DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.2.3

УДК 517.9
ББК 22.161.6

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ В ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ [1]

Ирина Игоревна Струкова

Кандидат физико-математических наук,
младший научный сотрудник кафедры нелинейных колебаний,
Воронежский государственный университет
irina.k.post@yandex.ru
Университетская площадь, 1, 394036 г. Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. В статье рассматриваются однородные пространства функций, определенных на $\mathbb{R}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве. Вводятся понятия медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций из однородного пространства. Основные результаты статьи связаны с гармоническим анализом периодических на бесконечности функций из однородного пространства. Вводится понятие обобщенного ряда Фурье, коэффициенты которого являются медленно меняющимися на бесконечности функциями (не обязательно постоянными). Более того, доказывается, что обобщенные коэффициенты Фурье периодической функции из однородного пространства (не обязательно непрерывной) можно выбрать непрерывными. Результаты статьи получены с существенным использованием теории изометрических представлений.

Ключевые слова: банахово пространство, $L^1(\mathbb{R})$-модуль, однородное пространство, медленно меняющаяся на бесконечности функция, периодическая на бесконечности функция, ряд Фурье.

1. Однородные пространства функций

Пусть X – комплексное банахово пространство, $End\, X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Далее введем основные функциональные пространства, используемые в данной статье.

Символом $L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$ обозначим пространство локально суммируемых (измеримых по Бохнеру) на $\mathbb{R}$ функций со значениями в банаховом пространстве X.

Через $L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$, обозначим банаховы функции $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$, для которых конечна величина (принимаемая за норму в соответствующем пространстве)

$$\|x\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} \|x(t)\|_X^p \, dt\right)^{1/p}, \; p \in [1, \infty), \; \|x\|_\infty = vrai\sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_X, \; p = \infty.$$

Если $X = \mathbb{C}$, то символ X в обозначениях этих пространств будет опускаться.

Через $S^p(\mathsf{R},X)$, где $p\in[1,\infty)$, будет обозначаться пространство Степанова [12], состоящее из функций $x\in L^1_{loc}(\mathsf{R},X)$, для которых конечна величина $\|x\|_{S^p}=\sup\limits_{s\in\mathsf{R}}\left(\int\limits_0^1\|x(s+t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p}$, $p\in[1,\infty)$.

Пространства Степанова играют важную роль при изучении дифференциальных уравнений в банаховом пространстве (см.: [3; 6]).

Также рассматриваются подпространства $C_b(\mathsf{R},X)$ и $C_{b,u}(\mathsf{R},X)$ пространства $L^\infty(\mathsf{R},X)$ соответственно непрерывных ограниченных и равномерно непрерывных на R функций с нормой $\|x\|_\infty=\sup\limits_{t\in\mathsf{R}}\|x(t)\|_X$, а также замкнутое подпространство $C_0=C_0(\mathsf{R},X)$ исчезающих на бесконечности функций из $C_b(\mathsf{R},X)$, то есть функций, для которых выполняется условие $\lim\limits_{|t|\to\infty}\|x(t)\|_X=0$.

Определение 1. Банахово пространство $\mathsf{F}(\mathsf{R},X)$ функций, определенных на R, со значениями в комплексном банаховом пространстве X, называется *однородным*, если выполнены следующие условия:

1) пространство $\mathsf{F}(\mathsf{R},X)$ содержится в пространстве $S^1(\mathsf{R},X)$, причем вложение $\mathsf{F}(\mathsf{R},X)\subset S^1(\mathsf{R},X)$ инъективно и непрерывно (инъективность означает инъективность оператора вложения);

2) в $\mathsf{F}(\mathsf{R},X)$ определена и ограничена группа $S(t), t\in\mathsf{R}$, операторов сдвигов функций $(S(t)x)(s)=x(s+t), s,t\in\mathsf{R}, x\in\mathsf{F}(\mathsf{R},X)$;

3) для любых функций $f\in L^1(\mathsf{R}), x\in\mathsf{F}(\mathsf{R},X)$ их свертка

$$(f*x)(t)=\int\limits_{\mathsf{R}}f(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int\limits_{\mathsf{R}}f(\tau)(S(-\tau)x)(t)d\tau,\ t\in\mathsf{R},\tag{1}$$

принадлежит $\mathsf{F}(\mathsf{R},X)$ и выполнено неравенство $\|f*x\|\le C\|f\|_1\|x\|$ для некоторой постоянной $C\ge 1$;

4) $\varphi x\in\mathsf{F}(\mathsf{R},X)$ для любой $x\in\mathsf{F}(\mathsf{R},X)$ и любой $\varphi\in C_b(\mathsf{R})$ с компактным носителем $supp\,\varphi$, причем $\|\varphi x\|\le\|\varphi\|_\infty\|x\|$ и отображение $t\mapsto\varphi S(t)x:\mathsf{R}\to\mathsf{F}(\mathsf{R},X)$ непрерывно.

