DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.1.4

УДК 517.928
ББК 22.161.6

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дилмурат Абдиллажанович Турсунов

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии,
Ошский государственный университет
dosh2012@mail.ru
ул. Ленина, 331, 723500 г. Ош, Республика Кыргызстан

Элмурод Абдиллажанович Турсунов

Преподаватель кафедры математических методов в экономике,
Ошский государственный университет
Emrah812@mail.ru
ул. Ленина, 331, 723500 г. Ош, Республика Кыргызстан

Аннотация. Развивается метод пограничных функций для построения полных асимптотических разложений решений бисингулярных задач. В данной работе исследуется асимптотическое поведение решения бисингулярной задачи Коши для систем линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений. Главный член построенного асимптотического разложения имеет отрицательную дробную степень по малому параметру. Асимптотическое разложение обосновано методом дифференциальных неравенств.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, система обыкновенных дифференциальных уравнений, асимптотика, бисингулярная задача, задача Коши, пограничная функция, малый параметр.

Введение

Во многих областях науки сложные задачи описываются системами сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Исследование асимптотического поведения решения сингулярно возмущенных задач сформировалось на основе фундаментальных работ А.Н. Тихонова [5; 6] и развивается в работах его учеников и многих других ученых. Вместе с тем проблема построения полных асимптотических разложений решений для некоторых классов сингулярно возмущенных задач до сих пор остается актуальной. Например, бисингулярные задачи [3; 4], в которых одна особенность связана с сингулярной зависимостью решения от малого параметра, а вторая – решение предельного уравнения имеет сингулярности.

Случаи, в которых бисингулярные задачи имеют явные решения, крайне редки. Даже для современных компьютеров определить поведение решения в пограничных (внутренних) слоях, при достаточно малых значениях параметра, – трудоемкая задача. Важным инструментом при исследовании поведений решений бисингулярных задач являются асимптотические методы. В связи с этим в настоящее время интенсивно разрабатываются различные асимптотические методы. Нами тоже предлагается модификация метода пограничных функций Вишика – Люстерника – Васильевой – Иманалиева [7; 8] для построения асимптотического разложения решения бисингулярных задач. Для оценки остаточных членов асимптотического ряда применяем метод дифференциальных неравенств [1].

Постановка задачи

Исследуем асимптотическое поведение решения бисингулярной задачи Коши

$$\varepsilon Y'_\varepsilon(x) + x^m A(x) Y_\varepsilon(x) = \widetilde{F}_\varepsilon(x),\ 0 < x < +\infty, \tag{1}$$

$$Y_\varepsilon(0) = Y^0, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ – скалярный малый параметр, $m \in \mathbf{N}$, $F_\varepsilon(x),\ Y_\varepsilon(x),\ Y^0 \in R^n$, $A(x)$ – положительная квадратная матрица-функция n-го порядка с собственными значениями $0 < \lambda_{i0} < \lambda_i(x)$, λ_{i0} – const, $\lambda_i(x) \neq \lambda_j(x)$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ при $0 \leq x$; $\lambda_i(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \lambda_{ij} x^j$, $\widetilde{F}_\varepsilon(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \widetilde{F}_k(x)$ $\widetilde{F}_k(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} x^j \widetilde{F}_{kj}$.

При наложенных условиях на матрицу-функцию $A(x)$ существует такая невырожденная квадратная матрица-функция $B(x)$ порядка n, для которой имеет место равенство [2]

$$B^{-1}(x)A(x)B(x) = D(x),$$

где $D(x) = \mathrm{diag}\{\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_n(x)\}$ – диагональная матрица-функция.

