DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.1.5

УДК 517.968
ББК 22.161

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Турсун Камалдинович Юлдашев

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики,
Сибирский государственный аэрокосмический университет
tursun@sibsau.ru, tursun.k.yuldashev@gmail.com
просп. им. газеты «Красноярский рабочий», 31, 660014 г. Красноярск, Российская Федерация

Аннотация. Рассмотрены вопросы однозначной разрешимости и построения решения нелокальной краевой задачи для трехмерного неоднородного интегро-дифференциального уравнения псевдопараболического типа третьего порядка с вырожденным ядром. Использован спектральный метод, основанный на разделении переменных. Получена система из счетных систем алгебраических уравнений. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости поставленных в работе задач. Показана гладкость этих решений.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, вырожденное ядро, трехмерная область, интегральное условие, однозначная разрешимость.

1. Постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению смешанных задач для уравнений математической физики. Теория начальных и краевых задач, в силу ее прикладной важности, в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений (см., например, [3; 10; 11]). Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Многие задачи газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводятся к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1; 6; 19]. Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы. Часто изучение задач моделирования фильтрации жидкости в пористых средах сводится к рассмотрению дифференциальных уравнений третьего порядка [12]. К дифференциальным уравнениям в частных производных третьего порядка также сводятся задачи изучения распространения волн в слабодиспергирующих средах, в холодной плазме и магнитной гидродинамике и т. д. Изучению прямых и обратных задач для уравнений в частных производных третьего порядка посвящено большое количество работ (см., например, [2; 4; 7; 9; 13; 16; 17]).

В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме [5; 8].

Различные задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с вырожденным ядром рассматривались в [14; 15].

В настоящей работе изучается однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для трехмерного неоднородного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка с вырожденным ядром. Итак, в трехмерной области $\Omega=\{(t,x,y)|\ 0<t<\text{в},\ 0<x,y<l\}$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$U_t(t,x,y)-U_{txx}(t,x,y)-U_{tyy}(t,x,y)-U_{xx}(t,x,y)-U_{yy}(t,x,y)+$$
$$+\nu\int_0^\beta K(t,s)\Big(U_{xx}(s,x,y)+U_{yy}(s,x,y)\Big)ds=f(t,x,y), \qquad (1)$$

где $f(t,x,y)\in C(\Omega)$, $f(t,0,y)=f(t,l,y)=f(t,x,0)=f(t,x,l)=0$; β и $l-$ заданные положительные действительные числа; н – действительный спектральный параметр; $K(t,s)=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s)$, $a_i(t),b_i(s)\in C^1[0;\text{в}]$. Здесь предполагается, что функции $a_i(t)$ и $b_i(s)$ являются линейно независимыми.

Уравнение (1) будем рассматривать при следующем нелокальном условии

$$U(0,x,y)+\int_0^{\text{в}}U(t,x,y)\,dt=\varphi(x,y),\quad 0\le x,y\le l \qquad (2)$$

и при граничных условиях типа Бенара

$$U(t,0,y)=U(t,l,y)=U(t,x,0)=U(t,x,l)=0,\quad 0\le t\le\text{в}, \qquad (3)$$

где $\varphi(x,y)$ – заданная достаточно гладкая функция; $\varphi(0,y)=\varphi(l,y)=\varphi(x,0)=\varphi(x,l)=0$.

Сначала рассмотрим следующее однородное дифференциальное уравнение

$$U_t(t,x,y)-U_{txx}(t,x,y)-U_{tyy}(t,x,y)-U_{xx}(t,x,y)-U_{yy}(t,x,y)=0. \qquad (4)$$

Задача 1. Найти в трехмерной области Ω функцию $U(t,x,y)$, удовлетворяющую однородному дифференциальному уравнению (4), заданным условиям (2), (3) и также следующим условиям:

$$U(t,x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1\left(\Omega\cup\{x=0\}\cup\{x=l\}\cup\{y=0\}\cup\{y=l\}\right)\cap C^{1,2,2}_{t,x,y}(\Omega), \qquad (5)$$

где $\overline{\Omega}=\{(t,x,y)|\ 0\le t\le\text{в},\ 0\le x,y\le l\}$.

Задача 2. Найти в трехмерной области Ω функцию $U(t,x,y)$, удовлетворяющую неоднородному интегро-дифференциальному уравнению (1) и заданным условиям (2), (3) и (5).