Введем в рассмотрение семейство банаховых пространств $L^{p,q}(\mathsf{R},X)$, $p\in[1,\infty)$, $q\in[1,\infty]$, (амальгам Винера). Каждой функции $x\in L^1_{loc}(\mathsf{R},X)$ поставим в соответствие последовательность (x_n), $n\in\mathsf{Z}$, где $x_n\in L^1([0,1],X)$, $x_n(s)=x(s+n)$, $s\in[0,1]$. Функцию x отнесем к пространству $L^{p,q}(\mathsf{R},X)$, если $x_n\in L^q([0,1],X)$, $n\in\mathsf{Z}$, а сама последовательность (x_n) принадлежит пространству $l^p(\mathsf{Z},L^q([0,1],X))$. Норму функции $x\in L^{p,q}(\mathsf{R},X)$ определим следующим образом:

$$\|x\|_{p,q}=\begin{cases}\|(x_n)\|_p=\left(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\|(x_n)\|_q^p\right)^{1/p}, & где\quad p\in[1,\infty), q\in[1,\infty],\\ \sup\limits_{n\in\mathsf{Z}}\|(x_n)\|_q, & где\quad p\in\{0,\infty\}, q\in[1,\infty].\end{cases}$$

Отметим, что $L^{p,p}(\mathsf{R},X)=L^p(\mathsf{R},X)$, $p\in[1,\infty]$, и $L^{\infty,q}(\mathsf{R},X)=S^q(\mathsf{R},X)$, $q\in[1,\infty)$. Замкнутая подалгебра $L^{1,\infty}_c(\mathsf{R})$ непрерывных функций из $L^{1,\infty}(\mathsf{R})$ рассматривалась Н. Винером [10].

Вектор x из банахова $L^1(\mathsf{R})$-модуля (Y,T) называется *почти периодическим вектором*, если его орбита $\{T(t)x, t\in\mathsf{R}\}$ предкомпактна в Y. Множество почти периодических векторов будем обозначать символом $AP\mathsf{Y}=AP(\mathsf{Y},T)$ (см.: [2; 3]). Функция $x\in C_{b,u}(\mathsf{R},X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если класс $\widetilde{x}$ принадлежит пространству $AP(\mathsf{Y},\widetilde{S})$, где $\mathsf{Y}=C_{b,u}(\mathsf{R},X)/C_0(\mathsf{R},X)$. Пространство почти периодических на бесконечности функций будем обозначать символом $AP_\infty=AP_\infty(\mathsf{R},X)$. Его можно задать формулой $AP_\infty=\overline{span}\{e^{i\lambda\cdot}x:\lambda\in\mathsf{R}, x\in C_{sl,\infty}\}$ [3].

Пример 1. Следующие банаховы пространства являются однородными:

1) пространство $L^p=L^p(\mathsf{R},X)$, $p\in[1,\infty]$;

2) пространство Степанова $S^p=S^p(\mathsf{R},X)$, $p\in[1,\infty)$;

3) пространство амальгам Винера $L^{p,q} = L^{p,q}(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1,\infty)$, $q \in [1,\infty]$;

4) пространство $C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$ ограниченных непрерывных функций со значениями в X и нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_X$, $x \in C_b$;

5) подпространство $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X) \subset C_b$ равномерно непрерывных функций из C_b;

6) подпространство $C_0 = C_0(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}$ непрерывных убывающих на бесконечности функций (для таких функций выполняется условие $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\|_X = 0$);

7) подпространство $C_{sl,\infty} = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}$ медленно меняющихся на бесконечности функций (для таких функций выполняется условие $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t+\tau) - x(\tau)\|_X = 0, t, \tau \in \mathbb{R}$);

8) подпространство $C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}$ ω-периодических на бесконечности функций, $\omega \in \mathbb{R}_+$ (для таких функций выполняется условие $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t+\omega) - x(t)\|_X = 0$) (см.: [15; 17; 18]);

9) подпространство $AP_\infty = AP_\infty(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}$ непрерывных почти периодических на бесконечности функций;

10) пространства $C^k = C^k(\mathbb{R}, X)$, $k \in \mathbb{N}$, k раз непрерывно дифференцируемых функций с ограниченной k-й производной и нормой $\|x\|_{(k)} = \|x\|_\infty + \|x^{(k)}\|_\infty < \infty$;

11) пространства Гельдера $C^{k,\alpha} = C^{k,\alpha}(\mathbb{R}, X)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in (0,1]$,

$$C^{k,\alpha} = \left\{ x \in C^k : \|x^{(k)}\|_{C^{0,\alpha}} = \sup_{t\neq s\in\mathbb{R}} \frac{|x^{(k)}(t) - x^{(k)}(s)|}{|t-s|^\alpha} < \infty \right\},$$

$$\|x\|_{C^{k,\alpha}} = \|x\|_{C^k} + \|x^{(k)}\|_{C^{0,\alpha}}.$$

Далее символом $\mathsf{F}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать однородное пространство, удовлетворяющее всем четырем условиям определения 1. Отметим, что все пространства из примера 1 являются таковыми.

