



DOI: <https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.2.8>

УДК 537.868:536.33

ББК 22.313

АЛГОРИТМ СОВМЕСТНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА И УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРИ СУШКЕ СВЧ-ИЗЛУЧЕНИЕМ¹

Анатолий Михайлович Афанасьев

Доктор технических наук, профессор кафедры информационной безопасности,
Волгоградский государственный университет
a.m.afanasiev@yandex.ru, infsec@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Борис Николаевич Сипливый

Доктор технических наук, профессор кафедры теоретической физики и волновых процессов,
Волгоградский государственный университет
Siplivyy@list.ru, tf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Численными методами исследована имеющая фундаментальное значение задача о нахождении полей тепломассопереноса внутри влажного материала, находящегося под воздействием электромагнитного излучения. Предложенный расчетный алгоритм позволяет учитывать обратное влияние распределений температуры и влагосодержания в некоторый момент времени на распределение поглощаемой электромагнитной энергии в тот же самый момент.

Ключевые слова: уравнения А.В. Лыкова, уравнения Максвелла, сушка электромагнитным излучением, начально-краевая задача, численные методы, комплексная диэлектрическая проницаемость, метод характеристических матриц.

Введение

Сушка материалов электромагнитным излучением является важным компонентом целого ряда современных технологий. Она применяется для обезвоживания пищевых продуктов и сельскохозяйственного сырья, для сушки древесины и строительных материалов, в дорожном строи-

тельстве, при разработке горных пород и мерзлых грунтов, в горнодобывающей и нефтегазодобывающей промышленности, для создания экологически безопасных и энергоэффективных технологий в медицине, химической, электронной, текстильной, полиграфической, резиновой и целлюлозно-бумажной промышленности, в установках по созданию микроклимата в помещениях (регенерация материалов, используемых для поглощения водяного пара из воздуха). Математическому моделированию процесса электромагнитной сушки уделяется большое внимание в литературе. Для анализа этого вида сушки применяют как аналитические методы [2; 12; 15], так и численные [13; 14]. Большей частью применяется подход, когда плотность внутренних источников тепла, обусловленных поглощением электромагнитного излучения, является наперед заданной [2]. В тех же случаях, когда учитывается взаимосвязь электромагнитных процессов и процессов тепломассопереноса, для численного анализа используются коммерческие пакеты вычислительных программ, без детального указания того, как осуществляется согласованная работа пакетов [14]. Исправляя это положение, в настоящей статье мы подробно излагаем разработанный и опробованный авторами численный алгоритм, позволяющий находить совместные решения для уравнений тепломассопереноса и уравнений электромагнитного поля. Можно говорить, не изменяя существа проблемы, что этот алгоритм позволяет учитывать электромагнитную неоднородность среды, вызванную зависимостью диэлектрической проницаемости материала от температуры и влагосодержания, или что в рамках этого алгоритма учитывается обратное влияние распределений температуры и влагосодержания в некоторый момент времени на распределение поглощаемой электромагнитной энергии в тот же самый момент.

Постановка задачи

В работе исследуется электромагнитная сушка образца с плоской геометрией (рис. 1). Толщину пластины d примем малой по сравнению с ее размерами в направлениях, перпендикулярных оси x , а интенсивности тепло- и массообмена поверхности пластины $x = 0$ с набегающим потоком воздуха будем считать зависящими только от времени, но не от координат. При этих условиях можно поставить задачу об исследовании электромагнитных процессов и процессов распространения тепла и влаги *в одномерном приближении*. Следовательно, будем изучать ситуацию, когда все функции, характеризующие процесс, – распределения температуры T и влагосодержания U , теплофизические характеристики материала, эквивалентная диэлектрическая проницаемость материала $\tilde{\epsilon}$, плотность электромагнитных потерь W , – зависят только от координаты x и времени τ .

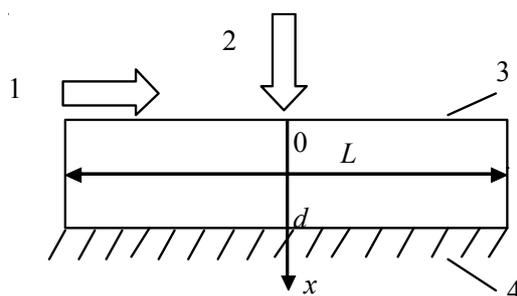


Рис. 1. Сушка плоского образца:

1 – воздушный поток; 2 – плоская электромагнитная волна; 3 – влажный образец; 4 – тепло- и влагоизоляция

Характеристики *падающей* волны будем считать заданными, а характеристики волны *отраженной* и волны *внутри образца* подлежат определению.

Алгоритм учета взаимного влияния электромагнитного поля и полей тепломассопереноса построен на решении следующих частных задач: а) расчет поля эквивалентной диэлектрической проницаемости материала $\tilde{\epsilon}(x, \tau)$ по известным полям $T(x, \tau)$, $U(x, \tau)$; б) расчет поля плотности

электромагнитных потерь $W(x, \tau)$ при известном поле $\tilde{\varepsilon}(x, \tau)$; в) расчет полей $T(x, \tau)$, $U(x, \tau)$ при известном поле $W(x, \tau)$. Рассмотрим последовательно эти частные задачи.