2. Поиск частных решений задачи 1

Нетривиальные частные решения уравнения (4) в трехмерной области Ω будем искать в виде $U(t,x,y)=T(t)\cdot V(x,y)$. Тогда из уравнения (4) получаем:

$$T'(t)\cdot V(x,y)-T'(t)\cdot V_{xx}(x,y)-T'(t)\cdot V_{yy}(x,y)=$$
$$=T(t)\cdot V_{xx}(x,y)+T(t)\cdot V_{yy}(x,y).$$

Здесь, как и в работе [18], почленно разделим на $T(t)\cdot V(x,y)$:

$$\frac{T'(t)}{T(t)}-\frac{T'(t)}{T(t)}\left(\frac{V_{xx}(x,y)}{V(x,y)}+\frac{V_{yy}(x,y)}{V(x,y)}\right)=\frac{V_{xx}(x,y)}{V(x,y)}+\frac{V_{yy}(x,y)}{V(x,y)}.$$

Положим, что

$$\frac{V_{xx}(x,y)}{V(x,y)}+\frac{V_{yy}(x,y)}{V(x,y)}=-\text{м}^2,$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)}-\frac{T'(t)}{T(t)}\left(\frac{V_{xx}(x,y)}{V(x,y)}+\frac{V_{yy}(x,y)}{V(x,y)}\right)=-\text{м}^2,$$

где м^2 – постоянная разделения $0<\mu$.

Отсюда с учетом граничных условий (3) получаем:

$$V_{xx}(x,y)+V_{yy}(x,y)+\text{м}^2\,V(x,y)=0,\ \ 0<x,y<l, \tag{6}$$

$$V(0,y)=V(l,y)=V(x,0)=V(x,l)=0, \tag{7}$$

$$T'(t)+\lambda^2\,T(t)=0,\ \ 0<t<\text{в}, \tag{8}$$

где $\lambda^2=\dfrac{\mu^2}{1+\mu^2}$.

Спектральная задача (6) и (7) имеет решения:

$$V_{n,m}(x,y)=X_n(x)\cdot Y_m(y), \tag{9}$$

где $X_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\ \sin\dfrac{\text{p}\,n}{l}x$, $Y_m(y)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\ \sin\dfrac{\text{p}\,m}{l}y$, $n,m=1,2,\ldots$; $\text{м}_{n,m}=\dfrac{\text{p}\,(n+m)}{l}$.

Тогда общее решение дифференциального уравнения (8) имеет вид:

$$T_{n,m}(t)=c_{n,m}\,e^{-\lambda^2_{n,m}t}, \tag{10}$$

где $c_{n,m}$ – произвольные постоянные; $\text{л}^2_{n,m}=\dfrac{\text{м}^2_{n,m}}{1+\text{м}^2_{n,m}}$.

С учетом функций (9) решение задачи 1 ищем в виде следующего ряда Фурье

$$U(t,x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}u_{n,m}(t)\,\sin\frac{\text{p}\,n}{l}x\,\sin\frac{\text{p}\,m}{l}y, \tag{11}$$

где

$$u_{n,m}(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l U(t,x,y)\sin\frac{\text{p}\,n}{l}x\,\sin\frac{\text{p}\,m}{l}y\,dx\,dy,\ \ n,m=1,2,\ldots\,. \tag{12}$$

3. Определение коэффициентов Фурье (12)

Покажем, что функции (12) удовлетворяют уравнению (8). Дифференцируя по t равенства (12) и учитывая уравнение (4), получим

$$u'_{n,m}(t)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l U_t\,\sin\frac{\mathrm{p}n}{l}x\,\sin\frac{\mathrm{p}m}{l}y\;d\,y\,d\,x=$$

$$=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l\left(U_{txx}+U_{tyy}+U_{xx}+U_{yy}\right)\,\sin\frac{\mathrm{p}n}{l}x\,\sin\frac{\mathrm{p}m}{l}y\;d\,y\,d\,x=$$

$$=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l\left(U_{txx}+U_{xx}\right)\,\sin\frac{\mathrm{p}n}{l}x\,\sin\frac{\mathrm{p}m}{l}y\;d\,y\,d\,x+$$

$$+\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l\left(U_{tyy}+U_{yy}\right)\,\sin\frac{\mathrm{p}n}{l}x\,\sin\frac{\mathrm{p}m}{l}y\;d\,y\,d\,x\,. \tag{13}$$

Интегрируя два раза по частям по x в первом интеграле в правой части (13), затем интегрируя два раза по частям по y во втором интеграле в правой части (13), с учетом условий (3) получаем:

$$u'_{n,m}(t)+\lambda^2_{n,m}u_{n,m}(t)=0, \tag{14}$$

где $\lambda^2_{n,m}=\dfrac{\mu^2_{n,m}}{1+\mu^2_{n,m}}$, $\mu_{n,m}=\dfrac{\pi(n+m)}{l}$.

Дифференциальные уравнения (14) при $\text{л}=\text{л}_{n,m}$ совпадают с уравнением (8). Поэтому для уравнений (14) аналогично формуле (10) имеем:

$$u_{n,m}(t)=c_{n,m}\,e^{-\lambda^2_{n,m}t}\,. \tag{15}$$

Для нахождения постоянных $c_{n,m}$ рассматриваем функцию (12) и воспользуемся интегральным условием (2):

$$u_{n,m}(0)+\int\limits_0^\beta u_{n,m}(t)\,d\,t=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l\left(U(0,x,y)+\int\limits_0^\beta U(t,x,y)\,d\,t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\;d\,x\,d\,y=$$

$$=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l\varphi(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\;d\,x\,d\,y=\varphi_{n,m}\,. \tag{16}$$

