УДК 517.95
ББК 22.161.6

РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С КОНЦАМИ [1]

С.А. Корольков, А.Г. Лосев

В данной работе рассматриваются решения линейных эллиптических уравнений (называемые L-гармоническими функциями) на произвольных некомпактных римановых многообразиях с конечным числом концов. Найдены условия существования и единственности решений некоторых краевых задач, получены точные оценки размерностей различных пространств таких решений на многообразиях с концами.

Ключевые слова: *краевые задачи, теоремы типа Лиувилля, римановы многообразия, L-гармонические функции, L-массивные множества.*

Введение

Данная работа посвящена изучению поведения линейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях. Одним из истоков указанной проблематики традиционно указывается классификационная теория некомпактных римановых поверхностей. Известная проблема идентификации конформного типа односвязной некомпактной римановой поверхности может быть переформулирована следующим образом: существует ли на данной поверхности нетривиальная положительная супергармоническая функция? Многие проблемы, относящиеся к данному направлению, можно сформулировать в виде теорем типа Лиувилля, утверждающих тривиальность пространств решений некоторых эллиптических уравнений на римановом многообразии.

Классическая формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая в $\mathbb{R}^n$ функция является тождественной постоянной. В работах ряда авторов приводятся условия выполнения теоремы Лиувилля на некомпактных римановых многообразиях в терминах роста объема, выполнения изопериметрических неравенств, условий на кривизну и т. д. В последнее время осуществляется следующий подход к теоремам типа Лиувилля. Пусть на римановом многообразии M задан класс функций A и эллиптический оператор L. Говорят, что на M выполнено обобщенное (A, L)-лиувиллево свойство, если пространство решений уравнения $Lu = 0$, принадлежащих функциональному классу A, имеет конечную размерность. Оценкам размерностей различных пространств решений эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях посвящен ряд работ (см, напр., [1–5; 11–13]). Общее представление о современных исследованиях в этом вопросе можно получить, например, из работ A. Grigor'yan [11], А.Г. Лосева [9].

Заметим, что множество некомпактных римановых многообразий, на которых существуют нетривиальные ограниченные гармонические функции, достаточно обширно. Более того, обнаружены классы многообразий, на которых разрешима задача Дирихле о восстановлении гармонической функции по непрерывным граничным данным для случая идеальной границы. Важно отметить, что сама постановка задачи Дирихле на произвольном некомпактном римановом многообразии может оказаться проблематичной. Однако в некоторых случаях геометрическая компактификация многообразия позволяет сделать это (см., например, [3; 4; 7]). С другой стороны, в [10] (см. также: [14]) предложен достаточно новый подход к постановке краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений на произвольных некомпактных римановых многообразиях, который, в частности, реализуется и в данной работе.

Ряд исследований был посвящен изучению гармонических функций на многообразиях с концами. Пусть M — полное некомпактное риманово многообразие. Открытое множество $D \subset M$ называют концом, если оно является связным, неограниченным и его граница ∂D – компакт. Говорят, что M является многообразием с концами, если оно представимо в виде объединения компактного множества B и конечного числа непересекающихся концов. Различают концы параболического и гиперболического типа. Конец называется концом *параболического типа*, если его емкостный потенциал тождественно равен константе, и *гиперболического типа* в противном случае (см., например, [11]).

В работе Li P., Tam L.F. [13] было доказано, что если многообразие M имеет m концов, то размерность пространства гармонических на M функций, ограниченных с одной стороны на каждом конце многообразия, не меньше, чем m. Там же было показано, что если M имеет гиперболический тип, то размерность конуса неотрицательных гармонических на M функций также не меньше, чем m. Отметим, что на многообразиях параболического типа выполнена теорема Лиувилля для неотрицательных и для ограниченных гармонических функций.