Поле диэлектрической проницаемости

Объект сушки считается состоящим из твердой основы и воды, заполняющей капилляры и поры твердого компонента. Для решения электромагнитной задачи нужно знать зависимость эквивалентной диэлектрической проницаемости материала $\tilde{\varepsilon}$ от процентного соотношения между компонентами смеси, от частоты поля ω и температуры. Этому вопросу посвящена обширная литература. Для учета процентного соотношения применяют *формулы смешения* Зильберштейна, Максвелла, Винера, Ландау – Лифшица, Максвелла – Вагнера, и другие [9; 10]. Мы будем использовать формулу Максвелла

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_B^{U/(U+1)} \cdot \tilde{\varepsilon}_T^{1/(U+1)}. \quad (1)$$

Здесь $\tilde{\varepsilon}_B$ и $\tilde{\varepsilon}_T$ – эквивалентные диэлектрические проницаемости воды и твердой основы, а величины $U / (U + 1)$ и $1 / (U + 1)$ есть их массовые доли в смеси. Зависимость $\tilde{\varepsilon}_B$ от частоты и температуры будем моделировать *формулой Дебая*

$$\tilde{\varepsilon}_B = \varepsilon_\infty + (\varepsilon_{ct} - \varepsilon_\infty) / (1 + i\omega\tau_p). \quad (2)$$

В этой формуле ε_{ct} – низкочастотная проницаемость; ε_∞ – высокочастотная проницаемость; τ_p – время релаксации. По данным измерений $\varepsilon_\infty = 5,5$, а ε_{ct} и τ_p сильно зависят от температуры. Известные из литературы экспериментальные зависимости для этих величин [9] можно аппроксимировать следующими формулами:

$$\varepsilon_{ct} = 186 - a \cdot T; \quad \tau_p = \tau_0 \cdot \exp(E/kT). \quad (3)$$

Здесь $a = 0,361$ 1/К; $\tau_0 = 6,47 \times 10^{-15}$ с; $E = 2,98 \times 10^{-20}$ Дж; k – постоянная Больцмана; T – температура в К.

Эквивалентную диэлектрическую проницаемость твердой основы $\tilde{\varepsilon}_T$ также полагаем известной функцией температуры и частоты. В итоге формулы (1)–(3) дают эквивалентную диэлектрическую проницаемость двухкомпонентного влажного материала $\tilde{\varepsilon}$ как функцию влагосодержания U , температуры T и частоты ω .

Поле электромагнитных потерь

Здесь мы рассмотрим алгоритм расчета плотности электромагнитных потерь и коэффициентов отражения и пропускания при известном распределении эквивалентной диэлектрической проницаемости по объему образца. Электромагнитное поле во всем пространстве будем считать гармоническим частоты ω , поэтому изложение будем вести на языке метода комплексных амплитуд. Комплексный характер векторов и скаляров никак не отмечается. Исходные соотношения электродинамики – материальные уравнения, первое и второе уравнения Максвелла для векторов поля E , D , B и H , формулы для расчета плотности потока электромагнитной энергии S и плотности электромагнитных потерь W – имеют следующий вид [17]:

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E; \quad B = \mu_0 \mu H; \quad j = \sigma E; \quad \varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''; \quad \mu = \mu' - i\mu''; \quad \sigma = \sigma' - i\sigma''; \quad (4)$$

$$\text{rot } H = i\omega \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} E; \quad \text{rot } E = -i\omega \mu_0 \mu H; \quad \tilde{\varepsilon} = \left(\varepsilon' - \frac{\sigma''}{\omega \varepsilon_0} \right) - i \left(\varepsilon'' + \frac{\sigma'}{\omega \varepsilon_0} \right); \quad (5)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*), \quad W = \frac{\omega}{2} (\epsilon_0 \tilde{\epsilon}'' |\mathbf{E}|^2 + \mu_0 \mu'' |\mathbf{H}|^2). \quad (6)$$

Здесь \mathbf{j} – плотность электрического тока; ϵ , μ , σ – соответственно диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость и электропроводность среды; $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}' - i\tilde{\epsilon}''$ – эквивалентная диэлектрическая проницаемость материала (в дальнейшем слово «эквивалентная» мы чаще всего будем опускать). Вектор \mathbf{S} и скаляр W , в отличие от других величин, являются вещественными.

Мы будем использовать также понятия комплексного показателя преломления среды n , волнового сопротивления вакуума Z_0 и волнового числа k :

$$n = \sqrt{\tilde{\epsilon}\mu}, \quad Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}, \quad k = k_0 n, \quad \text{где } k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = \omega/c.$$

Все три среды, то есть сам слой и примыкающие к нему два полупространства, считаем немагнитными, поэтому для них $\mu' = 1$, $\mu'' = 0$, и значит $\mu = 1$, $n = \sqrt{\tilde{\epsilon}}$.

На рисунке 2 изображен плоский слой 2, разделяющий полупространства 1 и 3. Среды 1 и 3 – однородные и непоглощающие, поэтому их диэлектрические проницаемости $\tilde{\epsilon}_1$, $\tilde{\epsilon}_3$ и показатели преломления $n_1 = \sqrt{\tilde{\epsilon}_1}$, $n_3 = \sqrt{\tilde{\epsilon}_3}$ – вещественные числа. Среда 2 является и неоднородной, и поглощающей. Зависимость ее диэлектрической проницаемости от координат принимается в виде $\tilde{\epsilon}_2 \equiv \tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}(x)$ (неоднородность имеет слоистую структуру).