Через $\mathsf{F}_c(\mathbb{R}, X)$ обозначим замкнутое подпространство из $\mathsf{F}(\mathbb{R}, X)$ вида $\{x \in \mathsf{F}(\mathbb{R}, X):$ функция $t \mapsto S(t)x : \mathbb{R} \to \mathsf{F}(\mathbb{R}, X)$ непрерывна$\}$. Отметим, что подпространства S-непрерывных векторов для $L^p(\mathbb{R}, X), p \in [1,\infty), C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ совпадают с самими пространствами, причем $(C_b(\mathbb{R}, X))_c = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$, $(L^\infty(\mathbb{R}, X))_c = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$. Через $\mathsf{F}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим наименьшее замкнутое подпространство из $\mathsf{F}(\mathbb{R}, X)$, содержащее все функции φx, $x \in \mathsf{F}(\mathbb{R}, X)$, $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, X)$, $supp\,\varphi$ – компакт. Таким образом, для $\mathsf{F}(\mathbb{R}, X) = C_b(\mathbb{R}, X)$ подпространство $\mathsf{F}_0(\mathbb{R}, X)$ совпадает с подпространством $C_0(\mathbb{R}, X)$ из $C_b(\mathbb{R}, X)$ функций, исчезающих на бесконечности.

2. О гармоническом анализе периодических векторов

Пусть X – комплексное банахово пространство и $End\ \mathsf{X}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X. Будем считать, что X является невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем (см.: [1; 5; 9]), структура которого ассоциирована с некоторым ограниченным изометрическим представлением $T : \mathbb{R} \to End\ \mathsf{X}$. Это означает, что выполняются два свойства следующего предположения:

Предположение 1. *Для банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля X выполняются следующие условия:*

1) из равенства $fx = 0$, справедливого для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, следует, что вектор $x \in \mathsf{X}$ – нулевой (свойство невырожденности банахова модуля X);

2) для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathsf{X}$, $t \in \mathbb{R}$, имеют место равенства (свойство ассоциированности модульной структуры на X с представлением $T : \mathbb{R} \to End\ \mathsf{X}$): $T(t)(fx) = (T(t)f)x = f(T(t)x)$.

Если $T : \mathbb{R} \to End\ \mathsf{X}$ – сильно непрерывное ограниченное представление, то формула $T(f)x = fx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)x\,dt$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathsf{X}$, определяет на X структуру банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля, удовлетворяющего условиям предположения 1, причем эта модульная структура ассоциирована с представлением T.

Замечание 1. С каждым невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем X ассоциировано единственное представление $T : \mathbb{R} \to End\ \mathsf{X}$ (см. [1]).

Определение 2. Вектор из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ назовем *T-непрерывным*, если функция $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$, $\varphi_x(t) = T(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, непрерывна в нуле (и, значит, непрерывна на $\mathbb{R}$).

Совокупность всех T-непрерывных векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ обозначим через $\mathcal{X}_c$. Непосредственно из последнего определения следует, что $\mathcal{X}_c$ – замкнутый подмодуль из $\mathcal{X}$, причем представление T на нем сильно непрерывно.

Любое однородное пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем с модульной структурой, определяемой равенствами (1), и эта структура ассоциирована с представлением (группой сдвигов функций) $S : \mathbb{R} \to End\, \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Далее через $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

функции $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Определение 3. *Спектром Бёрлинга* вектора $x \in \mathcal{X}$ называется множество чисел $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$ вида $\Lambda(x) = \{\lambda_0 \in R : fx \neq 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$. с $\hat{f}(\lambda_0) \neq 0\}$.

Свойства спектра Бёрлинга векторов из банахова пространства X можно найти в работах [1; 7; 9].

Определение 4. Пусть $\omega > 0$. Вектор $x_0 \in \mathcal{X}$ назовем ω-*периодическим* (относительно представления T), если $T(\omega)x_0 = x_0$.

Множество ω-периодических векторов обозначим через $\mathcal{X}_\omega = \mathcal{X}_\omega(T)$. Оно образует замкнутое подпространство в $\mathcal{X}$, инвариантное относительно операторов $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Из равенств $T(t+\omega)x - T(t)x = T(t)(T(\omega)x - x) = 0, t \in \mathbb{R}$, для любого $x \in \mathcal{X}_\omega$, следует, что функция $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$, $\varphi_x(t) = T(t)x$, является непрерывной периодической функцией. Рассмотрим ее ряд Фурье $\varphi_x(t) : \sum_{n \in Z} x_n e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}$, где $x_n = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega T(\tau) x e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau} d\tau, \ n \in \mathbb{Z}$.

Определение 5. Ряд $x : \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n$ назовем *рядом Фурье* вектора $x \in \mathcal{X}_\omega$, а векторы x_n, $n \in \mathbb{Z}$, – *коэффициентами Фурье* вектора x.

Отметим работы [4; 7], в которых многие классические результаты теории рядов Фурье для периодических функций обобщались на векторы из банаховых пространств, в которых действует однопараметрическая группа операторов. Подпространство $\mathcal{X}_\omega$ периодических векторов рассматривалось, например, в [20] и [21].