Данная работа посвящена изучению поведения L-гармонических функций, то есть решений уравнения

$$Lu(x) \equiv \Delta u(x) + (b(x), \nabla u(x)) - c(x)u = 0$$

на многообразиях с концами. Здесь $b(x)$ — гладкое векторное поле, а $c(x)$ — гладкая неотрицательная на M функция. В частности, в работе найдены оценки размерностей различных пространств решений данного уравнения на рассматриваемых многообразиях. Всюду далее мы предполагаем, что $c(x) \not\equiv 0$ на каждом конце многообразия M.

Предположим, что на конце D существует L-гармоническая функция u_D такая, что $0 \le u_D \le 1$, $u_D = 0$ на ∂D и $\sup_D u_D = 1$. Будем говорить в этом случае, что D является L-массивным, а самую большую из таких функций u_D будем называть L-гармонической мерой конца D. Способ построения L-гармонической меры конца будет приведен ниже. Понятие массивности множества введено в работах А.А. Григорьяна (см., например, [1; 11]). Конец, не являющийся L-массивным, будем называть L-субтильным. Отметим, что в некоторых работах (см., например, [12]) массивные концы называют концами гиперболического типа, а концы, не являющиеся массивными, соответственно, концами параболического типа.

В дальнейшем нам потребуется определение L-регулярного конца многообразия. Говорят, что конец D является L-регулярным, если на нем выполнено неравенство Харнака для всякой неотрицательной L-гармонической функции, то есть существует такая константа $C > 0$, что для всех достаточно больших $r > 0$ и для всякой неотрицательной L-гармонической на $(B_{2r}(o) \setminus B_{r/2}(o)) \cap D$ функции f выполнено

$$\sup_{\partial B_r(o)\cap D} f \leq C \inf_{\partial B_r(o)\cap D} f.$$

Здесь $B_r(o)$ — геодезический шар радиуса r с центром в точке $o \in B$.

Множество всех римановых многообразий, представимых в виде $M = B \cup D_1 \cup \ldots \cup \cup D_{s+l}$, где $D_1, \ldots, D_l$ — L-массивные концы, а $D_{l+1}, \ldots, D_{l+s}$ — L-субтильные концы, будем обозначать через $E_L(l, s)$. При этом будем считать, что компакт B выбран таким образом, что многообразие M имеет ровно $l + s$ концов относительно любого другого компакта $B' \supset B$.

Обозначим $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание конца D, то есть последовательность предкомпактных открытых подмножеств конца D с гладкими границами ∂B_k таких, что $\partial D \subset \partial B_k$, $\overline{B_k} \setminus \partial D \subset B_{k+1}$ для всех k и $D \setminus \partial D = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Пусть f_1 и f_2 — непрерывные на D функции. Будем говорить, что функции f_1 и f_2 *эквивалентны на* D, и обозначать $f_1 \sim f_2$, если для некоторого гладкого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ конца D выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{D\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0.$$

Отношение «$\sim$» является отношением эквивалентности, не зависит от выбора исчерпания конца D и, таким образом, разбивает множество всех непрерывных на D функций на классы эквивалентности (см., например, [10]).

Пусть $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность решений следующих задач Дирихле

$$\begin{cases} Lv_k = 0 & \text{на} \quad B_k, \\ v_k = 1, & \text{на} \quad \partial D, \\ v_k = 0 & \text{на} \quad \partial B_k \setminus \partial D. \end{cases}$$

Последовательность функций $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ в силу принципа максимума возрастает и сходится к предельной функции $v_D = \lim\limits_{k\to\infty} v_k$, которая является L-гармонической на D и $0 \leq v_D \leq 1$. Функцию v_D будем называть L-потенциалом конца D.

Замечание 1. Если D — L-массивный конец, то $\inf\limits_{D} v_D = 0$.

Конец D называют L-строгим (см. [14]), если $v_D \sim 0$.

