МАТЕМАТИКА

УДК 514.75
ББК 22.151

ПОЧТИ *AR*-ДЕФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ С УСЛОВИЕМ ОБОБЩЕННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ

А.И. Бодренко

В статье исследуются свойства почти AR-деформаций гиперповерхностей в евклидовых пространствах с заданным изменением их грассманова образа, удовлетворяющих условию обобщенного скольжения.

Ключевые слова: *деформация поверхности, средняя кривизна, вторая фундаментальная форма, грассманов образ, обобщенное скольжение.*

Введение

Рассмотрим в евклидовом пространстве $E^{n+1}, n > 1$, односвязную ориентируемую гиперповерхность $F \in C^{3,\nu}, 0 < \nu < 1$, с краем $\partial F \in C^{2,\nu}$. Введем в E^{n+1} декартову прямоугольную систему координат $(y^1, ..., y^{n+1})$. Пусть $(x^1, ..., x^n)$ — локальные координаты F в произвольной точке $M \in F$. Зададим F системой уравнений

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, ..., x^n), (x^1, ..., x^n) \in D, f^\alpha \in C^{3,\nu}(\bar{D}), \alpha = \overline{1, n+1},$$

где D — односвязная ограниченная область в E^n с границей ∂D класса $C^{1,\nu}$. Введем в E^n декартову прямоугольную систему координат $(x^1, ..., x^n)$. Обозначим через $\vec{r} = \vec{r}\ (M), M \in F$, радиус-вектор поверхности F, $\vec{n} = \vec{n}\ (M)$ — единичный вектор нормали к поверхности F в точке M. Пусть на F задана функция $\gamma = \gamma(t, M), M \in F, t \geq 0$. Пусть дано действительное число λ.

Определение 1. *Деформацию $\{F^t\}, t \in [0, t_0), t_0 > 0$, гиперповерхности F, определяемую уравнением:*

$$F^t : \vec{r}^{\,t}\ (M) = \vec{r}\ (M) + \vec{z}\ (t, M), \forall M \in F,$$

где t — параметр деформации, $\vec{r}^{\,t}$ — радиус-вектор поверхности F^t, будем называть почти ареально-рекуррентной деформацией(почти AR-деформацией), если выполнено условие: изменение $\Delta^t(d\sigma)$ элемента площади $d\sigma$ поверхности F удовлетворяет соотношению:

$$\Delta^t(d\sigma) = Hn(\lambda c + \gamma) d\sigma, \tag{1}$$

где λ — коэффициент рекуррентности деформации; $H(M)$ — средняя кривизна F в точке M; $c = <\vec{r}^{\,t}, \vec{n}>$, $< .,. >$ — скалярное произведение в E^{n+1}.

Рассмотрим для векторного поля $\vec{z}$ условие:

$$< d\,\vec{z}\,(t, M), \vec{n}\,(M) >= d\psi(t, M), M \in F, \qquad (2)$$

где $d\psi(t, M) = \psi_i(t, M)dx^i$ — заданное семейство линейных дифференциалов класса $C^{1,\nu}(\bar{F})$. Это условие задает изменение грассманова образа поверхности F при деформации $\{F^t\}$.

На ∂F рассмотрим единичное векторное поле $\vec{\eta}_0$, не касательное к ∂F ни в одной точке и лежащее в касательной к F плоскости. Рассмотрим $\Pi(\vec{\eta}_0)$ — множество единичных векторных полей $\vec{\eta}_\theta$, тангенциальная составляющая которых коллинеарна $\vec{\eta}_0$. Каждое векторное поле $\vec{\eta}_\theta$ однозначно определяется заданием угла $\theta = \widehat{\vec{\eta}_0; \vec{\eta}_\theta}$, отсчитываемым в сторону вектора $\vec{n}$, так что $\vec{\eta}_{\pi/2} = \vec{n}$.

Для поля деформации $\vec{z}$ рассмотрим условие обобщенного скольжения на ∂F:

$$<\vec{z}\,(t, M), \vec{\eta}_\theta\,(M) >= \zeta(t, M), M \in \partial F, \qquad (3)$$

где ζ — заданная функция; $\vec{\eta}_\theta$ — заданное векторное поле на ∂F.

Будем говорить, что поверхность F допускает непрерывные почти AR-деформации $\{F^t\}$ в классе $C^{l,\nu}, l \geq 0$, если поле деформации $\vec{z}$ непрерывно по t и $\vec{z} \in C^{l,\nu}(F)$.