Теорема 1. *Для любого* $x \in \mathcal{X}_\omega$ *справедливо соотношение* $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$, *где* x_n, $n \in \mathbb{Z}$, – *коэффициенты Фурье вектора x.*

Доказательство. Возьмем произвольный вектор x из области определения $D(A)$ генератора A (infinitesimal generator в [15]) полугруппы операторов T. Справедлива следующая оценка:

$$\|x_n\| = \left\| \frac{1}{\omega}\int_0^\omega T(\tau) x e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau} d\tau \right\| = \left\| \frac{1}{\omega}\int_0^\omega T(\tau) Ax \frac{1}{-i\dfrac{2\pi n}{\omega}} e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau} d\tau \right\| \leq \frac{\|Ax\|}{|n|}, \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

то есть $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$. Поскольку $D(A)$ плотно в $\mathcal{X}_\omega$, то свойство $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ верно для любого $x \in \mathcal{X}_\omega$.

3. Медленно меняющиеся на бесконечности функции из однородных пространств

Напомним, что символом $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ здесь обозначается однородное пространство, удовлетворяющее всем четырем условиям определения 1.

Определение 6. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если $(S(t)x - x) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций из $\mathsf{F}_c(\mathsf{R}, X)$ обозначим через $\mathsf{F}_{sl,\infty} = \mathsf{F}_{sl,\infty}(\mathsf{R}, X)$. Отметим, что оно образует линейное замкнутое подпространство банахова пространства $\mathsf{F}_c(\mathsf{R}, X)$.

Например, медленно меняющейся на бесконечности является функция $x \in \mathsf{F}_c(\mathsf{R}, X)$ вида $x(t) = c + x_0(t), t \in \mathsf{R}$, где c – вектор из банахова пространства X и x_0 – любая функция из $\mathsf{F}_0(\mathsf{R}, X)$.

При $\mathsf{F}(\mathsf{R}, X) = C_b(\mathsf{R}, X)$ примерами таких функций являются:

1) $x_1(t) = \sin\ \ln(1+t^2), t \in \mathsf{R}$;

2) $x_2(t) = \operatorname{arctg}\ t, t \in \mathsf{R}$;

3) $x_2(t) = \sin\sqrt{1+|t|}, t \in \mathsf{R}$;

4) любая непрерывно дифференцируемая функция x из $C_b(\mathsf{R}, X)$ со свойством $x' \in C_0(\mathsf{R}, X)$.

В теории дифференциальных уравнений (см. [11, р. 3.6.3]) использовалось эквивалентное (если рассматривать функции из $C_{b,u}(\mathsf{R}, X)$) определение, при этом функции назывались *стационарными на бесконечности.*

Лемма 1. *Для любых* $f \in L_c^{1,\infty}(\mathsf{R}, X)$, $x \in S^p(\mathsf{R}, X)$ *функция* $y = f * x$ *принадлежит пространству* $C_{b,u}(\mathsf{R}, X)$.

Доказательство. Для любого $t \in \mathsf{R}$ справедливы оценки

$$\|(f*x)(t)\| \le \sum_{n\in\mathsf{Z}} \int_n^{n+1} \|f(s)\|\|x(t-s)\|ds \le \sum_{n\in\mathsf{Z}} \sup_{\tau\in[0,1]} \|f(\tau+n)\| \int_0^1 \|x(t-n-s)\|ds \le$$

$$\le \sup_{t\in\mathsf{R}} \int_0^1 \|x(t-s)\|ds \sum_{n\in\mathsf{Z}} \sup_{\tau\in[0,1]} \|f(\tau+n)\| \le \|x\|_{S^1} \|f\|_{1,\infty}.$$ Аналогично доказывается, что для любых $t, \tau \in \mathsf{R}$ справедлива оценка $\|(S(\tau)y - y)(t)\| \le \|x\|_{S^1} \|S(\tau)f - f\|_{1,\infty}$. Поскольку $\lim\limits_{\tau\to 0} \|S(\tau)f - f\|_{1,\infty} = 0$ и $\|x\|_{S^1} < \infty$, то функция y равномерно непрерывна.

Через $(e_\alpha, \alpha \in M)$, где M – некоторое направленное множество, обозначим ограниченную аппроксимативную единицу (о.а.е.) в алгебре $L^1(\mathsf{R})$, для которой $\hat{e}_\alpha(0) = 1, \alpha \in M.$ В [1] доказан следующий результат.

Лемма 2. *Функция* $x \in \mathsf{F}(\mathsf{R}, X)$ *принадлежит подпространству* $\mathsf{F}_c(\mathsf{R}, X)$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{\alpha} e_\alpha * x = x.$

Указанные далее свойства (леммы 3–5 и теоремы 2, 3) медленно меняющихся на бесконечности функций, определенных на локально компактной абелевой группе, содержатся в [8]. Здесь они доказываются для функций, определенных на R, из однородного пространства. Новыми результатами в данной статье являются лемма 6 и теоремы 4 и 5. Результаты, аналогичные лемме 6 и теореме 4, были получены ранее только для равномерно непрерывных периодических на бесконечности функций [15]. В данной работе эти результаты расширены на функции из любого однородного пространства. Теорема 5 является совершенно новым результатом.