Будем говорить, что непрерывные функции f_1 и f_2 *слабо эквивалентны на* D, и обозначать $f_1 \simeq f_2$, если найдется такая константа C, что

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leq Cv_D + |A(x)|, \qquad x \in D,$$

для некоторой непрерывной функции $A(x)$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{D\setminus B_k} |A(x)| = 0$. Отношение «$\simeq$» также является отношением эквивалентности и не зависит от выбора исчерпания конца D (см. [2]).

Замечание 2. Если D — L-строгий L-массивный конец, то из того, что $f_1 \simeq f$ следует, что $f_1 \sim f$.

Будем говорить, что функция f является *L-допустимой на конце D*, если на D существует L-гармоническая функция u такая, что $u \sim f$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $M \in E_L(l,s)$. Тогда для любого набора L-допустимых на D_i $(i = 1,\dots,l+s)$, непрерывных функций f_i существует функция $u \in \mathbb{H}_L(M)$ такая, что $u \simeq f_i$, $i = 1,\dots,l+s$.*

Теорема 2. *Пусть $M \in E_L(l,s)$. Если все L-массивные концы являются L-строгими, то для любого набора L-допустимых на D_i $(j = 1,\dots,l+s)$ непрерывных функций f_i, существует единственная функция $u \in \mathbb{H}_L(M)$ такая, что $u \sim f_i$ на D_i, $i = 1,\dots,l$ и $u \simeq f_j$ на D_j, $j = l+1,\dots,l+s$.*

Достаточно интересные примеры выполнения подобных утверждений для решений стационарного уравнения Шредингера на многообразиях с квазимодельными концами, причем с подробным описанием допустимых функций, приведены в работах [4; 6–8].

Следствием приведенных выше утверждений являются достаточно интересные оценки размерностей пространств L-гармонических функций.

Обозначим через $\mathbb{H}_L(M)$ пространство L-гармонических на M функций, а через $\mathbb{BH}_L(M)$, $\mathbb{H}'_L(M)$ и $\mathbb{H}^+_L(M)$ пространство ограниченных, пространство ограниченных с одной стороны на каждом конце многообразия и конус неотрицательных L-гармонических на M функций, соответственно.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $M \in E_L(l,s)$. Тогда*

$$\dim \mathbb{BH}_L(M) \geq l, \quad \dim \mathbb{H}^+_L(M) \geq l+s, \quad \dim \mathbb{H}'_L(M) \geq l+s.$$

В случае, когда все концы многообразия являются L-регулярными, удается получить точные оценки размерностей. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $M \in E_L(l,s)$. Если все концы многообразия M L-регулярны, то*

$$\dim \mathbb{H}^+_L(M) = \dim \mathbb{H}'_L(M) = l+s \text{ и } \dim \mathbb{BH}_L(M) = l, \text{ если } l \geq 1.$$

Замечание. Во всех формулировках допускается случай, когда M не имеет L-массивных концов. В случае, когда M имеет хотя бы один L-массивный конец и L — оператор Шредингера, оценки $\dim \mathbb{BH}_L(M)$ и $\dim \mathbb{H}^+_L(M)$ были получены в [12].

1. L-гармонические функции на концах

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание конца D и $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность решений следующих задач Дирихле

$$\begin{cases} Lu_k = 0 & \text{на} \quad B_k, \\ u_k = 0, & \text{на} \quad \partial D, \\ u_k = 1 & \text{на} \quad \partial B_k \setminus \partial D. \end{cases}$$

Из принципа максимума сразу следует, что существует предельная функция $u_D = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, которая является L-гармонической мерой конца D.

Обозначим через $D(k) = \partial B_k \setminus \partial D$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любых констант a_1, a_2 и для любой L-допустимой на конце D непрерывной функции f существуют L-гармонические на D функции $\underline{u}$ и $\overline{u}$ такие, что*

$$\underline{u}|_{\partial D} \leq a_1,\, \overline{u}|_{\partial D} \geq a_2, \quad \underline{u}|_D \simeq f, \quad \overline{u}|_D \simeq f.$$

Доказательство. Так как f – L-допустимая функция, на D существует L-гармоническая функция $u \sim f$.