Пусть функции γ, ζ и ψ_i непрерывны по t, $\gamma(0, M) \equiv 0, \psi_i(0, M) \equiv 0, \forall M \in F$, $\zeta(0, M) \equiv 0, \forall M \in \partial F$, $\gamma \in C^{0,\nu}(F), \zeta \in C^{1,\nu}(\partial F)$, $\vec{\eta}_0 \in C^{1,\nu}(\partial F)$.

Пусть F не имеет действительных асимптотических направлений.

Теорема 1. *Для F существует не более чем счетное множество действительных чисел $\Lambda = \{\lambda_s, s = 1, 2, ... : -1 = \lambda_1 < \lambda_2 < ...\}$, не имеющее конечных предельных точек, такое, что при $\lambda \notin \Lambda$ для всякого $\vec{\eta}_0$ можно указать число $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, такое, что для всех векторных полей $\vec{\eta}_\theta \in \Pi(\vec{\eta}_0)$, $\vec{\eta}_\theta \in C^{1,\nu}(\partial F)$, удовлетворяющих условию: $\pi/2 - \theta_0 < \theta < \pi/2$ на ∂F, существует такое значение параметра деформации $t_0 > 0$, что гиперповерхность F для $t \in [0, t_0)$ допускает в классе $C^{0,\nu}$ единственную непрерывную почти AR-деформацию с коэффициентом рекуррентности λ, изменением ее грассманова образа, заданным формулой (2), удовлетворяющую краевому условию обобщенного скольжения (3).*

В работе [1] изучались непрерывные почти ARG-деформации гиперповерхностей в евклидовом пространстве.

1. Вывод уравнений почти *AR*-деформаций гиперповерхности с заданным изменением ее грассманова образа

Так как F не имеет действительных асимптотических направлений, то, не нарушая общности, ориентируем поверхность F единичным вектором нормали $\vec{n}$ так, чтобы ее средняя кривизна H была положительной. Обозначим через $y^\alpha, n^\alpha, z^\alpha$ компоненты векторов $\vec{r}, \vec{n}, \vec{z}$ во введенной системе координат в E^{n+1}, соответственно. Положим:

$z^\alpha = a^i y^\alpha,_i + cn^\alpha$, где $a^i = a^i(t, M), c = c(t, M), M \in F$ — неизвестные функции, знак «$,i$» означает ковариантную производную по переменной x^i в метрике гиперповерхности F. Обозначим через g_{ij} и b_{jk} — метрический тензор и тензор второй основной формы гиперповерхности F, соответственно, через g^{ij} — тензор, обратный к g_{ij}. Находим (см. [4]):

$$z^\alpha,_j = (a^i b_{ij} + c_{,j})n^\alpha + (a^i_{,j} - cb_{jm}g^{mi})y^\alpha,_i. \tag{4}$$

Тогда уравнения, описывающие заданные изменения грассманова образа гиперповерхности F при деформации $\{F^t\}$, примут вид:

$$a^i = \tilde{b}^{ij}(-\partial_j c + \psi_j), i = \overline{1, n}, \tag{5}$$

где $\tilde{b}^{ij}$ — тензор, обратный к тензору b_{ij}; $\partial_j c$ — частная производная функции c по переменной x^j.

Условие (1) эквивалентно соотношению:

$$\Delta^t(\sqrt{g}) = n\lambda Hc\sqrt{g} + \gamma\sqrt{g}, \tag{6}$$

где $\Delta^t(\sqrt{g}) \equiv \sqrt{g^t} - \sqrt{g}$, g^t — определитель матрицы, составленной из коэффициентов первой основной формы гиперповерхности F^t.

Подсчитаем величину $\Delta^t(g_{ij}) \equiv g^t_{ij} - g_{ij}$, где g^t_{ij} — метрический тензор поверхности F^t.

$$\Delta^t(g_{ij}) = \delta_{\alpha\beta} y^\alpha,_i z^\beta,_j + \delta_{\alpha\beta} y^\beta,_j z^\alpha,_i + \delta_{\alpha\beta} z^\alpha,_i z^\beta,_j,$$

где $\delta_{\alpha\beta} = 1$, при $\alpha = \beta$; $\delta_{\alpha\beta} = 0$, при $\alpha \neq \beta$.