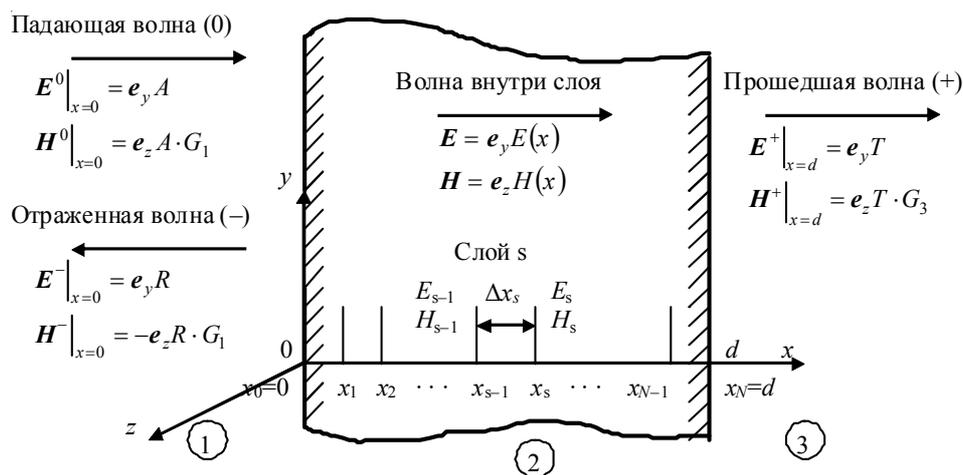


Рис. 2. К расчету электромагнитного поля внутри слоя методом характеристических матриц

Пусть из области 1 на левую границу области 2 в нормальном к ней направлении падает плоская гармоническая линейно поляризованная электромагнитная волна (волна TEM -типа). Комплексные векторы этой волны, а также волны отраженной, прошедшей и волны внутри слоя, в декартовой системе координат имеют один и тот же вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E(x), \quad \mathbf{H} = \mathbf{e}_z H(x), \quad (7)$$

а дополнительные символы, позволяющие различать векторы этих четырех волн, показаны на рисунке 2 (используются символы 0, – и + соответственно для волны падающей, прошедшей и отраженной; для волны внутри слоя оставляем обозначения (7)).

Во всех трех средах уравнения Максвелла (5) для волн вида (7) будут выглядеть так:

$$\frac{dE(x)}{dx} = -i\omega\mu_0 H(x), \quad \frac{dH(x)}{dx} = -i\omega\epsilon_0 \tilde{\epsilon}(x) E(x). \quad (8)$$

Тип этой системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно двух неизвестных функций можно определить так: *нормальная, линейная, однородная, с переменными коэффициентами*.

В дальнейшем нас будут интересовать только *однородные* среды (неоднородный слой материала мы представим состоящим из тонких слоев однородных слоев). Для такого случая ($\tilde{\epsilon} = \text{const}$) общее решение системы (8) известно [18]:

$$\begin{pmatrix} E(x) \\ H(x) \end{pmatrix} = F(x) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} \cos k_0 n x & \sin k_0 n x \\ -\frac{i n}{Z_0} \sin k_0 n x & \frac{i n}{Z_0} \cos k_0 n x \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Здесь $F(x)$ – *фундаментальная матрица* системы (8), а C_1 и C_2 – произвольные комплексные постоянные.

Исходя из формулы (9), построим электромагнитное поле как снаружи слоя (однородная среда без поглощения), так и внутри слоя (неоднородная среда с поглощением).

Рассмотрим сначала поле вне слоя. Пусть функция $E(x)$ имеет на границах слоя некоторые значения A , R и T – соответственно для волны падающей, отраженной и прошедшей:

$$E^0(0) = A; \quad E^-(0) = R; \quad E^+(d) = T. \quad (10)$$

Отвечающие им значения функции $H(x)$ можно найти из (9), если учесть, что при $C_2/C_1 = -i$ формулы (9) дают *прямые*, а при $C_2/C_1 = i$ – *обратные* волны (это устанавливается по виду вектора Пойнтинга для каждого из двух решений). Тогда будем иметь:

$$H^0(0) = A \cdot G_1, \quad H^-(0) = -R \cdot G_1, \quad H^+(d) = T \cdot G_3. \quad (11)$$

Здесь $G_1 = \sqrt{\tilde{\epsilon}_1}/Z_0$, $G_3 = \sqrt{\tilde{\epsilon}_3}/Z_0$ – вещественные постоянные.

Рассмотрим теперь поле внутри слоя. Обратимся к вычислительному алгоритму работ [7; 8]. Представим область 2 состоящей из N слоев малой толщины, которые будем считать *однородными*. Сопоставим искомым функциям $E(x)$, $H(x)$ сеточные функции E_s , H_s и рассмотрим слой с произвольным номером s . В силу однородности слоя справедлива формула (9). Положим в ней сначала $x = x_{s-1}$, $E = E_{s-1}$, $H = H_{s-1}$, а затем $x = x_s$, $E = E_s$, $H = H_s$; исключая из получившихся уравнений C_1 и C_2 , получим связь между компонентами поля на границах слоя с номером s :

$$\begin{pmatrix} E_s \\ H_s \end{pmatrix} = M_s \cdot \begin{pmatrix} E_{s-1} \\ H_{s-1} \end{pmatrix}, \quad M_s = \begin{pmatrix} \cos k_0 n_s \Delta x_s & -\frac{i Z_0}{n_s} \sin k_0 n_s \Delta x_s \\ -\frac{i n_s}{Z_0} \sin k_0 n_s \Delta x_s & \cos k_0 n_s \Delta x_s \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Здесь $n_s = \sqrt{\tilde{\epsilon}_s}$ – комплексный показатель преломления слоя s .