Очевидно, что искомыми являются следующие функции

$$\underline{u} = \left(a_1 - \sup_{\partial D} u\right) v_D + u,$$

$$\overline{u} = \left(a_2 - \inf_{\partial D} u\right) v_D + u.$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Следующие условия эквивалентны.*

(A) Существует L-гармоническая на D функция $\underline{u}$ такая, что

$$\underline{u}|_{\partial D} < 1, \quad \underline{u}|_D \sim v_D.$$

(B) Существует L-гармоническая на D функция $\overline{u}$ такая, что

$$\overline{u}|_{\partial D} > 1, \quad \overline{u}|_D \sim v_D.$$

(C) Для любой непрерывной на ∂D функции Φ и для любой непрерывной L-допустимой на D функции f существует L-гармоническая на D функция h такая, что

$$h|_{\partial D} = \Phi, \quad h \sim f.$$

(D) Конец D является L-строгим.

Доказательство. Доказательство импликации $(D) \to (C)$ дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения для решений стационарного уравнения Шредингера, приведенное в [14] (см. также [10]). Импликации $(C) \to (A)$ и $(C) \to (B)$ очевидны в силу того, что v_D является L-допустимой на D.

Покажем, что $(B) \to (D)$. Предположим противное, то есть что $v_D \not\sim 0$ на D. Из утверждения (B) следует, что на D существует L-гармоническая функция $\overline{u}$ такая, что $\overline{u}|_{\partial D} > 1$ и $\overline{u} \sim v_D$ на D.

Рассмотрим функцию $w = \frac{\overline{u}}{\min\limits_{\partial D} \overline{u}} < \overline{u}$. Отметим, что $w|_{\partial D} \geq 1$. Из принципа максимума и того, что $\overline{u} \sim v_D$, $v_D \geq 0$ на D следует, что $w \geq 0$ на D. Из того, что $\overline{u} \sim v_D \not\sim 0$ и $w < \overline{u}$ на D следует, что найдется точка $x^* \in D$ такая, что

$$w(x^*) < v_D(x^*). \tag{1}$$

Действительно, так как $\overline{u} \sim v_D$ на D, то

$$\frac{\overline{u}}{\min\limits_{\partial D} \overline{u}} \sim \frac{v_D}{\min\limits_{\partial D} \overline{u}}$$

на D, или

$$w \sim \frac{v_D}{\min\limits_{\partial D} \overline{u}}.$$

Из последнего следует, что

$$w - v_D \sim v_D \left(\frac{1}{\min\limits_{\partial D} \overline{u}} - 1 \right)$$

на D. Из того, что $v_D \not\sim 0$ и $\min\limits_{\partial D} \overline{u} > 1$ вытекает существование такой точки $x^* \in D$, что

$$w(x^*) - v_D(x^*) < 0,$$

откуда имеем (1).

Обозначим через v_k решение следующей задачи Дирихле в B_k

$$Lv_k = 0, \quad v_k|_{D(k)} = 0, \quad v_k|_{\partial D} = 1.$$

Тогда по определению L-потенциала $v_k \to v_D$ при $k \to \infty$.

Заметим, что

$$w|_{\partial D} \geq v_k|_{\partial D} = 1, \quad w|_{D(k)} \geq v_k|_{D(k)} = 0.$$

Из последнего получаем, что при всех k

$$v_k \leq w$$

на $D \cap B_k$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем, что $w \geq v_D$ на D. Пришли к противоречию с (1).

Таким образом, предположение о том, что $v_D \not\sim 0$ на D неверно, откуда следует, что конец D является L-строгим.