Лемма 3. *Для того чтобы функция* $x \in \mathsf{F}_c(\mathsf{R}, X)$ *принадлежала пространству* $\mathsf{F}_{sl,\infty}(\mathsf{R}, X)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f * x \in \mathsf{F}_0(\mathsf{R}, X)$ *для любой функции* $f \in L^1(\mathsf{R})$, *удовлетворяющей условию* $\hat{f}(0) = 0.$

Лемма 4. *Для того чтобы функция* $x \in \mathsf{F}_c(\mathsf{R}, X)$ *принадлежала пространству* $\mathsf{F}_{sl,\infty}(\mathsf{R}, X)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f * x - x \in \mathsf{F}_0(\mathsf{R}, X)$ *для любой функции* $f \in L^1(\mathsf{R})$, *удовлетворяющей условию* $\hat{f}(0) = 1.$

Теорема 2. *Если* $x \in \mathsf{F}_{sl,\infty}(\mathsf{R}, X)$, *то множество* $\Lambda(x) \setminus \{0\}$ *содержится в непрерывном спектре функции* x *и* $\Lambda_{ess}(x) \subset \{0\}$.

Теорема 3. *Если* $x \in \mathsf{F}_{sl,\infty}(\mathsf{R}, X)$, *то существует функция* $x_0 \in C_{sl,\infty}(\mathsf{R}, X)$ *такая, что* $x - x_0 \in \mathsf{F}_0(\mathsf{R}, X)$.

Следствие 1. *Для любой функции* $x \in \mathsf{F}_{sl,\infty}(\mathsf{R}, X)$ *и любой функции* $f \in L^{1,\infty}(\mathsf{R}) \cap C_0(\mathsf{R})$ *со свойством* $\hat{f}(0) = 1$ *функция* $f * x$ *принадлежит* $C_{sl,\infty}(\mathsf{R}, X)$ *и* $x - f * x \in \mathsf{F}_0(\mathsf{R}, X)$. *Кроме того, для любой* $x \in \mathsf{F}_{sl,\infty}(\mathsf{R}, X)$ *найдется функция* $y: \mathsf{R} \to X$, *допускающая расширение на всю ком-*

плексную плоскость до ограниченной целой функции экспоненциального типа, такая, что $y - x \in F_0(\mathbb{R}, X)$.

4. Периодические на бесконечности функции из однородных пространств

Определение 7. Функция $x \in F_c(\mathbb{R}, X)$ называется *периодической на бесконечности периода* $\omega > 0$ *(ω-периодической на бесконечности),* если $(S(\omega)x - x) \in F_0(\mathbb{R}, X)$.

Таким образом, каждая ω-периодическая на бесконечности функция x является решением разностного уравнения вида $x(t+\omega) - x(t) = y(t), t \in \mathbb{R}$, где $y \in F_0(\mathbb{R}, X)$, а каждая медленно меняющаяся на бесконечности функция является периодической на бесконечности любого периода. В [11; 12; 17; 20] получены аналоги теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье для равномерно непрерывных периодических на бесконечности функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье и с рядами Фурье, суммируемыми с весом, а также критерий представимости периодической на бесконечности функции в виде суммы чисто периодической и исчезающей на бесконечности функций. В работах [13; 14] изучаются вопросы гармонического анализа непрерывных периодических на бесконечности функций нескольких переменных. В [16] описан спектр алгебры непрерывных периодических на бесконечности функций, определенных на полуоси.

Множество периодических на бесконечности функций из $F_c(\mathbb{R}, X)$ обозначим через $F_{\omega,\infty} = F_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Отметим, что оно образует линейное замкнутое подпространство банахова пространства $F_c(\mathbb{R}, X)$. Таким образом, имеют место включения $F_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset F_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset F_c(\mathbb{R}, X)$, при этом все указанные пространства инвариантны относительно операторов $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Символом $F_\omega(\mathbb{R}, X)$ обозначим подпространство банахова пространства $F_c(\mathbb{R}, X)$, состоящее из ω-периодических функций, то есть функций, удовлетворяющих условию $S(\omega)x = x$, $x \in F_c(\mathbb{R}, X)$.

Примерами периодических на бесконечности функций из $F_c(\mathbb{R}, X)$ являются:

1) предельно периодические функции, то есть функции $x: \mathbb{R} \to X$, представимые в виде $x = y + y_0$, где $y \in F_\omega(\mathbb{R}, X)$, $y_0 \in F_0(\mathbb{R}, X)$;

2) функция $\bar{x} \in F_c(\mathbb{R}, X)$ такая, что она совпадает с $x \in F_\omega(\mathbb{R}, X)$ на $\mathbb{R}_+$ и $\lim\limits_{t \to -\infty} \|\bar{x}(t)\|_X = 0$;

3) любая функция из $F_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$;

4) любая функция $x \in F_c(\mathbb{R}, X)$, представимая в виде $x = \sum\limits_{k=-n}^{n} x_k(t) e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, где $x_k \in F_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Далее введем определение рядов Фурье функций из $F_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Определение 8. *Каноническим рядом Фурье* функции $x \in F_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ будем называть ряд вида

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, t \in \mathbb{R},$$

где функции $x_n: \mathbb{R} \to X, n \in \mathbb{Z}$, определяются формулами

$$x_n(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(t+\tau) e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)} d\tau, t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

и называются *каноническими коэффициентами Фурье* функции x.