Пользуясь рекуррентной связью, даваемой формулой (12), получим, что связь между компонентами электромагнитного поля на левой границе первого слоя и правой границе слоя с произвольным номером j будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} E_j \\ H_j \end{pmatrix} = K_j \cdot \begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix}, \quad K_j = \prod_{s=1}^{s=j} M_s \equiv \begin{pmatrix} m_{11}^j & m_{12}^j \\ m_{21}^j & m_{22}^j \end{pmatrix} \quad (j = \overline{1, N}). \quad (13)$$

Квадратную матрицу второго порядка $K_j = \begin{pmatrix} m_{pq}^j \end{pmatrix}$ называют *характеристической матрицей* (матрицей Коши) неоднородного слоя. Она представляет собой произведение j матриц вида (12) и связывает компоненты поля при $x = 0$ и $x = x_j$ (левая граница первого слоя и правая граница слоя j).

В качестве следующего шага проведем «сшивание» построенных решений на границах неоднородного слоя (рис. 2). Формулы (10), (11) дают предельные значения компонент поля при подходе к границам слоя *снаружи*, а величины E_0, H_0, E_N, H_N есть предельные значения компонент при подходе к этим границам *изнутри*. Перечисленные компоненты поля являются *касательными* к границе, поэтому они должны изменяться *непрерывно*. Это приводит к следующим равенствам:

$$A + R = E_0; \quad G_1(A - R) = H_0; \quad T = E_N; \quad G_3T = H_N. \quad (14)$$

Величины E_0, H_0, E_N, H_N , кроме формулы (14), связаны еще формулой (13) при $j = N$:

$$\begin{pmatrix} E_N \\ H_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^N & m_{12}^N \\ m_{21}^N & m_{22}^N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Рассматривая совместно (14) и (15), найдем *амплитудный коэффициент отражения* $r = R/A$:

$$r = \frac{G_1(m_{12}^N G_3 - m_{22}^N) + m_{11}^N G_3 - m_{21}^N}{G_1(m_{12}^N G_3 - m_{22}^N) - m_{11}^N G_3 + m_{21}^N}. \quad (16)$$

Рассмотрим теперь способ вычисления средней по времени плотности электромагнитных потерь. Если магнитных потерь нет, то, согласно второй из формул (6),

$$W = -(\omega \epsilon_0 / 2) \cdot |E|^2 \cdot \text{Im } \tilde{\epsilon}.$$

При конечно-разностном подходе для слоя j на рисунке 2 имеем

$$W_j = -(\omega \epsilon_0 / 2) \cdot |E_j|^2 \cdot \text{Im } \tilde{\epsilon}_j. \quad (17)$$

Здесь величину $\tilde{\epsilon}$, так же как и значение компоненты E , будем брать на правой границе слоя с номером j . Теперь нужно найти E_j . Из (13) и (14) получим:

$$\begin{pmatrix} E_j \\ H_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^j & m_{12}^j \\ m_{21}^j & m_{22}^j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix}; \quad (18)$$

$$E_0 = A + R = A(1 + r); \quad H_0 = G_1(A - R) = G_1A(1 - r). \quad (19)$$

Здесь амплитудный коэффициент отражения r уже известен – он вычисляется по формуле (16). Рассматривая (18) и (19) совместно, найдем, что

$$E_j = A[m_{11}^j(1 + r) + G_1 m_{12}^j(1 - r)], \text{ откуда}$$

$$|E_j|^2 = |A|^2 \cdot |m_{11}^j(1 + r) + G_1 m_{12}^j(1 - r)|^2,$$

и тогда по формуле (17)

$$W_j = -(\omega \epsilon_0 / 2) \cdot \text{Im } \tilde{\epsilon}_j \cdot |A|^2 \cdot |m_{11}^j(1 + r) + G_1 m_{12}^j(1 - r)|^2. \quad (20)$$

Выразим здесь $|A|^2$ через характеристики падающей волны при $x = 0$. Поскольку

$$S = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*), \quad \mathbf{E} = \mathbf{e}_y E(x), \quad \mathbf{H} = \mathbf{e}_z H(x), \text{ то}$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Re}[E(x) \cdot H(x)^*] = \mathbf{e}_x \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Re}[E(x) \cdot H(x)^*],$$

и тогда при $x = 0$ будем иметь

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_x S^0, \quad \text{где } S^0 = \frac{1}{2} |A|^2 G_1.$$

Здесь S_0 есть интенсивность падающей волны, которую мы считаем заданной. Выразим отсюда $|A|^2$ через S^0 и подставим получившееся выражение в (20). Учитывая еще, что $\omega \varepsilon_0 / G_1 = k_0 / n_1$, получим такой результат:

$$W_j = -\frac{k_0 S^0 \cdot \operatorname{Im} \tilde{\varepsilon}_j}{n_1} \cdot \left| m_{11}^j (1+r) + G_1 m_{12}^j (1-r) \right|^2. \quad (21)$$