Применяя подстановку $Y_\varepsilon(x) = B(x)Z_\varepsilon(x)$ к задаче (1)–(2), затем полученные равенства умножая слева на матрицу-фукцию $B^{-1}(x)$, получаем

$$\varepsilon Z'_\varepsilon(x) + x^m D(x) Z_\varepsilon(x) = F_\varepsilon(x) + \varepsilon \widetilde{B}(x) Z_\varepsilon(x),\ 0 < x < +\infty, \tag{3}$$

$$Z_\varepsilon(0) = Z^0, \tag{4}$$

где $F_\varepsilon(x) = B^{-1}(x)\widetilde{F}_\varepsilon(x),\ \widetilde{B}(x) = B^{-1}(x)B'(x),\ Z^0 = B^{-1}(0)Y^0$.

Построение формального разложения

Асимптотическое разложение решения задачи (3), (4) ищем в виде

$$Z_\varepsilon(x) \overset{as}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Z_k(x) + \sum_{k=-m}^{\infty} \mu^k \Pi_k(t), \tag{5}$$

где $\varepsilon = \mu^{m+1}$, $t = x/\mu$.

Равенство (3) запишем в виде

$$\varepsilon Z'_\varepsilon(x) + x^m D(x) Z_\varepsilon(x) = F_\varepsilon(x) + \varepsilon \widetilde{B}(x) Z_\varepsilon(x) + H_\varepsilon(x) - H_\varepsilon(x),\ 0 < x < +\infty, \tag{6}$$

где $H_\varepsilon(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k H_k(x)$ – пока неизвестный асимптотический ряд.

Подставляя (5) в (6), получим

$$Z'_{k-1}(x) + x^m D(x) Z_k(x) = F_k(x) + \widetilde{B}(x) Z_{k-1}(x) - H_k(x),\ k = 0,1,2,... \qquad (7)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left(\Pi'_{k-m}(t) + t^m D(\mu t) \Pi_{k-m}(t) \right) = \mu \widetilde{B}(\mu t) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \Pi_{k-m}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{(m+1)k} H_k(\mu t). \qquad (8)$$

Из (7) имеем

$$Z_k(x) = \frac{1}{x^m} D^{-1}(x) \left(G_k(x) - H_k(x) \right),\ k = 0,1,2,...$$

где $G_k(x) = F_k(x) + \widetilde{B}(x) Z_{k-1}(x) - Z'_{k-1}(x),\ Z_{-1}(x) \equiv 0$.

Неизвестные вектор-функции $H_k(x)$ подберем так, чтобы выполнялись условия:

а) $Z_k \in C^{\infty}[0,+\infty), k = 0,1,...$;

б) $\Pi_{k-m}(t) \to 0,\ t \to +\infty,\ k = 0,1,...$

Пусть $H_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j H_{k,j}$, тогда при $H_{k,j} = G_{k,j}, G_{k,j} = \frac{1}{j!} G_k^{(j)}(0),\ j = 0,1,...,m-1,$ выполняется условие а). Остальные значения матрицы H_{kj} подберем при построении пограничных функций $\Pi_k(t)$.

Пусть $D(\mu t) = \sum_{j=0}^{\infty} (\mu t)^j \Lambda_j$, $\widetilde{B}(\mu t) = \sum_{j=0}^{\infty} (\mu t)^j B_j$, где Λ_j, B_j – постоянные квадратные матрицы порядка n, в частности, $\Lambda_0 = diag\{\lambda_{01}, \lambda_{02}, ..., \lambda_{0n}\}$ – положительная, диагональная матрица. Тогда равенство (8) можно записать в виде:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left(\Pi'_{k-m}(t) + t^m \Lambda_0 \Pi_{k-m}(t) \right) = \mu \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \sum_{j=0}^{k} t^j \widetilde{B}_j \Pi_{k-m-j}(t) -$$
$$- \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \sum_{j=1}^{k} t^{m+j} \Lambda_j \Pi_{k-m-j}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{(m+1)k} \sum_{j=0}^{\infty} (\mu t)^j H_{k,j}$$