Ясно, что если $x \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$, то $x_k(t) \equiv x_k = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(\tau) e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau} d\tau$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, – обычные коэффициенты Фурье непрерывной периодической функции x.

Определение 9. *Обобщенным рядом Фурье* функции $x \in \mathsf{F}_{\omega,\infty}(\mathsf{R}, X)$ называется любой ряд вида

$$\sum_{n\in\mathsf{Z}} y_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, \ t \in \mathsf{R}, \tag{3}$$

где $y_n, n \in \mathsf{Z},$ – такие функции из $\mathsf{F}_c(\mathsf{R}, X)$, для которых $y_n - x_n \in \mathsf{F}_0(\mathsf{R}, X)$, $n \in \mathsf{Z}$, а функции x_n, $n \in \mathsf{Z}$, определяются формулой (2).

Лемма 5. *Канонические коэффициенты Фурье* x_n, $n \in \mathsf{Z}$ *(определенные формулой (2)), являются медленно меняющимися на бесконечности функциями, то есть* $x_n \in \mathsf{F}_{sl,\infty}(\mathsf{R}, X), n \in \mathsf{Z}$.

Утверждение леммы 5 следует из равенств $x_n(t+\omega) - x_n(t) = \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^{\omega} (S(\omega)x - x)(t+\tau) e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)} d\tau$, $t \in \mathsf{R}$, $n \in \mathsf{Z}$.

Теорема 4. *Коэффициенты любого обобщенного ряда Фурье функции* $x \in \mathsf{F}_{\omega,\infty}(\mathsf{R}, X)$ *принадлежат пространству* $\mathsf{F}_{sl,\infty}(\mathsf{R}, X)$ *и удовлетворяют условию* $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\|_{\mathsf{F}} = 0$.

Доказательство. Первая часть данного утверждения следует из определения 9 и леммы 5. Для доказательства второй части рассмотрим фактор-алгебру $\mathrm{Y} = F_c(R, X)/F_0(R, X)$, в которой действует сильно непрерывная изометрическая группа операторов $\widetilde{S} : \mathsf{R} \to End\ Y$ вида $\widetilde{S}(t)\widetilde{x} = S(t)x + F_0(R, X)$, $x \in F_c(R, X)$, $t \in \mathsf{R}$. Фактор-алгебра Y наделяется структурой банахова $L^1(\mathsf{R})$-модуля с помощью формулы $f\widetilde{x} = f(t)\widetilde{S}(-t)\widetilde{x}dt$, $f \in L^1(\mathsf{R})$, $\widetilde{x} \in Y$. Непосредственно из определения представления $\widetilde{S}$ следует, что $\widetilde{S}(\omega)\widetilde{x} = \widetilde{x}$, $\widetilde{x} \in F_{\omega,\infty}(R, X)/F_0(R, X)$. Следовательно, функция $x \in F_c(R, X)$ является ω-периодической на бесконечности тогда и только тогда, когда класс эквивалентности $\widetilde{x} = x + F_0(R, X)$ является ω-периодическим вектором относительно представления $\widetilde{S}$. Тогда условие $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\|_{\mathsf{F}} = 0$ следует непосредственно из теоремы 1.

Теорема 5. *По любой функции* $x \in \mathsf{F}_{\omega,\infty}(\mathsf{R}, X)$ *(не обязательно непрерывной) можно построить обобщенный ряд Фурье (3) такой, что* $y_n \in C_{sl,\infty}(\mathsf{R}, X)$, $n \in \mathsf{Z}$. *Кроме того, найдутся обобщенные коэффициенты Фурье* f_n, $n \in \mathsf{Z}$, *допускающие расширение на всю комплексную плоскость до ограниченных целых функций экспоненциального типа.*

Утверждение данной теоремы следует из определения 8 и теоремы 3.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Постановка задачи и теорема 4 выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00197, выполняемый в Воронежском госуниверситете), остальные результаты – при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

The problem statement and theorem 4 were supported by the RFBR (project no. 16-01-00197 performed in Voronezh State University), rest of the results were supported by the RSF (project no. 14-21-00066 performed in Voronezh State University).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков, А. Г. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал // Изв. РАН. Сер. математическая. – 2005. – Т. 69, № 3. – С. 3–54.

2. Баскаков, А. Г. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве / А. Г. Баскаков // Мат. заметки. – 2015. – Т. 97, № 2. – С. 174–190.

3. Баскаков, А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // УМН. – 2013. – Т. 68, № 1. – С. 77–128.

