : V \to \mathbf{R}$, положив $f(\lambda) = \ln\tilde\mu_1(\lambda)$. Возьмем систему $\lambda_+ \in \mathrm{LS}_\omega^2$, $\lambda_+ :\ \dot x_1 = e^\varepsilon x_1$, $\dot x_2 = 0$. Тогда $f'(\lambda_0)\lambda_+ = \frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} f(\lambda_0 + \varepsilon\lambda_+) = 1 \neq 0$. Следовательно, $f'(\lambda_0) \neq 0$ и можно считать, что окрестность V выбрана так, что для всех $\lambda \in V$ $f'(\lambda) \neq 0$. Так как коэффициенты системы λ непрерывно зависят от λ, то окрестность V можно считать столь малой, что для систем из $f^{-1}(0)$ выполняется условие отсутствия периодических траекторий в $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1$. Следовательно, $B_{3,s}^+ \cap V = f^{-1}(0)$, и потому $B_{3,s}^+$ – вложенное C^∞-подмногообразие коразмерности один в LS_ω^2.

Отображение последования P_{λ_0} в координатах (y_1, y_2), (u_1, z_1) и (u_2, z_2) имеет, соответственно, вид

$$(y_1, y_2) \mapsto (y_1 + a_1, \mu_2 y_2),\ (u_1, z_1) \mapsto \left(\frac{\mu_2 u_1}{1 + a_1 z_1}, \frac{z_1}{1 + a_1 z_1}\right) \text{ и } (u_2, z_2) \mapsto \left(\frac{1}{\mu_2}u_2 + \frac{a_1}{\mu_2}z_2, \frac{1}{\mu_2}z_2\right).$$

Отсюда следует, что P_{λ_0} имеет две неподвижные точки: неустойчивый узел с координатами $u_2 = z_2 = 0$ и седло-узел с координатами $u_1 = z_1 = 0$ и центральным многообразием, задаваемым уравнением $u_1 = 0$, а система λ_0 имеет две периодические траектории соответствующих типов, принадлежащие тору E, и других неблуждающих траекторий в $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{S}^1$ система не имеет. Любые две такие системы топологически эквивалентны.

Если $\lambda \in V$ и $f(\lambda) < 0$ ($f(\lambda) > 0$), то $\lambda \in \Sigma_{ns}^+$ ($\lambda \in \Sigma_s^+$). Таким образом, $B_{3,s}^+$ принадлежит общей части границ Σ_{ns}^+ и Σ_s^+, а переход системы λ через бифуркационное многообразие $B_{3,s}^+$ приводит к тому, что ее устойчивая периодическая траектория, принадлежащая $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1$, сливается с бесконечно удаленной седловой периодической траекторией, превращаясь в бесконечно удаленную седло-узловую периодическую траекторию, которая затем распадается на седловую периодическую траекторию, принадлежащую $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1$, и устойчивую бесконечно удаленную периодическую траекторию.

Утверждения 1) теоремы для множества $B^{+}_{3,u}$ доказываются аналогично.

В доказательстве теоремы 2 было установлено, что в любой окрестности системы с кратными мультипликаторами имеется система из $\Sigma\mathrm{LS}^2_{\omega}$. Отсюда и из плотности $\Sigma_0\mathrm{LS}^2_{\omega}$ в LS^2_{ω} следует утверждение 2) теоремы.

Докажем, что $B^{-}_{2,s} \cup B^{-}_{3,s}$ всюду плотно в $\overline{\Sigma}^{-}_{ns} \setminus \Sigma^{-}_{ns}$. Достаточно показать, что для любой системы $l_0 \in \overline{\Sigma}^{-}_{ns} \setminus \Sigma^{-}_{ns}$, $l \notin B^{-}_{2,s} \cup B^{-}_{3,s}$ существует сколь угодно близкая система из $B^{-}_{3,s}$. При сделанных предположениях l_0 имеет либо мультипликаторы $\mu_1 = \mu_2 = -1$, либо мультипликаторы $\mu_1 = \mu_2 \in (-1, 0)$, соответствующие разным элементарным делителям. В обоих случаях матрицу M можно подобрать так, чтобы при достаточно малых $\varepsilon > 0$ матрица $D + \varepsilon M$, где $D = \omega^{-1}\ln(-X(\omega))$, имела двукратное отрицательное собственное значение, соответствующее одному элементарному делителю. Тогда из доказательства теоремы 2 видно, что система (4) принадлежит $B^{-}_{3,s}$. За счет выбора ε ее можно сделать сколь угодно близкой к l_0.

Остальные утверждения пункта 3) теоремы доказываются аналогично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд, В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1984. – 272 с.
2. Методы качественной теории в нелинейной динамике / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. – М. ; Ижевск : Изд-во ИКИ, 2004. – Ч. 1. – 416 с.
3. Ройтенберг, В. Ш. О структуре пространства линейных векторных полей / В. Ш. Ройтенберг // Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире. – 2015. – Т. 1, № 9. – С. 177–182.