Тогда из (15), (16) приходим к следующему соотношению:

$$\varphi_{n,m}=u_{n,m}(0)+\int\limits_0^\beta u_{n,m}(t)\,d\,t=c_{n,m}\left(1+\frac{1}{\lambda^2_{n,m}}\left(1-e^{-\lambda^2_{n,m}\beta}\right)\right). \tag{17}$$

Относительно неизвестных коэффициентов $c_{n,m}$ из (17) получаем

$$c_{n,m}\left(\lambda^2_{n,m}+1-e^{-\lambda^2_{n,m}\beta}\right)=\lambda^2_{n,m}\,\varphi_{n,m}\,. \tag{18}$$

Для однозначного определения $c_{n,m}$ из (18) требуем выполнения следующего условия:

$$A_{n,m}(\beta)=1+\lambda_{n,m}^2-e^{-\lambda_{n,m}^2\beta}\neq 0. \tag{19}$$

При выполнении условия (19) из (21) находим неизвестные коэффициенты $c_{n,m}$:

$$c_{n,m}=\frac{\lambda_{n,m}^2}{A_{n,m}(\beta)}\varphi_{n,m}. \tag{20}$$

Подставляя найденные коэффициенты (20) в формулу (15), получим:

$$u_{n,m}(t)=\frac{\lambda_{n,m}^2}{A_{n,m}(\beta)}\varphi_{n,m}\,e^{-\lambda_{n,m}^2 t}. \tag{21}$$

Предположим, что $\varphi(x,y)\equiv 0$. Тогда $\varphi_{n,m}\equiv 0$ и из формул (12) и (21) следует, что

$$\int_0^l\int_0^l U(t,x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy=0,\ n,m=1,2,\ldots\,.$$

Отсюда в силу полноты систем собственных функций $\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x\right\}$, $\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi m}{l}y\right\}$ в $L_2[0,l]$ заключаем, что $U(t,x,y)\equiv 0$ для всех $x,y\in[0,l]$ и $t\in[0,\beta]$.

4. Существование решения задачи 1

Докажем от обратного, что при всех значениях β и любых *n*, *m* условие (19) выполняется. Предположим, что при некоторых $0<\beta$ и *n*, *m* нарушается условие (19) и имеет место равенство

$$A_{n,m}(\beta)=1+\lambda_{n,m}^2-e^{-\lambda_{n,m}^2\beta}=0. \tag{22}$$

Это условие эквивалентно равенству

$$-\lambda_{n,m}^2\beta=\ln\left(1+\lambda_{n,m}^2\right). \tag{23}$$

Учтем, что $0<\lambda_{n,m}<1,\ \lambda_{n,m}\to 1$ при $n,m\to\infty$. Так как в равенстве (23) слева находятся отрицательные величины, а справа положительные, то (23) является неверным равенством. Мы пришли к противоречию. Следовательно, при всех значениях β и любых *n*, *m* условие (19) выполняется.

Итак, для любых значений β имеет место формула (21). Поэтому с учетом частных решений (9) и (21) решение задачи 1 в трехмерной области Ω можно представить в виде ряда (11)

$$U(t,x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n,m}^2}{A_{n,m}(\beta)}\varphi_{n,m}\,e^{-\lambda_{n,m}^2 t}\,\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y. \tag{24}$$

Покажем, что при определенных условиях относительно функции $\varphi(x,y)$ сумма $U(t,x,y)$ ряда (24) удовлетворяет условиям (5). При любых n, m и β справедливы оценки:

$$\left|u_{n,m}(t)\right| \leq C_1 \left|\varphi_{n,m}\right|, \ \left|u'_{n,m}(t)\right| \leq C_1 \left|\varphi_{n,m}\right|, \tag{25}$$

где $0 < C_1 = \text{const}$.

Действительно, так как для всех значений β справедливы $0 < \lambda_{n,m} < 1$, $\lambda_{n,m} \to 1$ при $n,m \to \infty$ и $0 < \left|A_{n,m}(\beta)\right| < 2$, то на основании формулы (21) найдем $\left|u_{n,m}(t)\right| \leq \dfrac{1}{C_0} \left|\varphi_{n,m}\right|$, где $C_0 = \left|A_{n,m}(\beta)\right|$.

Дифференцируя выражения (21), получаем $\left|u'_{n,m}(t)\right| \leq \dfrac{1}{C_0} \left|\varphi_{n,m}\right|$.

Отсюда следуют оценки (25), где $C_1 = \dfrac{1}{C_0}$.