4. Баскаков, А. Г. Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе / А. Г. Баскаков // Сиб. мат. журн. – 1979. – Т. 20, № 5. – С. 942–952.

5. Баскаков, А. Г. О спектральном синтезе в банаховых модулях над коммутативными банаховыми алгебрами / А. Г. Баскаков // Мат. заметки. – 1983. – Т. 34, № 4. – С. 573–585.

6. Баскаков, А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений / А. Г. Баскаков // Изв. РАН. Сер. математическая. – 2009. – Т. 73, № 2. – С. 3–68.

7. Баскаков, А. Г. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений / А. Г. Баскаков // Мат. заметки. – 1978. – Т. 24, № 2. – С. 195–206.

8. Баскаков, А. Г. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений / А. Г. Баскаков, Н. С. Калужина // Мат. заметки. – 2012. – Т. 92, № 5. – С. 643–661.

9. Баскаков, А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов / А. Г. Баскаков // СМФН. – 2004. – Т. 9. – С. 3–151.

10. Винер, Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения / Н. Винер. – М. : Физматлит, 1963. – 256 с.

11. Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 535 с.

12. Левитан, Б. М. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения / Б. М. Левитан, В. В. Жиков. – М. : Изд-во МГУ, 1978. – 205 с.

13. Струкова, И. И. Гармонический анализ периодических векторов и периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Вестн. НГУ. Сер.: мат., мех., информ. – 2014. – Т. 14, № 1. – С. 98–111.

14. Струкова, И. И. О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, № 1. – С. 28–38.

15. Струкова, И. И. О теореме Винера для периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Сиб. мат. журн. – 2016. – Т. 57, № 1. – С. 186–198.

16. Струкова, И. И. Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы / И. И. Струкова // Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 3. – С. 161–165.

17. Струкова, И. И. Теорема Винера для периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т. 12, № 4. – С. 34–41.

18. Струкова, И. И. Теорема Винера для периодических на бесконечности функций с рядами Фурье, суммируемыми с весом / И. И. Струкова // Уфим. мат. журн. – 2013. – Т. 5, № 3. – С. 144–152.

19. Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. – М. : ИЛ, 1962. – 829 с.

20. Baskakov, A. Harmonic analysis of functions periodic at infinity / A. Baskakov, I. Strukova // Eurasian Math. J. – 2016. – Vol. 7, № 4. – P. 7–26.

21. Engel, K.-J. A short course on operator semigroups / K.-J. Engel, R. Nagel. – New York : Universitext : Springer, 2006. – XI, 247 p.

REFERENCES

1. Baskakov A.G., Krishtal I.A. Garmonicheskiy analiz kauzalnykh operatorov i ikh spektralnye svoystva [Harmonic Analysis of Causal Operators and Their Spectral Properties]. *Izv. RAN. Ser. matematicheskaya*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 3-54.

2. Baskakov A.G. Garmonicheskiy i spektralnyy analiz operatorov s ogranichennymi stepenyami i ogranichennykh polugrupp operatorov na banakhovom prostranstve [Harmonic and Spectral Analysis of Power Bounded Operators and Bounded Semigroups of Operators on Banach Spaces]. *Mat. zametki*, 2015, vol. 97, no. 2, pp. 174-190.

3. Baskakov A.G. Issledovanie lineynykh differentsialnykh uravneniy metodami spektralnoy teorii raznostnykh operatorov i lineynykh otnosheniy [Analysis of Linear Differential Equations by Methods of the Spectral Theory of Difference Operators and Linear Relations]. *UMN*, 2013, vol. 68, no. 1, pp. 77-128.

4. Baskakov A.G. Neravenstva bernshteynovskogo tipa v abstraktnom garmonicheskom analize [Bernšte n-Type Inequalities in Abstract Harmonic Analysis]. *Sib. mat. zhurn.*, 1979, vol. 20, no. 5, pp. 665-672.

5. Baskakov A.G. O spektralnom sinteze v banakhovykh modulyakh nad kommutativnymi banakhovymi algebrami [On Spectral Synthesis in Banach Modules over Commutative Banach Algebras]. *Mat. zametki*, 1983, vol. 34, no. 4, pp. 776-782.

6. Baskakov A.G. Spektralnyy analiz differentsialnykh operatorov s neogranichennymi operatornymi koeffitsientami, raznostnye otnosheniya i polugruppy raznostnykh otnosheniy [Spectral Analysis of Differential Operators with Unbounded Operator-Valued Coefficients, Difference Relations and Semigroups of Difference Relations]. *Izv. RAN. Ser. matematicheskaya*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 3-68.

7. Baskakov A.G. Spektralnye kriterii pochti periodichnosti resheniy funktsionalnykh uravneniy [Spectral Tests for the Almost Periodicity of the Solutions of Functional Equations]. *Mat. zametki*, 1978, vol. 24, no. 2, pp. 195-206.

8. Baskakov A.G., Kaluzhina N.S. Teorema Berlinga dlya funktsiy s sushchestvennym spektrom iz odnorodnykh prostranstv i stabilizatsiya resheniy parabolicheskikh uravneniy [Beurling's Theorem for Functions with Essential Spectrum from Homogeneous Spaces and Stabilization of Solutions of Parabolic Equations]. *Mat. zametki*, 2012, vol. 92, no. 5, pp. 643-661.