Поля температуры и влагосодержания

Проведем расчет полей T и U в пластине рисунка 1 при условии, что плотность внутренних источников тепла W (плотность электромагнитных потерь) является известной. Другие условия, при которых рассматривается задача, обсуждались ранее. Примем дополнительно, что теплофизические характеристики материала являются постоянными. Тогда начально-краевая задача для расчета поля температуры $T(x, \tau)$ и поля влагосодержания $U(x, \tau)$ будет иметь следующий вид [11]:

$$c \rho_0 \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + r \gamma \rho_0 \frac{\partial U}{\partial \tau} + W(x, \tau); \quad (22)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = a_m \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_m \delta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad (23)$$

$$Q(\tau) + r(1-\gamma) \cdot J(\tau) = \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(0, \tau); \quad (24)$$

$$J(\tau) = a_m \rho_0 \left[\frac{\partial U}{\partial x}(0, \tau) + \delta \frac{\partial T}{\partial x}(0, \tau) \right]; \quad (25)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(d, \tau) = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial x}(d, \tau) = 0; \quad (26)$$

$$T(x, 0) = T_0(x); \quad U(x, 0) = U_0(x); \quad (27)$$

$$Q(\tau) = \alpha_w [T(0, \tau) - T_b] + \alpha \tilde{A} \left[(T(0, \tau) + T_1)^4 - (T_b + T_1)^4 \right]; \quad (28)$$

$$J(\tau) = \alpha_m [P(T(0, \tau)) - \varphi \cdot P(T_b)] \quad P(T) = 6,03 \cdot 10^{-3} \cdot \exp \frac{17,3 \cdot T}{T + T_2}. \quad (29)$$

Здесь (22) и (23) – уравнения распространения тепла и влаги; (24) и (25) – краевые условия тепло- и массообмена на поверхности $x = 0$; (26) – краевые условия на поверхности $x = d$; (27) – начальные условия при $\tau = 0$ ($T_0(x)$ и $U_0(x)$ – некоторые заданные функции). Формула (28) определяет интенсивность теплообмена верхней границы пластины с потоком воздуха (учитывается теплообмен конвекцией и теплообмен излучением), а формула (29) – интенсивность массообмена на этой границе. Интенсивность массообмена зависит от перепада давления водяного пара по толщине пограничного слоя (краевое условие Дальтона; в виде (29) оно впервые использовано в работе авторов [4]). В этих уравнениях: c , ρ_0 , γ , λ , a_m , δ – теплофизические характеристики материала (удельная теплоемкость, плотность в сухом состоянии, критерий испарения, коэффициент теплопроводности, коэффициент диффузии влаги, относительный коэффициент термодиффузии вла-

ги); r – удельная теплота парообразования воды; T_B и ϕ – температура и влажность воздуха за пределами пограничного слоя; σ – постоянная Стефана – Больцмана; \tilde{A} – коэффициент теплового излучения; $P(T)$ – функция Г.К. Филоненко, моделирующая зависимость относительного парциального давления насыщенного водяного пара от его температуры T при общем нормальном давлении; $T_1 = 273$ °C и $T_2 = 238$ °C – постоянные; α_w и α_m – коэффициенты тепло- и массообмена поверхности образца с воздушной средой. При ламинарном состоянии пограничного слоя их можно рассчитать по формулам, полученным авторами в [4]:

$$\alpha_w = k_w \sqrt{\frac{V}{L}}; \alpha_m = k_m \sqrt{\frac{V}{L}}; k_w = 3,82 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}^{1/2}}{\text{м}^2 \cdot \text{°C}}; k_m = 2,54 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{с}^{1/2} \cdot \text{м}^2}. \quad (30)$$

Здесь L – длина пластины в направлении движения воздушного потока, а V – его скорость.

Алгоритмы численного решения начально-краевых задач для уравнения диффузии изложены, например, в [1; 16]. Но в данном случае мы имеем систему двух связанных параболических уравнений. Численная схема для этого случая разработана авторами в [5]. В этой работе рассмотрен общий случай с переменными коэффициентами. Аппроксимация второй производной конечными разностями производится с помощью симметричной неявной схемы Кранка – Николсона с шеститочечным шаблоном, а получившиеся в результате аппроксимации системы линейных алгебраических уравнений трехдиагонального вида решаются методом прогонки. Авторами разработаны также вопросы тестирования вычислительной программы и организации текущей проверки ее работы с помощью законов сохранения энергии и вещества, а также численная схема для исследования двумерных задач с постоянными теплофизическими коэффициентами [6].

Алгоритм совместного решения задачи

Рассмотрим теперь алгоритм *совместного* решения уравнений электромагнитного поля и уравнений теплопереноса при сушке плоского образца на рисунке 1. Блок-схема алгоритма изображена на рисунке 3.

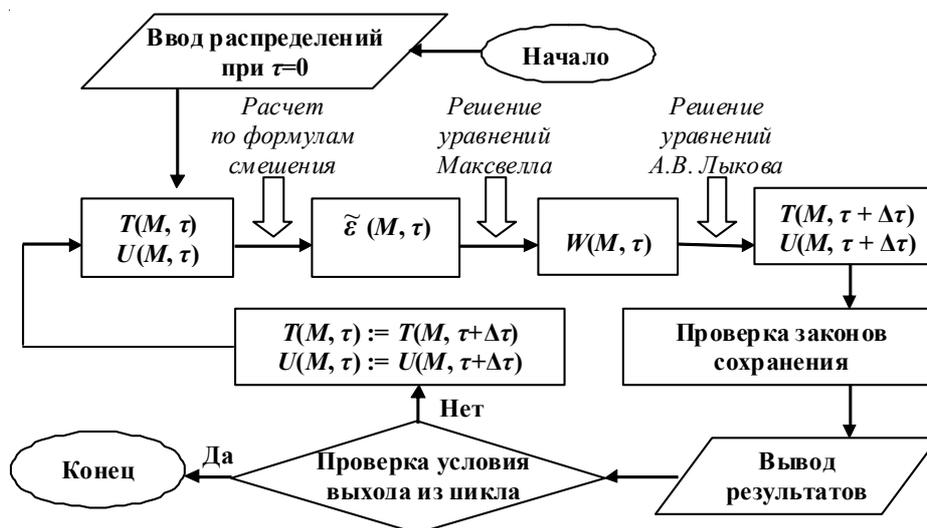


Рис. 3. Блок-схема для совместного исследования полей T , U и W

После ввода начальных распределений температуры $T(M, \tau)$ и влагосодержания $U(M, \tau)$ по формулам смешения рассчитывается поле эквивалентной диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon}(M, \tau)$. Затем при известном поле $\tilde{\epsilon}(M, \tau)$ решается система уравнений Максвелла и находится поле электромагнитных потерь $W(M, \tau)$. После этого при известном поле W решат-

ся система уравнений А.В. Лыкова и находятся поля T и U в следующий, близкий к предыдущему момент времени.