Отсюда:

$$L\Pi_{-m} = \Pi'_{-m}(t) + t^m \Lambda_0 \Pi_{-m}(t) = H_{0,0},\ t \in (0,+\infty). \qquad (9)$$

$$L\Pi_{i-m} = \sum_{j=1}^{i} t^j \widetilde{B}_j \Pi_{i-m-j}(t) - \sum_{j=1}^{i} t^{m+j} \Lambda_j \Pi_{i-m-j}(t) + H_{0,i} t^i,\ i = 1,...,m,\ t \in (0,+\infty). \qquad (10)$$

$$L\Pi_{(m+1)k+i} = \sum_{j=1}^{(m+1)k+m+i} t^j \widetilde{B}_j \Pi_{(m+1)k+i-j}(t) - \sum_{j=1}^{(m+1)k+m+i} t^{j+m} \Lambda_j \Pi_{(m+1)k+i-j}(t) +$$
$$+ \sum_{s=0}^{k} t^{(m+1)s+i+m} H_{k-s,(m+1)s+i+m},\ \ k \in N \cup \{0\},\ i = 0,1,...,m,\ t \in (0,+\infty). \qquad (11)$$

Равенство (4) порождает начальные условия

$$\Pi_0(0) = Z^0 - Z_0(0),\ \Pi_{(m+1)k}(0) = -Z_k(0),\ \Pi_s(0) = 0,\ s \neq (m+1)k,\ k \in N. \qquad (12)$$

Как нам известно [2], задача Коши

$$Lw(t) = P(t),\ t \in (0, +\infty),\ w(0) = w^0,$$

где w^0, $P(t) \in R^n$, $P \in C[0, +\infty)$ w^0 – const,
имеет единственное решение, представимое в виде

$$w(t) = w^0 e^{-\frac{t^{m+1}}{m+1}\Lambda_0} + e^{-\frac{t^{m+1}}{m+1}\Lambda_0}\int_0^t P(s) e^{\frac{s^{m+1}}{m+1}\Lambda_0} ds \cdot$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть матрица-функции $Q_j(t) \in [0, +\infty)$ разлагаются в асимптотические ряды

$$Q_j(t) = t^{m-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{t^{(m+1)k+j}}Q_{j,(m+1)k+j},\ j = 0,1,...,m, \quad t \to +\infty$$

Тогда в области $[0, +\infty)$ существуют решения уравнений

$$w'_j(t) + t^m\Lambda_0 w_j(t) = Q_j(t),\ \ j = 0,1,...,m, \tag{13}$$

которые разлагаются в асимптотические ряды

$$w_j(t) = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{t^{(m+1)k+j}}w_{j,(m+1)k+j},\ j = 0,1,...,m,\ \ t \to +\infty. \tag{14}$$

При этом ряды (14) можно многократно почленно дифференцировать, и они являются асимптотическими разложениями решений уравнений (13).

Доказательство. Нетрудно заметить, что дифференцируемость рядов (14) вытекает непосредственно из уравнений (13). ФАРР ищем в виде (14), где $w_{j,(m+1)k+j}$ – пока неизвестные.

Подставляя ряды (14) в уравнение (13) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях τ, получаем рекуррентные системы уравнении для $w_{j,(m+1)k+j}$. Отсюда последовательно определяются все члены рядов (14). Далее оцениваются остаточные члены рядов (14). Таким образом, ряды (14) действительно являются асимптотическими разложениями решений уравнений (13).

Лемма 2. Пусть $H_{k,j} = \sum_{s=1}^{(m+1)k+m}\Lambda_{j+s-m}\Pi_{(m+1)k-s,s}$, $k = 0,1,\ldots, j = m, m+1,\ldots$ Тогда при $t \to +\infty$ справедливы асимптотические разложения:

$$\Pi_{(m+1)(k-1)+s}(t) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{t^{(m+1)j-s}}\Pi_{(m+1)(k-1)+s,(m+1)j-s}, t \to +\infty,\ s = 0,1,...,m,\ \ k = 0,1,...$$

Доказательство. Последовательно применяя лемму 1 для уравнений (8) и (9) при $i = 1, 2,\ldots, m-1$, получаем:

$$\Pi_{i-m}(t) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{t^{(m+1)j-i-1}}\Pi_{i-m,(m+1)j-i-1},\ t \to +\infty,\ i = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{15}$$

В уравнениях (9) при $i = m$ и (10) мы должны выбрать неизвестные матрицы $H_{k,j}$ так, чтобы максимальная степень разложения правых частей равенств (9), (10) по t не превышала m при $t \to +\infty$.