Используя свойства определителя, имеем:

$$\Delta^t(g) = g^t g^{ij} \Delta^t(g_{ij}) + W_t,$$

где для удобства введено следующее обозначение:

$$W_t = \sum_{s=2}^{n} \sum_{I_s, J_s} (-1)^{sgn(I_s J_s)} M_{I_s J_s}\left(\prod_{p=1}^{s} \Delta^t(g_{i_p j_p})\right),$$

где суммирование ведется по всевозможным размещениям индексов $I_s = (i_1, ..., i_s)$ и всевозможным сочетаниям индексов $J_s = (j_1, ..., j_s)$. Индексы $i_1, ..., i_s, j_1, ..., j_s$ могут принимать значения от 1 до n. Величина $M_{I_s J_s}$ есть минор $(n - s)$-го порядка матрицы $\|g_{ij}\|$, получающийся вычеркиванием из нее строк и столбцов с номерами $i_1, ..., i_s$ и $j_1, ..., j_s$, соответственно. $(-1)^{sgn(I_s J_s)}$ — знак, с которым входит в разложение определителя g слагаемое вида $M_{I_s J_s} \prod_{p=1}^{s} g_{i_p j_p}$.

Рассмотрим дифференциальный оператор на поверхности F:

$$L = -\frac{\partial_i(\sqrt{g}\tilde{b}^{ij}\partial_j .)}{nH\sqrt{g}} + 1.$$

Используя полученные формулы и полагая $\mu = \lambda + 2$, уравнение (6) перепишем так: $Lc = \mu c + S(t) + P(t, c)$, где

$$S(t) = \gamma - (\tilde{b}^{ij}\psi_j),_i/(Hn),$$

$$P(t, c) = (\lambda c + \gamma)^2 nH/2 - g^{ij}\delta_{\alpha\beta} z^\alpha,_i z^\beta,_j/(2Hn) - W_t/(2Hng).$$

Полученное уравнение относительно неизвестной функции c, с учетом формул (4) и (5), описывает искомые почти AR-деформации гиперповерхности F с заданным изменением ее грассманова образа.

2. Доказательство теоремы 1

Обозначим $h^j_\theta = -\tilde{b}^{ij}\delta_{\alpha\beta}y^\alpha,_i\eta^\beta_\theta$, $h_\theta = \delta_{\alpha\beta}n^\alpha\eta^\beta_\theta$, $\xi_\theta = \zeta - \tilde{b}^{ij}\delta_{\alpha\beta}y^\alpha,_i\eta^\beta_\theta\psi_j$, где η^β_θ — координаты вектора $\vec{\eta}_\theta$ в E^{n+1}. $\cos(\vec{\nu}; x^j)$ — направляющие косинусы единичного вектора внешней нормали $\vec{\nu}$ к поверхности ∂D в E^n.

Лемма 1. *Для всякого $p > 0$ существует такое $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, что для любого $\theta : \pi/2 - \theta_0 < \theta < \pi/2$ на ∂F выполнены неравенства:* $\max_j \max_{\partial F} |h^j_\theta| < p$, $|h_\theta| \neq 0$.

Доказательство следует из правила задания векторного поля $\vec{\eta}_\theta$.

Лемма 2. *Пусть функция $f \in C^{2,\nu}(F)$ является решением уравнения $Lf = \mu f + \varphi$, $\mu \neq 1$, $\varphi \in C^{0,\nu}(F)$ и удовлетворяет на ∂F условию:*

$$h^j_\theta \partial_j f + h_\theta f = \xi_\theta, \tag{7}$$

$h_\theta \neq 0$. *Тогда можно выбрать p, θ_0, θ, удовлетворяющие условию леммы 1 так, что имеет место оценка: $\|f\|_{(F)2,\nu} \leq K_0(\|\varphi\|_{(F)0,\nu} + \|\xi_\theta\|_{(\partial F)1,\nu})$, где постоянная $K_0 > 0$ определяется поверхностью F, числами μ, n, ν, функциями h^j_θ, h_θ.*

Доказательство леммы 2. Так как неравенство $|\sum_j h^j_\theta \cos(\vec{\nu}; x^j)| \geq p_0$, $p_0 = const > > 0$ выполняется в силу того что $\vec{\eta}_\theta$ не касателен к ∂F ни в одной точке и того условия, что F не имеет действительных асимптотических направлений, то в силу вида оператора L имеет место неравенство Шаудера (см. [2]):

$$\|f\|_{(F)2,\nu} \leq K_1(\|\varphi\|_{(F)0,\nu} + \|\xi_\theta\|_{(\partial F)1,\nu} + \max_F |f|).$$

Имеем: $\max_F |f| \leq \max_{\partial F} |(\xi_\theta - h^j_\theta \partial_j f)/h_\theta| + \max_F |\varphi/(\mu - 1)|$.
Тогда: $\||f\|_{(F)2,\nu} \leq K_2(\|\varphi\|_{(F)0,\nu} + \|\xi_\theta\|_{(\partial F)1,\nu} + \max_j \max_{\partial F} |h^j_\theta|\|f\|_{(F)2,\nu})$.
Постоянные $K_1 > 0,\ K_2 > 0$. Тогда для $p \in (0, 1/K_2)$, θ_0 и θ, удовлетворяющих условиям леммы 1, получаем искомую оценку. Лемма 2 доказана.