Нам осталось показать, что из утверждения (A) следует утверждение (D). Предположим противное, то есть что $v_D \not\sim 0$ на D. Из утверждения (A) следует, что на D существует L-гармоническая функция $\underline{u}$ такая, что $\underline{u}|_{\partial D} < 1$ и $\underline{u} \sim v_D$ на D.

Рассмотрим функцию

$$w \equiv \frac{v_D - \underline{u}}{1 - \max\limits_{\partial D} \underline{u}}.$$

Заметим, что $w|_{\partial D} \geq 1$, откуда в силу принципа максимума и того, что $\underline{u} \sim v_D$, $v_D \geq 0$ на D следует, что $w \geq 0$ на D.

Покажем, что существует точка $x^* \in D$ такая, что

$$w(x^*) < v_D(x^*). \tag{2}$$

Действительно, если $\max\limits_{\partial D} \underline{u} \leq 0$, то в силу того, что $\underline{u} \sim v_D \not\sim 0$ и $0 \leq v_D \leq 1$ найдется такая точка x^*, что $\underline{u}(x^*) > 0$. Тогда $w(x^*) = \frac{v_D(x^*) - \underline{u}(x^*)}{1 - \max\limits_{\partial D} \underline{u}} < v_D(x^*)$, так как $\max\limits_{\partial D} \underline{u} \leq 0$.

Пусть теперь $\max\limits_{\partial D} \underline{u} > 0$. Из условия $\underline{u} \sim v_D \not\sim 0$ и $\max\limits_{\partial D} \underline{u} < 1$ следует, что найдется такая точка $x^* \in D$, что

$$v_D(x^*) < \frac{\underline{u}(x^*)}{\max\limits_{\partial D} \underline{u}}.$$

Из последнего мы получаем, что $v_D(x^*) - \underline{u}(x^*) < v_D(x^*)(1 - \max\limits_{\partial D} \underline{u})$, откуда следует (2).

Пусть v_k — решение следующей задачи Дирихле в B_k

$$Lv_k = 0, \quad v_k|_{D(k)} = 0, \quad v_k|_{\partial D} = 1.$$

Тогда по определению L-потенциала $v_k \to v_D$ при $k \to \infty$.

Заметим, что

$$w|_{\partial D} \geq v_k|_{\partial D} = 1, \quad w|_{D(k)} \geq v_k|_{D(k)} = 0.$$

Из последнего получаем, что при всех k

$$v_k \leq w$$

на $D \cap B_k$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ получаем, что $w \geq v_D$ на D. Пришли к противоречию с (2).

Таким образом, предположение о том, что $v_D \not\sim 0$ на D неверно. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *На всяком L-субтильном конце D существует неотрицательная неограниченная L-гармоническая функция h_D такая, что $h_D = 0$ на ∂D.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ неотрицательных непрерывный L-гармонических на $\{B_k\}$ функций таких, что

$$\begin{cases} u_k = 0 & \text{на} \quad \partial D, \\ u_k = 1 & \text{на} \quad D(k). \end{cases}$$

В силу принципа максимума последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно убывает, ограничена, а значит, существует предельная функция, которая является тождественным нулем (это следует из того, что конец D является L-субтильным).

Положим $C_k = \max\limits_{D(1)} u_k$. Тогда $C_k \to 0$ при $k \to \infty$. Определим новую последовательность неотрицательных L-гармонических на B_k функций $v_k = \frac{u_k}{C_k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Очевидно, что каждая функция v_k удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{cases} v_k = 0 & \text{на} \quad \partial D, \\ v_k = \frac{1}{C_k} & \text{на} \quad D(k). \end{cases}$$