Из (9) при $i = m$ имеем:

$$L\Pi_0 = -\sum_{j=1}^{m} t^{m+j}\Lambda_j \Pi_{-j}(t) + t^m H_{0,m}. \qquad (16)$$

Учитывая асимптотические разложения (15) при

$$H_{0,n} = \Lambda_1\Pi_{-1,1} + \Lambda_2\Pi_{-2,2} + \ldots + \Lambda_m\Pi_{-m,m}$$

и применяя лемму 1 для уравнения (16), получаем:

$$\Pi_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{t^{(m+1)j}}\Pi_{0,(m+1)j},\; t\to+\infty .$$

Аналогично доказываются и остальные случаи.

Таким образом, нами определены все члены асимптотического ряда (3). Перейдем теперь к обоснованию этого асимптотического ряда.

Обоснование разложения

Пусть $R_{\varepsilon,k}(x) = Z_\varepsilon(x) - Z_{\varepsilon,k}(x)$, где $Z_{\varepsilon,k}(x) = \sum_{j=0}^{k}\varepsilon^j Z_j(x) + \sum_{j=-m}^{(m+1)k}\mu^j\Pi_j(t)$.

Тогда для остаточной функции получим задачу

$$\varepsilon R'_{\varepsilon,k}(x) + x^m A(x) R_{\varepsilon,k}(x) = \varepsilon^{k+1}\Phi(x,t,\varepsilon),\; 0<x<+\infty,$$

$$R_{\varepsilon,k}(0) = 0,$$

где $\Phi(x,t,e) = O(1),\; e\to 0$.

Для оценки применяем метод дифференциальных неравенств [1]. Пусть нижнее решение $U^{Н}(x,\varepsilon) = -(1+x)p\varepsilon^k$, верхнее решение $U^{В}(x,\varepsilon) = (1+x)p\varepsilon^k$, где $0<\varepsilon<\varepsilon_0<1$, $p = \varepsilon c\left\|(\varepsilon + x^m(x+1)A(x))^{-1}\right\| + 1$, $c = \|\Phi(x,t,\varepsilon\|$. Имеем:

$$lR_{\varepsilon,k} \equiv \varepsilon R'_{\varepsilon,k}(x) + x^m A(x) R_{\varepsilon,k}(x) - \varepsilon^{k+1}\Phi(x,t,\varepsilon) = 0,$$

$$lU^H = -\varepsilon^{k}(\varepsilon + x^m(x+1)A(x))\left(p + \varepsilon(\varepsilon + x^m(x+1)A(x))^{-1}\Phi(x,t,\varepsilon)\right) < 0,$$

$$lU^B = \varepsilon^{k}(\varepsilon + x^m(x+1)A(x))\left(p - \varepsilon(\varepsilon + x^m(x+1)A(x))^{-1}\Phi(x,t,\varepsilon)\right) > 0,$$

то есть

$$lU^H < lR_{\varepsilon,k} < lU^B,\; 0<x<+\infty,$$

а для начального условия справедливы неравенства

$$U^{Н}(0,\varepsilon) = -p\varepsilon^k < R_{\varepsilon,k}(0) = 0 < p\varepsilon^k = U^{В}(0,\varepsilon).$$

Отсюда [1],

$$-(1+x)p\varepsilon^k < R_{\varepsilon,k}(x) < (1+x)p\varepsilon^k,\ \text{или}\ R_{\varepsilon,k}(x) = O(\varepsilon^k),\ \varepsilon\to 0.$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема. Для решения бисингулярной задачи Коши (1), (2) при $\varepsilon\to 0$ справедливо асимптотическое разложение (5).