Условия А. Пусть функция $\varphi(x,y) \in C^3([0;l]\times[0;l])$ на сегменте $[0;l]$ имеет кусочно-непрерывные производные четвертого порядка и

$$\varphi(0,y) = \varphi(l,y) = \varphi(x,0) = \varphi(x,l) = 0,$$
$$\varphi_{xx}(0,y) = \varphi_{xx}(l,y) = \varphi_{xx}(x,0) = \varphi_{xx}(x,l) = 0,$$
$$\varphi_{yy}(0,y) = \varphi_{yy}(l,y) = \varphi_{yy}(x,0) = \varphi_{yy}(x,l) = 0.$$

Пусть выполняются условия А. Тогда справедливы оценки

$$\varphi_{n,m} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{p_{n,m}}{n^4}, \quad \varphi_{n,m} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{p_{n,m}}{m^4} \tag{26}$$

и

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} p_{n,m}^2 \leq \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l \left[\varphi_{xxxx}(x,y)\right]^2 dx\,dy, \tag{27}$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} p_{n,m}^2 \leq \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l \left[\varphi_{yyyy}(x,y)\right]^2 dy\,dx. \tag{28}$$

С помощью оценок (25)–(28) нетрудно убедиться, что ряд (24) равномерно сходится в трехмерной области Ω.

Таким образом доказано, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполняются условия А. Тогда задача 1 однозначно разрешима в трехмерной области Ω. Это решение определяется рядом (24).

5. Интегро-дифференциальное уравнение (1)

Приступим к нахождению в трехмерной области Ω функции $U(t,x,y)$, удовлетворяющей уравнению (1), заданным условиям (2), (3) и (5). Нетривиальные решения задачи 2 разыскиваются в виде ряда Фурье (11). По предположению,

$$f(t,x,y) = \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} f_{n,m}(t) \sin\frac{\pi n}{l} x \sin\frac{\pi m}{l} y, \tag{29}$$

где

$$f_{n,m}(t)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l f(t,x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy,\ n,m=1,2,\ldots . \tag{30}$$

Подставляя ряды (11) и (29) в уравнение (1), получаем обыкновенные интегро-дифференциальные уравнения:

$$u'_{n,m}(t)+\lambda^2_{n,m}u_{n,m}(t)=\nu\,\lambda^2_{n,m}\int\limits_0^\beta\sum_{i=1}^k a_i(t)\,b_i(s)u_{n,m}(s)\,ds+f_{n,m}(t), \tag{31}$$

где функции $u_{n,m}(t)$ определяются из формулы (12), $\lambda^2_{n,m}=\dfrac{\mu^2_{n,m}}{1+\mu^2_{n,m}}$, $\mu_{n,m}=\dfrac{\pi(n+m)}{l}$.

С помощью обозначения

$$\tau_{i,n,m}=\int\limits_0^\beta b_i(s)u_{n,m}(s)\,ds \tag{32}$$

уравнения (31) перепишутся в виде следующих дифференциальных уравнений:

$$u'_{n,m}(t)+\lambda^2_{n,m}u_{n,m}(t)=\nu\,\lambda^2_{n,m}\sum_{i=1}^k a_i(t)\,\tau_{i,n,m}+f_{n,m}(t). \tag{33}$$

Решая линейные дифференциальные уравнения (33), получаем:

$$u_{n,m}(t)=c_{n,m}\,e^{-\lambda^2_{n,m}t}+\nu\sum_{i=1}^k\tau_{i,n,m}\,\xi_{in,m}(t)+\bar{f}_{n,m}(t), \tag{34}$$

где $\bar{f}_{n,m}(t)=\int\limits_0^t e^{-\lambda^2_{n,m}(t-s)}f_{n,m}(s)\,ds$, $\xi_{in,m}(t)=\lambda^2_{n,m}\int\limits_0^t e^{-\lambda^2_{n,m}(t-s)}a_i(s)\,ds$.

Для нахождения неизвестных коэффициентов $c_{n,m}$ в (34) воспользуемся условием (16):

$$\varphi_{n,m}=u_{n,m}(0)+\int\limits_0^\beta u_{n,m}(t)\,dt=c_{n,m}\left(1+\frac{1}{\lambda^2_{n,m}}\left(1-e^{-\lambda^2_{n,m}\beta}\right)\right)+\gamma_{n,m}, \tag{35}$$

где $\gamma_{n,m}=\int\limits_0^\beta\eta_{n,m}(t)\,dt$, $\eta_{n,m}(t)=\nu\sum\limits_{i=1}^k\tau_{i,n,m}\,\xi_{in,m}(t)+\bar{f}_{n,m}(t)$.

Из (35) получаем следующее соотношение для определения коэффициентов $c_{n,m}$:

$$c_{n,m}\left(\lambda^2_{n,m}+1-e^{-\lambda^2_{n,m}\beta}\right)=\lambda^2_{n,m}\left(\varphi_{n,m}-\gamma_{n,m}\right). \tag{36}$$

Поскольку при всех значениях β и любых *n*, *m* условие (19) выполняется, то из (36) имеем:

$$c_{n,m} = \frac{\lambda_{n,m}^2}{A_{n,m}(\beta)} \left(\varphi_{n,m} - \nu \sum_{i=1}^{k} \tau_{i,n,m} \int_0^\beta \xi_{in,m}(t)\,dt + \int_0^\beta \bar{f}_{n,m}(t)\,dt \right).$$

Подставляя эти найденные коэффициенты в (34), получаем:

$$u_{n,m}(t) = D_{n,m}(t) - \nu \sum_{i=1}^{k} \tau_{i,n,m} E_{in,m}(t), \tag{37}$$

где $D_{n,m}(t) = \left(\varphi_{n,m} + \int_0^\beta \bar{f}_{n,m}(t)\,dt \right) B_{n,m}(t) + \bar{f}_{n,m}(t)$,

$B_{n,m}(t) = \dfrac{\lambda_{n,m}^2}{A_{n,m}(\beta)} e^{-\lambda_{n,m}^2 t}$, $E_{in,m}(t) = B_{n,m}(t) \int_0^\beta \xi_{in,m}(t)\,dt - \xi_{in,m}(t)$.