9. Baskakov A.G. Teoriya predstavleniy banakhovykh algebr, abelevykh grupp i polugrupp v spektralnom analize lineynykh operatorov [Theory of Representations of Banach Algebras, and Abelian Groups and Semigroups in the Spectral Analysis of Linear Operators]. *SMFN*, 2004, vol. 9, pp. 3-151.

10. Wiener N. *Integral Furye i nekotorye ego prilozheniya* [Fourier Integral and Some of Its Applications]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 534 p.

11. Daletskiy Yu.L., Kreyn M.G. *Ustoychivost resheniy differentsialnykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 535 p.

12. Levitan B.M., Zhikov V.V. *Pochti-periodicheskie funktsii i differentsialnye uravneniya* [Almost Periodic Functions and Differential Equations]. Moscow, Izd-vo MGU, 1978. 205 p.

13. Strukova I.I. Garmonicheskiy analiz periodicheskikh vektorov i periodicheskikh na beskonechnosti funktsiy [Harmonic Analysis of Periodic Vectors and Functions Periodic at Infinity]. *Vestn. NGU. Ser.: mat., mekh., inform.*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 98-111.

14. Strukova I.I. O garmonicheskom analize periodicheskikh na beskonechnosti funktsiy [On the Harmonic Analysis of Periodic at Infinity Functions]. *Izv. Sarat. univ. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 28-38.

15. Strukova I.I. O teoreme Vinera dlya periodicheskikh na beskonechnosti funktsiy [On the Wiener Theorem for Periodic at Infinity Functions]. *Sib. mat. zhurn.*, 2016, vol. 57, no. 1, pp. 186-198.

16. Strukova I.I. Spektry algebr medlenno menyayushchikhsya i periodicheskikh na beskonechnosti funktsiy i banakhovy predely [Spectra of Algebras of Slowly Varying and Periodic at Infinity Functions and Banach Limits]. *Vestn. VGU. Seriya: Fizika. Matematika*, 2015, no. 3, pp. 161-165.

17. Strukova I.I. Teorema Vinera dlya periodicheskikh na beskonechnosti funktsiy [Wiener's Theorem for Periodic at Infinity Functions]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2012, vol. 12, no. 4, pp. 34-41.

18. Strukova I.I. Teorema Vinera dlya periodicheskikh na beskonechnosti funktsiy s ryadami Furye, summiruemymi s vesom [Wiener's Theorem for Periodic at Infinity Functions with Summable Weighted Fourier Series]. *Ufim. mat. zhurn.*, 2013, vol. 5, no. 3, pp. 144-152.

19. Hille E., Phillips R.S. *Funktsionalnyy analiz i polugruppy* [Functional Analysis and Semi-Groups]. Moscow, IL Publ., 1962. 829 p.

20. Baskakov A.G., Strukova I.I. Harmonic analysis of functions periodic at infinity. *Eurasian Math. J.*, 2016, vol. 7, no. 4, pp. 7-26.

21. Engel K.-J., Nagel R. *A short course on operator semigroups.* New York, Universitext, Springer, 2006. XI, 247 p.

HARMONIC ANALYSIS OF PERIODIC AT INFINITY FUNCTIONS IN HOMOGENEOUS SPACES

Irina Igorevna Strukova

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Junior Researcher,
Department of Nonlinear Fluctuations,
Voronezh State University
irina.k.post@yandex.ru
Universitetskaya Sq., 1, 394036 Voronezh, Russian Federation

Abstract. This article is devoted to homogeneous spaces $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ of functions defined on $\mathbb{R}$ with their values in a complex Banach space X. We introduce a notion of slowly varying at infinity function from $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$. We also consider some criteria for a function to be slowly varying at infinity. Then it is stated that for each slowly varying at infinity function from any homogeneous space (not necessary continuous, for instance, a function from Stepanov space $S^p(R, X)$, or $L^p(R, X)$,) there exists a uniformly continuous slowly varying at infinity function that differs from the first one by a function decreasing at infinity. In other words, a function from the corresponding subspace $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$.

In the second part of the article we introduce a notion of periodic at infinity function from homogeneous space. Our main results are connected with harmonic analysis of periodic at infinity functions from $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$. Periodic at infinity functions appear naturally as bounded solutions of certain classes of differential and difference equations. In this paper we develop basic harmonic analysis for such functions. We introduce the notion of a generalized Fourier series of a periodic at infinity function from homogeneous space. The Fourier coefficients in this case may not be constants, they are functions that are slowly varying at infinity. Moreover, it is stated that generalized Fourier coefficients of a function that may not be continuous can be chosen continuous. We use methods of the spectral theory of locally compact **Abelian** group isometric representations (**Banach** modules over group algebras).

Key words: Banach space, $L^1(\mathbb{R})$-module, homogeneous space, slowly varying at infinity function, periodic at infinity function, Fourier series.