Пример. Рассмотрим бисингулярную задачу Коши

$$\varepsilon y'_\varepsilon(x) + xy_\varepsilon(x) = f(x), 0 < x < +\infty, \tag{17}$$

$$y_\varepsilon(0) = y^0, \tag{18}$$

где функция $f(x) \in C^\infty[0,\infty)$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$, $f_k = f^{(k)}(0)/k!$, $f_0 \neq 0$, y^0 – const.

Как мы видим, при $x = 0$ нарушаются условия асимптотической устойчивости. Предельное уравнение (соответствующее невозмущенное)

$$-x\tilde{y}(x)+f(x)=0,$$

имеет решение:

$$\tilde{y}(x) = f(x)/x. \tag{19}$$

Решение (19) имеет особенность в точке $x = 0$. Кроме того, это решение не удовлетворяет начальному условию (18). Поэтому задачу (17)(18) по терминологии А.М. Ильина можно называть бисингулярной [4].

Решение задачи (17), (18) будем искать в виде:

$$y(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x) + \sum_{k=-1}^{\infty}\mu^k \pi_k(\tau), \tag{20}$$

где $\tau = x/\mu$, $\mu^2 = \varepsilon$.

Уравнение (17) запишем в виде

$$\varepsilon y'_\varepsilon(x) + xy_\varepsilon(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k + \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k, \tag{21}$$

Подставляя (20) в (21), имеем:

$$\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k \frac{dv_k(x)}{dx} + \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k \frac{d\pi_{k-1}(\tau)}{d\tau} = -x\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x) - \tau\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k \pi_{k-1}(\tau) + f(x) - \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k + \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k.$$

Отсюда получаем:

$$\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k \frac{dv_k(x)}{dx} = -x\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x) + f(x) - \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k, \tag{22}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k \frac{d\pi_{k-1}(\tau)}{d\tau} = -\tau\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k \pi_{k-1}(\tau) + \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k. \tag{23}$$

Из равенства (22) имеем:

$$-xv_0(x) + f(x) - h_0 = 0;\ v'_{k-1}(x) = -xv_k(x) - h_k,\ k \in \mathbf{N}.$$

Отсюда следует, что

$$v_0(x) = (f(x) - h_0) / x;\ v_k(x) = -(v'_{k-1}(x) + h_k) / x,\ k \in \mathbf{N}.$$

И здесь мы неизвестные коэффициенты h_k выберем так, чтобы $v_k(x)$ $k = 0, 1, ...$ были гладкими:

$$h_0 = f_0,\ h_k = -v'_{k-1}(0),\ k \in \mathbf{N}.$$

При таких значениях h_k мы получим:

$$v_0(x) = (f(x) - f_0)/x;\ v_k(x) = -(v'_{k-1}(x) - v'_{k-1}(0))/x,\ k \in \mathbf{N}.$$

Следовательно, $v_k(x) \in C^\infty[0,+\infty)$ $k = 0, 1, ...$
Из равенства (23) имеем:

$$\frac{d\pi_{2k-1}(\tau)}{d\tau} + \tau\pi_{2k-1}(\tau) = h_k,\ \frac{d\pi_{2k}(\tau)}{d\tau} + \tau\pi_{2k}(\tau) = 0,\ k = 0, 1, 2,...$$

Учитывая условия (18), получим следующие задачи:

$$\frac{d\pi_0(\tau)}{d\tau} + \tau\pi_0(\tau) = 0,\ \pi_0(0) = y^0 - v_0(0), \tag{24}$$

$$\frac{d\pi_{2k}(\tau)}{d\tau} + \tau\pi_{2k}(\tau) = 0,\ \pi_{2k}(0) = -v_k(0),\ k = 1, 2, ..., \tag{25}$$

$$\frac{d\pi_{2k-1}(\tau)}{d\tau} + \tau\pi_{2k-1}(\tau) = h_k,\ \pi_{2k-1}(0) = 0. \tag{26}$$