Подставляя (37) в (32), получаем систему из счетных систем алгебраических уравнений (СССАУ):

$$\tau_{in,m} + \nu \sum_{j=1}^{k} \tau_{jn,m} H_{ijn,m} = \Psi_{in,m}, \tag{38}$$

где $\Psi_{in,m} = \int_0^\beta b_i(s) D_{n,m}(s)\,ds$, $H_{ijn,m} = \int_0^\beta b_i(s) E_{jn,m}(s)\,ds$.

Отметим, что из линейной независимости функций $a_i(t)$ и $b_i(s)$ следует, что $H_{ijn,m} \neq 0$. СССАУ (38) однозначно разрешима при любых конечных $\Psi_{i,n,m}$, если выполняется следующее условие:

$$\Delta_{n,m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1+\nu H_{11\,n,m} & \nu H_{12\,n,m} & \dots & \nu H_{1k\,n,m} \\ \nu H_{21\,n,m} & 1+\nu H_{22\,n,m} & \dots & \nu H_{2k\,n,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu H_{k1\,n,m} & \nu H_{k2\,n,m} & \dots & 1+\nu H_{kk\,n,m} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{39}$$

Определитель $\Delta_{n,m}(\nu)$ в (39) есть многочлен относительно *ν* степени не выше *k*. Уравнение $\Delta_{n,m}(\nu) = 0$ имеет не более *k* различных корней. Эти корни являются собственными числами ядра интегро-дифференциального уравнения (1). Для других значений *ν* условие (39) выполняется. Для таких значений *ν* система (38) имеет единственное решение при любой конечной ненулевой правой части. Поэтому при выполнении условия (39) устанавливается однозначная разрешимость поставленной нелокальной краевой задачи 2.

Тогда решения СССАУ (38) записываются в виде

$$\tau_{in,m} = \frac{\Delta_{in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}, \quad i = \overline{1,k}, \tag{40}$$

где $\Delta_{i\,n,m}(\nu)=\begin{vmatrix} 1+\nu H_{11n,m} & \dots & \nu H_{1(i-1)n,m} & \Psi_{1n,m} & \nu H_{1(i+1)n,m} & \dots & \nu H_{1k\,n,m} \\ \nu H_{21n,m} & \dots & \nu H_{2(i-1)n,m} & \Psi_{2n,m} & \nu H_{2(i+1)n,m} & \dots & \nu H_{2k\,n,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu H_{k1n,m} & \dots & \nu H_{k(i-1)n,m} & \Psi_{k\,n,m} & \nu H_{k(i+1)n,m} & \dots & 1+\nu H_{k\,k\,n,m} \end{vmatrix}$.

Подставляя (40) в (37), получаем:

$$u_{n,m}(t)=D_{n,m}(t)-\nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{i\,n,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E_{i\,n,m}(t). \tag{41}$$

Теперь (41) подставляем в ряд Фурье (11)

$$U(t,x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[D_{n,m}(t)-\nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{i\,n,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E_{i\,n,m}(t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y. \tag{42}$$

Условия Б. Пусть функция $f(t,x,y)\in C^{1,3,3}_{t,x,y}(\Omega)$ на сегменте Ω имеет по переменным x, y кусочно-непрерывные производные четвертого порядка и

$$f(t,0,y)=f(t,l,y)=f(t,x,0)=f(t,x,l)=0,$$
$$f_{xx}(t,0,y)=f_{xx}(t,l,y)=f_{xx}(t,x,0)=f_{xx}(t,x,l)=0,$$
$$f_{yy}(t,0,y)=f_{yy}(t,l,y)=f_{yy}(t,x,0)=f_{yy}(t,x,l)=0.$$

Пусть выполняются условия Б. Тогда для функции (30) справедливы оценки:

$$f_{n,m}(t)=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^4\frac{\chi_{n,m}(t)}{n^4},\quad f_{n,m}(t)=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^4\frac{\chi_{n,m}(t)}{m^4} \tag{43}$$

и

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\chi^2_{n,m}(t)\le\frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l\left[f_{xxxx}(t,x,y)\right]^2dx\,dy, \tag{44}$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\chi^2_{n,m}(t)\le\frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l\left[f_{yyyy}(t,x,y)\right]^2dy\,dx. \tag{45}$$

Покажем равномерную сходимость ряда (42). С этой целью сначала рассмотрим сходимость следующего ряда