На следующем шаге для проверки корректности работы программы осуществляется текущая проверка законов сохранения для электромагнитной энергии, для тепловой энергии и вещества. Далее проверяется условие выхода из цикла, и, если оно не выполнено, только что найденные распределения объявляются начальными и организуется новый цикл вычислений.

Предусмотрены также режимы *тестирования* вычислительной программы. Для этого используются *аналитические решения* системы уравнений электромагнитной суши [3], которые авторам удалось найти для случая, когда $\tau \rightarrow \infty$ (*асимптотические решения*). Численные решения с течением времени должны выходить на них.

Пример расчета

Материалом пластины является влажный *цеолит*. Теплофизические характеристики цеолита: $\gamma = 0,12$; $\rho_0 = 1,1 \cdot 10^3$ кг/м³; $\delta = 1,9 \cdot 10^{-3}$ 1/°C; $\lambda = 0,25$ Вт/(м · °C); $a_m = 6,5 \cdot 10^{-7}$ м²/с; $c = 1,1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · °C). Диэлектрическая проницаемость цеолита в сухом состоянии $\tilde{\epsilon}_t$ моделировалась формулой Дебая с постоянными параметрами $\epsilon_\infty = 5,3$; $\epsilon_{ст} = 11,0$; $\tau_p = 2,3 \cdot 10^{-11}$ с. Другие характеристики процесса: размеры пластины $d = 0,02$ м, $L = 0,2$ м; параметры воздушного потока $T_b = 20$ °C, $V = 2,0$ м/с, $\phi = 0,5$; начальные распределения температуры и влагосодержания $T(x, 0) = 13,0$ °C = const = T_m (температура мокрого термометра), $U(x, 0) = 0,2 =$ const; диэлектрическая проницаемость среды по обе стороны от пластины $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1$; интенсивность падающей волны $S^0 = 0,5$ Вт/см²; частота излучения $f = 10$ ГГц; коэффициент теплового излучения $\tilde{A} = 0$ (теплообмен излучением не учитывался).

На рисунке 4 показано распределение влагосодержания за все время сушки. Полное время сушки составляет приблизительно 48 мин, а переходные процессы продолжаются около 20 минут. После их окончания режим сушки приблизительно можно считать *квазистационарным*. Он характеризуется стационарным температурным полем с температурой поверхности $T(0) = 56$ °C, неизменной интенсивностью сушки $J = 1,54 \cdot 10^{-3}$ кг/(м² · с) и неизменной скоростью сушки $\partial U / \partial \tau = -4,2 \cdot 10^{-3}$ мин⁻¹. Электромагнитные коэффициенты отражения и поглощения в течение сушки изменяются незначительно и составляют $R = 0,3$ и $P = 0,7$ соответственно (коэффициент пропускания $I = 0$). Распределение подведенной к пластине электромагнитной энергии в конце сушки имеет следующий вид: отражается 30 %; расходуется на испарение воды и на нагревание материала 48 и 10 % соответственно; теряется за счет теплообмена с воздушным потоком 12 %. *Энергоемкость* сушки (количество электромагнитной энергии, необходимой для удаления из материала 1 кг воды) оказывается равной 4,8 МДж/кг (с учетом отражения), что согласуется с результатами измерений: по данным [19], эта величина должна составлять 4 ÷ 6 МДж/кг.

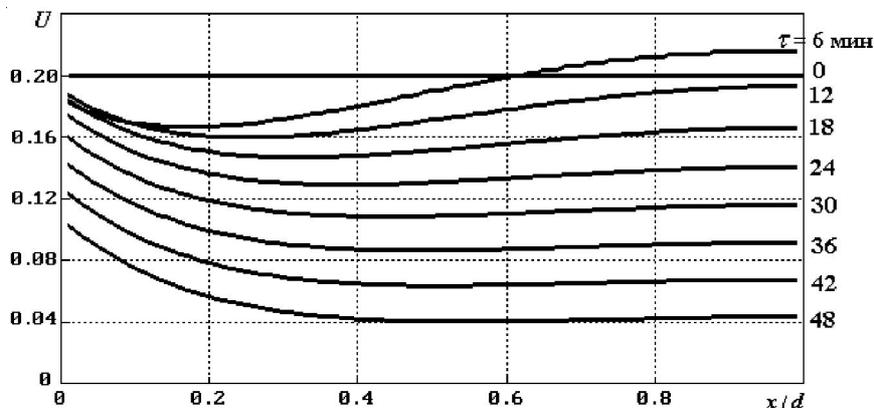


Рис. 4. Распределение влагосодержания U по толщине пластины в различные моменты времени τ при сушке цеолита