REFERENCES

1. Arnold V.I. *Obyknovennye differentsialnye uravneniya* [Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 272 p.
2. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L. *Metody kachestvennoy teorii v nelineynoy dinamike. Ch. 1* [Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part 1]. Moscow, Izhevsk, IKI Publ., 2004. 416 p.
3. Roitenberg V.Sh. O strukture prostranstva lineynykh vektornykh poley [On the Structure of the Space of Linear Vector Fields]. *Fundamentalnye i prikladnye issledovaniya v sovremennom mire* [Fundamental and Applied Research in the Contemporary World], 2015, vol. 1, no. 9, pp. 177-182.

ON THE STRUCTURE OF THE SPACE OF LINEAR SISTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PERIODIC COEFFICIENTS

Vladimir Shleymovich Roitenberg

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Higher Mathematics,
Yaroslavl State Technical University
vroitenberg@mail.ru
Prosp. Moscovskij, 88, 150023 Yaroslavl, Russian Federation

Abstract. We examine linear systems of differential equations

$$l: \ \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + b_j(t), \ i = 1,\dots,n$$

with continuous ω-periodic coefficients. The system l induces the autonomous system $l_p: \ \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(s)x_j + b_j(s), \ \dot{s} = 1$ on $\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1$, where $\mathbf{S}^1 = \mathbf{R}/\omega\mathbf{Z}$. The system l_p has

the unique extension $\overline{l}_p$ on $\mathbf{RP}^n \times \mathbf{S}^1$. By trajectories of system l in $\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1$ ($\mathbf{RP}^n \times \mathbf{S}^1$) we will mean trajectories of system l_p ($\overline{l}_p$). Let us consider linear systems l as elements of Banach space LS_ω^n of continuous ω-periodic functions $(a_{11},...,a_{nn},b_1,...,b_n):\mathbf{R}\to\mathbf{R}^{n^2+n}$ with norm $\|l\|:=\max\limits_{i,j}\max\limits_{t}\max\{|a_{ij}(t)|,|b_i(t)|\}$. The system $l\in\mathrm{LS}_\omega^n$ is said to be structurally stable in $\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1$ (in $\mathbf{RP}^n \times \mathbf{S}^1$) if l has a neighborhood V in LS_ω^n such that for any system $\tilde{l}\in V$ we may find a homeomorphism $h:\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1\to\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1$ ($h:\mathbf{RP}^n \times \mathbf{S}^1\to\mathbf{RP}^n \times \mathbf{S}^1$, $h(\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1)=\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1$) which maps oriented trajectories of system $\tilde{l}$ onto oriented trajectories of system l.

Let $\Sigma_0\mathrm{LS}_\omega^n$ be the set of systems $l\in\mathrm{LS}_\omega^n$ whose multiplicators do not belong to the unit circle.

Theorem 1. The set $\Sigma_0\mathrm{LS}_\omega^n$ is open and everywhere dense in LS_ω^n. A system $l\in\mathrm{LS}_\omega^n$ is structurally stable in $\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^1$ if and only if it belongs to the set $\Sigma_0\mathrm{LS}_\omega^n$.

Let $\Sigma\mathrm{LS}_\omega^2$ be the set of systems $l\in\mathrm{LS}_\omega^2$ whose multiplicators are real, distinct and different from -1 and 1. Let Σ_s^+, Σ_s^-, Σ_{ns}^+, Σ_{ns}^-, Σ_{nu}^+ and Σ_{nu}^- be subsets of $\Sigma\mathrm{LS}_\omega^2$ consisting of systems l with multiplicators μ_1, μ_2 for which $\mu_1<1<\mu_2$ ($\mu_2<-1<\mu_1$) if $l\in\Sigma_s^+$ ($l\in\Sigma_s^-$), $0<\mu_1<\mu_2<1$ ($-1<\mu_1<\mu_2<0$) if $l\in\Sigma_{ns}^+$ ($l\in\Sigma_{ns}^-$), $1<\mu_1<\mu_2$ ($\mu_1<\mu_2<-1$) if $l\in\Sigma_{nu}^+$ ($l\in\Sigma_{nu}^-$).

Theorem 2. 1) A system $l\in\mathrm{LS}_\omega^2$ is structurally stable in $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{S}^1$ if and only if it belongs to the set $\Sigma\mathrm{LS}_\omega^2$. 2) For any system $l\in\Sigma\mathrm{LS}_\omega^2$ the corresponding system $\overline{l}_p$ in $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{S}^1$ is a Morse-Smale system. 3) The sets Σ_s^+, Σ_s^-, Σ_{ns}^+, Σ_{ns}^-, Σ_{nu}^+ and Σ_{nu}^- are classes of topological equivalence in $\Sigma\mathrm{LS}_\omega^2$.

The paper also describes bifurcation manifolds of codimension one in the space LS_ω^2.

Key words: linear periodic systems of differential equations, projective plane, structural stability, bifurcation manifolds, multiplicators.