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}D_{n,m}(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y. \tag{46}$$

Учтем, что $D_{n,m}(t)=\left(\varphi_{n,m}+\int_0^{\beta}\bar f_{n,m}(t)\,dt\right)B_{n,m}(t)+\bar f_{n,m}(t)$. Гладкие функции $B_{n,m}(t)=\dfrac{\lambda^2_{n,m}}{A_{n,m}(\beta)}e^{-\lambda^2_{n,m}t}$ ограничены на отрезке $[0;\beta]$ вместе со своими производными первого порядка. Поэтому здесь аналогично оценкам (25) справедливы оценки:

$$\left| D_{n,m}(t) \right| \le C_2 \left(\left| \varphi_{n,m} \right| + \left| f_{n,m}(t) \right| \right), \tag{47}$$

$$\left| D'_{n,m}(t) \right| \le C_2 \left(\left| \varphi_{n,m} \right| + \left| f_{n,m}(t) \right| \right), \tag{48}$$

где функции $f_{n,m}(t)$ определяются из формулы (30), $0 < C_2 = \mathrm{const}$.

С учетом оценок (32)–(37), (43)–(45) и (47), (48) заключаем, что ряд (46) сходится равномерно в области Ω. Теперь рассмотрим сходимость следующего ряда

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta_{i\,n,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} E_{i\,n,m}(t) \sin\frac{\pi n}{l} x \sin\frac{\pi m}{l} y. \tag{49}$$

Здесь учтем, что

$$E_{i\,n,m}(t) = B_{n,m}(t) \int_0^{\beta} \xi_{i\,n,m}(t)\,dt - \xi_{i\,n,m}(t), \ \ \xi_{i\,n,m}(t) = \lambda^2_{n,m} \int_0^t e^{-\lambda^2_{n,m}(t-s)} a_i(s)\,ds,$$

$0 < \lambda_{n,m} < 1$, $a_i(t) \in C^1[0;\beta]$.

Тогда из гладкости этих функций на отрезке $[0;\beta]$ получаем, что

$$\left| E_{i\,n,m}(t) \right| \le C_3, \ \left| E'_{i\,n,m}(t) \right| \le C_3, \tag{50}$$

где $i = \overline{1,k}$; $0 < C_3 = \mathrm{const}$. Из выполнения условия (39) следует, что $\left| \Delta_{n,m}(\nu) \right| > 0$. В составе определителей $\Delta_{i\,n,m}(\nu)$ есть столбец $\Psi_{i\,n,m} = \int_0^{\beta} b_i(t) D_{n,m}(t)\,dt$, где $b_i(t) \in C^1[0;\beta]$.

С учетом оценок (32)–(37), (43)–(45), (47), (48), (50) и свойства определителей заключаем, что ряд (49) сходится равномерно в области Ω. Из сходимости рядов (46) и (49) следует сходимость ряда (42).

Предположим, что $\varphi(x,y) \equiv 0$, $f(t,x,y) \equiv 0$. Тогда $\varphi_{n,m} \equiv 0$, $f_{n,m}(t) \equiv 0$. Поэтому

$$D_{n,m}(t) = \left(\varphi_{n,m} + \int_0^{\beta} \bar{f}_{n,m}(t)\,dt \right) B_{n,m}(t) + \bar{f}_{n,m}(t) \equiv 0$$

и

$$\Psi_{i\,n,m} = \int_0^{\beta} b_i(t) D_{n,m}(t)\,dt \equiv 0, \ \ \Delta_{i\,n,m}(\nu) = 0.$$

Следовательно, из формулы (41) имеем

$$\int_0^l \int_0^l U(t,x,y) \sin\frac{\pi n}{l} x \sin\frac{\pi m}{l} y \, dx\, dy = 0, \ \ n,m = 1,2,\ldots .$$

Отсюда в силу полноты систем собственных функций $\left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi n}{l} x \right\}, \left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi m}{l} y \right\}$ в $L_2[0,l]$ заключаем, что $U(t,x,y) \equiv 0$ для всех $x, y \in [0,l]$ и $t \in [0,\beta]$.