Заключение

Разработана численная схема для совместного решения уравнений распространения тепла и влаги А.В. Лыкова и уравнений Максвелла. Она строится на основе двух алгоритмов: а) при заданном распределении диэлектрической проницаемости решается задача о расчете поля плотности электромагнитных потерь, коэффициентов отражения и пропускания; б) при заданном поле плотности электромагнитных потерь решается задача о расчете полей температуры и влагосодержания. Роль связующего звена между этими двумя алгоритмами выполняет формула Дебая (она определяет зависимость диэлектрической проницаемости каждого из двух компонентов смеси, твердой основы и воды, от частоты и температуры) и формула смещения Максвелла (исходя из формул Дебая для твердой основы и воды, она определяет диэлектрическую проницаемость смеси этих компонентов как функцию частоты, температуры и влагосодержания). Проведен численный эксперимент (сушка влажного цеолита электромагнитным излучением СВЧ-диапазона), результаты которого находятся в хорошем согласии с имеющимися в литературе опытными данными.

ПРИМЕЧАНИЕ

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и администрации Волгоградской области в рамках научного проекта № 16-48-340527 «р_а».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен : в 2 т. / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – М. : Мир, 1990. – Т. 1. – 384 с.
2. Архангельский, Ю. С. Установки диэлектрического нагрева. Установки СВЧ / Ю. С. Архангельский. – Саратов : Сарат. гос. техн. ун-т, 2008. – 220 с.
3. Афанасьев, А. М. Исследование квазистационарных режимов при сушке СВЧ-излучением / А. М. Афанасьев, Б. Н. Сипливый // Известия вузов. Электромеханика. – 2008. – № 3. – С. 3–9.
4. Афанасьев, А. М. О краевых условиях массообмена в виде законов Ньютона и Дальтона / А. М. Афанасьев, Б. Н. Сипливый // Инженерно-физический журнал. – 2007. – Т. 80, № 1. – С. 27–34.
5. Афанасьев, А. М. Применение консервативных разностных схем для анализа уравнений электромагнитной сушки с переменными коэффициентами переноса / А. М. Афанасьев, Б. Н. Сипливый // Известия вузов. Электромеханика. – 2008. – № 4. – С. 3–8.
6. Афанасьев, А. М. Сушка электромагнитным излучением: численное решение задачи для прямоугольной области / А. М. Афанасьев, В. К. Михайлов, Б. Н. Сипливый // Известия вузов. Электромеханика. – 2015. – № 2. – С. 5–11.
7. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М. : Наука, 1970. – 856 с.
8. Виноградова, М. Б. Теория волн / М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
9. Кинг, Р. Антенны в материальных средах : в 2 кн. : пер. с англ. / Р. Кинг, Г. Смит. – М. : Мир, 1984. – 824 с.
10. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1982. – 624 с.
11. Лыков, А. В. Теория сушки / А. В. Лыков. – М. ; Л. : Энергия, 1968. – 471 с.
12. Марков, А. В. Механизм массопереноса в высокоинтенсивных процессах сушки при наличии внутренних источников тепла / А. В. Марков, Ю. П. Юленец // Теоретические основы химической технологии. – 2002. – Т. 36, № 3. – С. 269–274.
13. Моделирование процессов термовлагопереноса в капиллярно-пористых средах / С. П. Кундас, Н. Н. Гринчик, И. А. Гишкелюк, А. Л. Адамович. – Минск : Ин-т тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси, 2007. – 292 с.
14. Моделирование тепловлагопереноса в древесине при досушке энергией СВЧ-поля / Н. Н. Гринчик, А. Л. Адамович, О. А. Кизина, У. М. Харма // Инженерно-физический журнал. – 2015. – № 1. – С. 37–42.
15. Рудобашта, С. П. Тепломассоперенос при сушке в осциллирующем электромагнитном поле / С. П. Рудобашта, Э. М. Карташов, Н. А. Зуев // Теоретические основы химической технологии. – 2011. – Т. 45, № 6. – С. 641–647.

16. Самарский, А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1987. – 288 с.
17. Стрэттон, Дж. А. Теория электромагнетизма / Дж. А. Стрэттон. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 540 с.
18. Шимони, К. Теоретическая электротехника / К. Шимони. – М. : Мир, 1964. – 773 с.
19. Явчуновский, В. Я. Микроволновая и комбинированная сушка: физические основы, технологии и оборудование / В. Я. Явчуновский. – Саратов : Изд. Сарат. гос. техн. ун-та, 1999. – 212 с.