Применяя результаты из [3] и [2], получим, что если поверхность F класса $C^{3,\nu}$, то существует не более чем счетное множество действительных чисел $\Lambda^* = \{\mu, s = 1, 2, ... : 1 = \mu_1 < \mu_2 < ...\}$, не имеющее конечных предельных точек, такое, что при $\mu \notin \Lambda^*$ операторное уравнение $Lf = \mu f + \varphi, \varphi \in C^{0,\nu}(F)$, на F относительно неизвестной функции f, удовлетворяющей условию (7), имеет единственное решение класса $C^{2,\nu}(F)$.

Положим $\Lambda = \{\lambda_s, s = 1, 2, ... : \lambda_s = \mu_s - 2\}$. Зафиксируем число $\lambda \notin \Lambda$, выберем p, θ_0, θ так, чтобы выполнялись условия лемм 1 и 2. Исследуем разрешимость в пространстве $C^{2,\nu}(F)$ уравнения: $Lf = \mu f + S(t) + P(t, f)$, с граничным условием (7), эквивалентным (3).

Построим последовательность функций $\{c^k\}$, удовлетворяющих на ∂F условию (7). Функцию c^1 найдем из уравнения $Lc^1 = \mu c^1 + S(t)$. Функцию $c^k, k > 1$ найдем из уравнения $Lc^k = \mu c^k + S(t) + P(t, c^{k-1})$.

Тогда, в силу леммы 2, получим оценки: $\|c^k\|_{(F)2,\nu} \leq M_1(t), \forall k\ \|c^{k+1} - c^k\|_{(F)2,\nu} \leq \leq M_2(t)\|c^k - c^{k-1}\|_{(F)2,\nu}$, где для всех достаточно малых $t > 0$ функции $M_1(t) < 1$,

$M_2(t) < 1$. Тогда последовательность функций $\{c^k\}$ является фундаментальной $C^{2,\nu}(F)$ и, следовательно, сходится к функции $c \in C^{2,\nu}(F)$, так как $C^{2,\nu}(F)$ является полным.

Покажем, что полученное решение c единственно. Предположим, что существуют два различных решения c_1 и c_2. Тогда имеет место неравенство: $\|c_1 - c_2\|_{(F)2,\nu} \leq \leq M_3(t)\|c_1 - c_2\|_{(F)2,\nu}$, где для всех достаточно малых $t > 0 : M_3(t) < 1$. Получаем противоречие.

Покажем, что полученное решение c непрерывно по параметру деформации t. Для всех достаточно малых $t_1, t_2 > 0$ имеет место оценка:

$$\|c(t_1) - c(t_2)\|_{(F)2,\nu} \leq |\delta_1(t_1, t_2)|$$

где функция $\delta_1(t_1, t_2)$ непрерывна по t_1 и t_2, $\delta_1(t, t) \equiv 0$. Получаем непрерывность решения c для всех достаточно малых $t > 0$.

Тогда существует $t_0 > 0$ такое, что $\forall t \in [0, t_0)$ поле деформации $\{F^t\}$ $\vec{z} \in C^{1,\nu}(F)$ и непрерывно по t.

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бодренко, А. И. Непрерывные почти ARG-деформации гиперповерхностей в евклидовом пространстве / А. И. Бодренко // Изв. вузов. Серия «Математика». — 1996. — № 2. — С. 13–16.
2. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. — М. : Наука, 1973. — 576 с.
3. Фоменко, В. Т. ARG-деформации гиперповерхностей в римановом пространстве / В. Т. Фоменко // Ред. Сиб. мат. журн. Деп. в ВИНИТИ 16.11.1990. — 1990. — № 5805. — С. 1–22.
4. Эйзенхарт, Л. П. Риманова геометрия / Л. П. Эйзенхарт. — М. : Изд-во иностр. лит., 1948. — 316 с.

ALMOST *AR*-DEFORMATIONS OF SURFACES WITH CONDITION OF GENERALIZED SLIDING

A.I. Bodrenko

The properties of almost AR-deformations of hypersurfaces in Euclidean spaces with prescribed change of Grassmannian image and condition of generalized sliding are studied in this article.

Key words: *deformation of surface, mean curvature, second fundamental form, Grassmannian image, generalized sliding.*