Таким образом, доказано, что справедлива и следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Если выполняются условие (39) и условия Б, то задача 2 однозначно разрешима в трехмерной области Ω. Это решение определяется рядом (42).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгазин, С. Д. Флаттер пластин и оболочек / С. Д. Алгазин, И. А. Кийко. – М. : Наука, 2006. – 248 с.
2. Андреев, А. А. Характеристическая задача для системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида с некратными характеристиками / А. А. Андреев, Ю. О. Яковлева // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2013. – Т. 30, № 1. – С. 31–36.
3. Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 1. – С. 50–55.
4. Бештоков, М. Х. Численный метод решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа / М. Х. Бештоков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 9. – С. 1497–1514.
5. Гордезиани, Д. Г. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды / Д. Г. Гордезиани, Г. А. Авалишвили // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12, № 1. – С. 94–103.
6. Замышляева, А. А. Математические модели соболевского типа высокого порядка / А. А. Замышляева // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 5–28.
7. Зикиров, О. С. О задаче Дирихле для гиперболических уравнений третьего порядка / О. С. Зикиров // Изв. вузов. Математика. – 2014. – № 7. – С. 63–71.
8. Пулькина, Л. С. Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями 1-го рода с ядрами, зависящими от времени / Л. С. Пулькина // Изв. вузов. Математика. – 2012. – № 10. – С. 32–44.
9. Сопуев, А. Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка / А. Сопуев, Н. К. Аркабаев // Вестник Томского государственного университета. Математика. Механика. 2013. Т. 21, № 1. С. 1623.
10. Турбин, М. В. Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель Балкли / М. В. Турбин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 2. – С. 246–257.
11. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 1. – С. 232–250.
12. Шхануков, М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах / М. Х. Шхануков // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18, № 4. – С. 689–699.
13. Юлдашев, Т. К. Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение псевдопараболического типа с нелокальным интегральным условием / Т. К. Юлдашев // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. – 2016. – № 1. – С. 11–23.
14. Юлдашев, Т. К. Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка / Т. К. Юлдашев // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 9. – С. 74–79.
15. Юлдашев, Т. К. Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма четвертого порядка с вырожденным ядром / Т. К. Юлдашев // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2015. – Т. 19, № 4. – С. 736–749. – DOI: 10.14498/vsgtu1434.
16. Юлдашев, Т. К. Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка / Т. К. Юлдашев // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2014. – Т. 34, № 1. – С. 56–65.
17. Юлдашев, Т. К. Обратная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка / Т. К. Юлдашев // Вестник Самарского государственного университета. Серия естественнонаучная. – 2013. – № 1. – С. 58–66.

18. Юлдашев, Т. К. Смешанное дифференциальное уравнение типа Буссинеска / Т. К. Юлдашев // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. – 2016. – № 2. – С. 13–26.

19. Benney, D. J. Interactions of permanent waves of finite amplitude / D. J. Benney, J. C. Luke // Journ. Math. Phys. – 1964. – Vol. 43. – P. 309313.

REFERENCES

1. Algazin S.D., Kiyko I.A. *Flatter plastin i obolochek* [Flutter of Plates and Shells]. Moscow, Nauka Publ., 2006. 248 p.

2. Andreev A.A., Yakovleva Yu.O. Kharakteristicheskaya zadacha dlya sistemy gyperbolicheskikh differentsialnykh uravneniy tretyego poryadka obshchego vida s nekratnymi kharakteristikami [The Characteristic Problem for a System of Hyperbolic Differential Equations of the Third Order of General Form With Nonmultiple Characteristics]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo technicheskogo universiteta. Seriya «Fiziko-matematicheskie nauki»* [Vestnik of Samara State Technical University. Physical and Mathematical Sciences], 2013, vol. 30, no. 1, pp. 31-36.

3. Baev A.D., Shabrov S.A., Meach M. O edinstvennosti resheniya matematicheskoy modeli vynuzhdennykh kolebaniy struny s osobennostyami [Uniqueness of the Solution Mathematical Model of Forced String Oscillation Singularities]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika* [Vestnik of Voronezh State University. Physics. Mathematics], 2014, no. 1, pp. 50-55.

4. Beshtokov M.Kh. A Numerical Method for Solving One Nonlocal Boundary Value Problem for a Third-Order Hyperbolic Equation. *Computational Math. and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, no. 9, pp. 1441-1458.

5. Gordeziani D.G., Avilishbili G.A. Reshenie nelokalnykh zadach dlya odnomernykh kolebaniy sredy [Solving the Nonlocal Problems for One-Dimensional Medium Oscillation]. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Modeling], 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94-103.

6. Zamyshlyaeva A.A. Matematicheskie modeli sobolevskogo tipa vysokogo poryadka [Sobolev-Type Mathematical Models of Higher Order]. *Vestnik Yujno-Ural. gosudarstvennogo universiteta. Seria: Matem. modelirovanie i programmirovanie* [Vestnik of South-Ural State University. Mathematical modeling and programming], 2014, vol. 7, no. 2, pp. 5-28.

7. Zikirov O.S. Dirichlet problem for third-order hyperbolic equations. *Russian Mathematics*, 2014, vol. 58, no. 7, pp. 53-60.

8. Pulkina L.S. A nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions of the 1st kind with time-dependent kernels. *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no. 10, pp. 26-37.

9. Sopuev A., Arkabaev N.K. Zadachi sopryazheniya dlya lineynykh psevdoparabolicheskykh uravneniy tretyego poryadka [Conjugation Problems for Linear Pseudoparabolic Equations of Third Order]. *Vestnik TomskGU. Matematika. Mekhanika* [Vestnik of Tomsk State University], 2013, vol. 21, no. 1, pp. 16-23.

10. Turbin M.V. Issledovaniya nachalno-kraevoy zadachi dlya modeli dvizheniya zhidkosti Gershel-Balkli [Investigation of Initial-Boundary Value Problem for the Herschel-Bulkley Mathematical Fluid Model]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika* [Vestnik of Voronezh State University. Physics. Mathematics], 2013, no. 2, pp. 246-257.