REFERENCES

1. Anderson D., Tannehill Dzh., Pletcher R. *Vychislitel'naya gidromekhanika i teploobmen* [Computational Hydromechanics and Heat Transfer]. Moscow, Mir Publ., 1990. 384 p.
2. Arkhangelskiy Yu.S. *Ustanovki dielektricheskogo nagreva. Ustanovki SVCh* [The Installations of Dielectric Heating. Installation of Microwave]. Saratov, SGTU Publ., 2008. 220 p.
3. Afanasyev A.M., Siplivyy B.N. Issledovanie kvazistatsionarnykh rezhimov pri sushke SVCh izlucheniem [The Study of Quasi-Stationary Modes in Drying with Microwave Radiation]. *Izvestiya vuzov. Elektromekhanika*, 2008, no. 3, pp. 3-9.
4. Afanasyev A.M., Siplivyy B.N. O kraevykh usloviyakh massoobmena v vide zakonov Nyutona i Daltona [On Boundary Conditions of Mass Transfer in the Form of Laws of Newton and Dalton]. *Inzhenerno-fizicheskij zhurnal*, 2007, vol. 80, no. 1, pp. 27-34.
5. Afanasyev A.M., Siplivyy B.N. Primenenie konservativnykh raznostnykh skhem dlya analiza uravneniy elektromagnitnoy sushki s peremennymi koeffitsientami perenosa [The Use of Conservative Difference Schemes for the Analysis of the Equations of the Electromagnetic Drying with Variable Transport Coefficients]. *Izvestiya vuzov. Elektromekhanika*, 2008, no. 4, pp. 3-8.
6. Afanasyev A.M., Mikhaylov V.K., Siplivyy B.N. Sushka elektromagnitnym izlucheniem: chislennoe reshenie zadachi dlya pryamougolnoy oblasti [Drying with Electromagnetic Radiation: Numerical Solution of Problem for a Rectangular Domain]. *Izvestiya vuzov. Elektromekhanika*, 2015, no. 2, pp. 5-11.
7. Born M., Volf E. *Osnovy optiki* [Basics of Optics]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 856 p.
8. Vinogradova M.B., Rudenko O.V., Sukhorukov A.P. *Teoriya voln* [Theory of Waves]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 384 p.
9. King R., Smit G. *Antenny v materialnykh sredakh* [Antennas in Material Media]. Moscow, Mir Publ., 1984. 824 p.
10. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. VIII. Elektrodinamika sploshnykh sred* [Course of Theoretical Physics. Vol. 8. Electrodynamics of Continuous Media]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 624 p.
11. Lykov A.V. *Teoriya sushki* [Theory of Drying]. Moscow; Leningrad, Energiya Publ., 1968. 471 p.
12. Markov A.V., Yulenets Yu.P. Mekhanizm massoperenosa v vysokointensivnykh protsessakh sushki pri nalichii vnutrennikh istochnikov tepla [The Mechanism of Mass Transfer in High-Intensity Drying with Internal Heat Sources]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii*, 2002, vol. 36, no. 3, pp. 269-274.
13. Kundas S.P., Grinchik N.N., Gishkelyuk I.A., Adamovich A.L. *Modelirovanie protsessov termovlagoperenosa v kapillyarno-poristykh sredakh* [Modeling of Thermal Moisture Transfer in Capillary-Porous Media]. Minsk, Institut teplo- i massoobmena im. A.V. Lykova NAN Belarusi, 2007. 292 p.
14. Grinchik N.N., Adamovich A.L., Kizina O.A., Kharma U.M. Modelirovanie teplovlagoperenosa v drevesine pri dosushke energiy SVCh-polya [Modeling of Heat and Moisture Transfer in Wood during dosushki energy of the microwave field]. *Inzhenerno-fizicheskij zhurnal*, 2015, no. 1, pp. 37-42.
15. Rudobashta S.P., Kartashov Je.M., Zuev N.A. Teplomassoperenos pri sushke v oscillirujushhem jelektromagnitnom pole [Heat and Mass Transfer during the Completion of Drying in an Oscillating Electromagnetic Field]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii*, 2011, vol. 45, no. 6, pp. 641-647.
16. SamarSKIY A.A. *Vvedenie v chislennye metody* [Introduction to Numerical Methods]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 288 p.
17. Strjetton Dzh.A. *Teoriya elektromagnetizma* [The Theory of Electromagnetism]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1948. 540 p.
18. Shimoni K. *Teoreticheskaya elektrotekhnika* [Theoretical Electrical Engineering]. Moscow, Mir Publ., 1964. 773 p.
19. Yavchunovskiy V.Ya. *Mikrovolnovaya i kombinirovannaya sushka: fizicheskie osnovy, tekhnologii i oborudovanie* [Microwave and Combined Drying: Physical Basis, Technology and Equipment]. Saratov, SGTU Publ., 1999. 212 p.

**ALGORITHM FOR THE JOINT SOLUTION
OF HEAT AND MASS TRANSFER EQUATIONS
AND EQUATIONS OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD
DURING THE DRYING WITH MICROWAVE RADIATION**

Anatoliy Mikhaylovich Afanasyev

Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Information Security,
Volgograd State University
a.m.afanasiev@yandex.ru, infsec@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Boris Nikolaevich Siplivyy

Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Theoretical Physics and Wave Processes,
Volgograd State University
Siplivyyj@list.ru, tf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. The authors develop a numerical scheme allowing to find a joint solution to the equations of diffusion of heat and moisture, A.V. Lykov and Maxwell's equations in electromagnetic drying of a sample with a flat geometry. Calculation scheme is based on two algorithms: a) for a given distribution of the dielectric constant the problem is to estimate the field density of electromagnetic losses, reflection coefficients and transmission; b) when there are electromagnetic losses of specified field density, the problem of calculation of fields of temperature and moisture content should be solved. The role of a bridge between these two algorithms performs the formula of Debye (it determines the dielectric permittivity of each of the two components of the mixture, the solid base and water, frequency and temperature) and mixing formula of Maxwell (on the basis of the Debye formulas for the solid base and water, it determines the dielectric permittivity of the mixture of these components as a function of frequency, temperature and moisture content). The calculation according to this scheme allows to take into account the reverse impact of distributions of temperature and moisture content at some point in time, on the distribution of absorbed electromagnetic energy in the same moment. Numerical experiment (drying the moist zeolite electromagnetic radiation in the microwave range), the results of which are in good agreement with available published experimental data.

Key words: A.V. Lykov's equations, Maxwell's equations, drying with electromagnetic radiation, initial boundary value problem, numerical methods, complex dielectric permittivity, the method of characteristic matrices.