Задачи (24)–(26) имеют единственные решения, представимые в виде:

$$\pi_0(\tau) = \left(y^0 - v_0(0)\right)e^{-\tau^2/2};\ \pi_{2k}(\tau) = -v_k(0)e^{-\tau^2/2},\ k = 1, 2, ...;$$

$$\pi_{2k-1}(\tau) = h_k e^{-\tau^2/2}\int_0^\tau e^{s^2/2}ds,\ k = 0, 1, 2,...$$

Для решения задач (24)–(26) при $\tau \to \infty$ справедливы соотношения:

$$\pi_{2k}(\tau) = O\left(e^{-\tau^2/2}\right),\ \pi_{2k-1}(\tau) = h_k\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^3} + \frac{3}{\tau^5} + ...\right),\ k = 0, 1, 2,...$$

Нами определены все члены формального асимптотического разложения (20).

Для обоснования этого формального разложения рассмотрим остаточную функцию $R_{\varepsilon,k}(x) = y_\varepsilon(x) - y_{\varepsilon,k}(x)$, где $y_{\varepsilon,k}(x) = \sum_{j=0}^{k}\varepsilon^j v_j(x) + \sum_{j=-1}^{2k}\mu^j\pi_j(\tau)$.

Для остаточного члена получим следующую задачу:

$$\varepsilon R'_{\varepsilon,k}(x) + xR_{\varepsilon,k}(x) = -\varepsilon^{k+1} v'_{k+1}(x),\ 0 < x, \qquad (28)$$

$$R_{\varepsilon,k}(0) = 0. \qquad (29)$$

Задача (28)–(29) имеет единственное решение

$$R_{\varepsilon,k}(x) = -\varepsilon^k e^{-x^2/2\varepsilon} \int_0^x v'_{k+1}(s) e^{s^2/2\varepsilon} ds,$$

и для него справедлива асимптотическая оценка $R_{\varepsilon,k}(x) = O(\varepsilon^k)$, $\varepsilon \to 0$, $0 \le x < +\infty$. Эту же оценку можно получить и методом дифференциальных неравенств, как это было сделано выше.

Таким образом, для решения задачи Коши (17)–(18) справедливо разложение (20).

Заключение

Как показано выше, метод, предлагаемый нами, намного упрощает количество вычислений сравнительно других асимптотических методов, и оценка для остаточного члена асимптотического ряда получается точно. Мы доказали применимость метода пограничных функций для построения полных асимптотических разложений решений бисингулярных задач. Однако в бисингулярных задачах не все пограничные функции убывают экспоненциально, то есть некоторые пограничные функции могут убывать степенным характером. В данной работе исследовано и построено полное асимптотическое разложение решения бисингулярной задачи Коши для систем линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом доказано, что главный член асимптотического разложения имеет отрицательную дробную степень по малому параметру. Оценка для остаточной функции получена с помощью метода дифференциальных неравенств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева, А. Б. Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств Чаплыгина (некоторые разделы курса лекций «Дифференциальные уравнения») / А. Б. Васильева, Н. Н. Нефедов. – М. : Изд-во МГУ, 2007. – 9 с.

2. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1966. – 576 с.

3. Зимин, А. Б. Задача Коши для линейного уравнения второго порядка с малым параметром, вырождающегося в пределе в уравнение с особыми точками / А. Б. Зимин // Дифференциальные уравнения. – 1969. Т. 5, № 9. – С. 1583–1593.

4. Ильин, А. М. Согласование асимптотических разложений краевых задач / А. М. Ильин. – М. : Наука, 1989. – 334 с.

5. Тихонов, А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра / А. Н. Тихонов // Математический сборник. – 1948. – Т. 22 (64). – С. 193–204.

6. Тихонов, А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных / А. Н. Тихонов // Математический сборник. – 1952. – Т. 31 (73), № 3. – С. 575–586.

7. Турсунов, Д. А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенной задачи Дирихле в кольце с квадратичным ростом на границе / Д. А. Турсунов, У. З. Эркебаев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2016. – Т. 8, № 2. – С. 52–61.