11. Shabrov S.A. Ob odnoy matematicheskoy modeli malykh deformatsiy sterzhnevoy sistemy s vnutrennimi osobennostyami [On a Mathematical Model of Small Deformations of a Bar System With Internal Features]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika* [Vestnik of Voronezh State University. Physics. Mathematics], 2013, no. 1, pp. 232-250.

12. Shkhanukov M.Kh. O nekotorykh kraevykh zadachakh dlya uravneniya tretyego poryadka, voznikayushchikh pri modelirovanii filtratsii zhidkosti v porystykh sredah [Some Boundary Value Problems for a Third-Order Equation Arising in the Simulation of Fluid Flow in Porous Media]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 1982, vol. 18, no. 4, pp. 689-699.

13. Yuldashev T.K. Nelineynoe integro-differentsialnoe uravnenie psevdoparabolicheskogo tipa s nelokalnym integralnym usloviem [Nonlinear Integro-Differential Equation of Pseudoparabolic Type With Nonlocal Integral Condition]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta*. *Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd state university. Mathematics. Physics], 2016, no. 1, pp. 11-23.

14. Yuldashev T.K. A certain Fredholm partial integro-differential equation of the third order. *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, no. 9, pp. 62-66.

15. Yuldashev T.K. Obratnaya zadacha dlya nelineynogo integro-differentialnogo uravneniya Fredgolma chetvertogo poryadka s vyrozhdennym yadrom [Inverse Problem for Nonlinear Fredholm Integro-Differential

Equation of Fourth Order with Degenerate Kernel]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seria «Fiziko-matematicheskie nauki»* [Vestnik of Samara State Technical University. Physical and Mathematical Sciences], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 736-749. DOI: 10.14498/vsgtu1434.

16. Yuldashev T.K. Obratnaya zadacha dlya odnogo integro-differentsialnogo uravneniya Fredgolma v chastnykh proizvodnykh tretyogo poryadka [Inverse Problem for a Partial Fredholm Integro-Differential Equation of Third Order]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo technicheskogo universiteta. Seria «Fiziko-matematicheskie nauki»* [Vestnik of Samara State Technical University. Physical and Mathematical Sciences], 2014, vol. 34, no. 1, pp. 56-65.

17. Yuldashev T.K. Obratnaya zadacha dlya odnogo nelineynogo integro-differentsialnogo uravneniya tretyego poryadka [Inverse Problem for a Nonlinear Integro-Differential Equation of the Third Order]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Estestvennonauchnaja* [Vestnik of Samara State University. Seria of Natural Sciences], 2013, no. 1, pp. 58-66.

18. Yuldashev T.K. Smeshannoe differentsialnoe uravnenie tipa Bussineska [Mixed-Type Bussinesq Differential Equation]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2016, no. 2, pp. 13-26.

19. Benney D.J., Luke J.C. Interactions of permanent waves of finite amplitude. *Journ. of Math. Phys.*, 1964, vol. 43, pp. 309-313.

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONHOMOGENEOUS PSEUDOPARABOLIC-TYPE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH DEGENERATE KERNEL

Tursun Kamaldinovich Yuldashev

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Higher Mathematics,
Siberian State Aerospace University
tursun@sibsau.ru, tursun.k.yuldashev@gmail.com
Prosp. im. gazety “Krasnoyarskiy rabochiy”, 31, 660014 Krasnoyarsk, Russian Federation

Abstract. Mathematical modeling of many processes occurring in the real world leads to the study of direct and inverse problems for equations of mathematical physics. Direct problems for partial differential and integro-differential equations by virtue of their importance in the application are one of the most important parts of the theory of differential equations. In the case, when the boundary of the flow of physical process is not applicable for measurements, an additional information can be used in the nonlocal conditions in the integral form.

We propose a method of studying the one-value solvability of the nonlocal problem for a non-homogeneous third-order pseudoparabolic-type integro-differential equation with degenerate kernel. Such type of integro-differential equations models many natural phenomena and appears in many fields of sciences. For this reason, a great importance in the works of many researchers was given to this type of equations.

We use the spectral method based on Fourier series and separation of variables. Application of this method of separation of variables can improve the quality of formulation of the considered problem and facilitate the processing procedure.

Thus, in this article we consider the questions of solvability and constructing the solution of nonlocal boundary value problem for a three dimensional non-homogeneous third-order pseudoparabolic-type integro-differential equation with degenerate kernel. The criterion of one-value solvability of the considered problems is installed. Under this criterion the theorems of one-valued solvability of the considered problems are proved. It is also checked that the solutions of considering problems are smooth. Every estimate was obtained with the aid of the Hölder inequality and Minkovsky inequality. This paper advances the theory of partial integro-differential equations with degenerate kernel.

Key words: pseudoparabolic equation, degenerate kernel, three-dimensional domain, integral condition, one-value solvability.