8. Турсунов, Д. А. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения с особенностями / Д. А. Турсунов, У. З. Эркебаев // Уфимский математический журнал. – 2016. – Т. 8, № 1. С. 102–112.

REFERENCES

1. Vasileva A.B., Nefedov N.N. *Teoremy sravneniya. Metod differentsialnykh neravenstv Chaplygina (nekotorye razdely kursa lektsiy «Differentsialnye uravneniya»)* [Comparison Theorems. Chaplygin Method of Differential Inequalities (Some Sections of the Course of Lectures “Differential Equations”)]. Moscow, MSU Publ., 2007. 9 p.

2. Gantmaher F.R. *Teoriya matrits* [Matrix Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 576 p.

3. Zimin A.B. Zadacha Koshi dlya lineynogo uravneniya vtorogo poryadka s malym parametrom, vyrozhdayushchegosya v predele v uravnenie s osobymi tochkami [The Cauchy Problem for a Linear Second-Order Equations with a Small Parameter, Degenerating in the Limit in the Equation with Singularities]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 1969, vol. 5, no. 9, pp. 1583-1593.

4. Ilyin A.M. *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozheniy kraevykh zadach* [Matching of Asymptotic Expansions of Boundary Value Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 334 p.

5. Tikhonov A.N. O zavisimosti resheniy differentsialnykh uravneniy ot malogo parametra [On the Dependence of the Solutions of Differential Equations on a Small Parameter]. *Matematicheskiy sbornik* [Mathematical Collection], 1948, vol. 22 (64), pp. 193-204.

6. Tikhonov A.N. Sistemy differentsialnykh uravneniy soderzhashchikh malye parametry pri proizvodnykh [Systems of Differential Equations Containing Small Parameters in the Derivatives]. *Matematicheskiy sbornik* [Mathematical Collection], 1952, vol. 31 (73), pp. 575-586.

7. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asimptotika resheniya bisingulyarno vozmushhennoy zadachi Dirikhle v koltse s kvadratichnym rostom na granitse [Asymptotics of the Solution to the Bisingularly Perturbed Dirichlet Problem in the Ring with Quadratic Growth on the Boundary]. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo Gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika"* [Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"], 2016, vol. 8, no. 2, pp. 52-61.

8. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asymptotic expansions of solutions to Dirichlet problem for elliptic equation with singularities. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal* [Ufa Mathematical Journal], 2016, vol. 8, no. 1, pp. 97-107.

THE ASYMPTOTIC SOLUTION OF A BISINGULAR CAUCHY PROBLEM FOR SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Dilmurat Abdillajanovich Tursunov

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Algebra and Geometry,
Osh State University
dosh2012@mail.ru
Lenina St., 331, 723500 Osh, Republic of Kyrgyzstan

Elmurod Abdilajanovich Tursunov

Teacher, Department of Mathematical Methods in Economics,
Osh State University
Emrah812@mail.ru
Lenina St., 331, 723500 Osh, Republic of Kyrgyzstan

Abstract. The Cauchy problem for system of ordinary differential equations with a small parameter in the highest derivatives takes a unique place in mathematics. The aim of the research is to develop the asymptotic method of boundary functions for constructing complete asymptotic expansions of the solutions to such problems. The proposed generalized method of boundary functions differs from the matching method in the fact that the growing features of the outer expansion are actually removed from it and with the help of the auxiliary asymptotic series are fully included in the internal expansions. This method differs from the classical method of boundary functions in the fact that the boundary functions decay non-exponentially in power-mode nature. Using the proposed method, a complete asymptotic expansion of the solution to the Cauchy problem for bisingular perturbed linear inhomogeneous system of ordinary differential equations is built. A built asymptotic series corresponds to the Puiseux series. The basic term of the asymptotic expansion of the solution has a negative fractional degree of the small parameter, which is typical for bisingular perturbed equations. The built expansion is justified by the method of differential inequality.

Key words: singular perturbation, system of ordinary differential equations, asymptotic, bisingular problem, Cauchy problem, boundary function, small parameter.