Пусть E — компактное подмножество D, содержащее $D(1)$. В силу локального неравенства Харнака существует такая константа $C_E < \infty$, что

$$\sup_E v_k \leq C_E \inf_E v_k \leq C_E$$

для достаточно больших $k > 1$. Из последнего следует локальная равномерная ограниченность последовательности функций $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ на D. Тогда существует подпоследовательность $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящая равномерно к предельной функции h_D на всяком компактном подмножестве D. Из условия $\max\limits_{D(1)} v_k = 1$ (для достаточно больших k) следует, что предельная функция h_D не является тождественным нулем. Учитывая то, что конец D является L-субтильным, получаем неограниченность h_D.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть D — L-субтильный конец, f — L-гармоническая на D функция, ограниченная сверху на D и такая, что $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{D\setminus B_k} f > 0$. Тогда*

$$\sup_{\partial D} f \geq \lim_{k\to\infty}\sup_{D\setminus B_k} f.$$

Доказательство. Предположим противное, то есть что

$$0 < \sup_{\partial D} f < \lim_{k\to\infty}\sup_{D\setminus B_k} f = m. \tag{3}$$

Так как $f \not\equiv 0$, то существует собственное открытое подмножество Ω конца D такое, что

$$\Omega = \{x \in D : f(x) > m - \varepsilon\}, \quad \partial D \subset \overline{D} \setminus \overline{\Omega}$$

для достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Положим

$$v(x) = \max\left\{\frac{f(x) - m + \varepsilon}{\varepsilon}, 0\right\}.$$

Тогда, учитывая, что $m > 0$ по условию леммы, v — неотрицательная ограниченная L-субгармоническая функция на D, причем $v \equiv 0$ на $\overline{D} \setminus \Omega$. Из последнего получаем, что $v = 0$ на ∂D. Заметим, что $\sup\limits_{D} v = 1$. Действительно, в силу принципа максимума и предположения (3), имеем $\sup\limits_{D} f = \lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{D\setminus B_k} f = m$, откуда следует требуемое.

Пусть u_k — решение следующей задачи Дирихле в B_k

$$\begin{cases} Lu_k = 0 & \text{на} \quad B_k, \\ u_k = 0 & \text{на} \quad \partial D, \\ u_k = 1 & \text{на} \quad D(k). \end{cases}$$

В силу определения L-гармонической меры u_D, $u_D = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$. Из L-субгармоничности функции v и того, что $0 \leq v \leq 1$ следует, что $u_k \geq v$ на B_k. Из последнего, переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем, что $u_D \geq v$ на D. Учитывая равенство $\sup\limits_{D} v = 1$, получаем, что $u_D \not\equiv 0$. Пришли к противоречию с тем, что конец D является L-субтильным.

Следствие 1. *Если u — ограниченная L-гармоническая на L-субтильном конце D функция, то $u \simeq 0$.*

Доказательство. В случае $\inf\limits_{D} v_D > 0$ утверждение следствия 1 тривиально.

Рассмотрим случай $\inf\limits_{D} v_D = 0$. В силу принципа максимума выполнено

$$\lim_{k\to\infty}\inf_{D\setminus B_k} v_D = 0.$$

Предположим противное, то есть что $u \not\simeq 0$. Из последнего следует, что найдется такая последовательность $x_k \in D(k)$, что

$$\lim_{k\to\infty} v_D(x_k) = 0 \text{ и } \lim_{k\to\infty} u(x_k) \neq 0.$$

Для определенности будем считать, что $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} u(x_k) = d > 0$ (в противном случае рассмотрим функцию $-u$).

Положим
$$w(x) = u(x) - \max_{\partial D} u(x) \cdot v_D(x).$$

Тогда
$$\overline{\lim_{k\to\infty}} w(x_k) = d > 0, \quad \max_{\partial D} w(x) = 0,$$

что противоречит лемме 4.

Следствие 1 доказано.

Всюду далее мы будем использовать обозначение $\lim\limits_{D} f = +\infty$, если $\lim\limits_{k\to\infty} \inf\limits_{D\setminus B_k} f = +\infty$; аналогично $\lim\limits_{D} f = -\infty$, если $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{D\setminus B_k} f = -\infty$ и $\lim\limits_{D} f = \pm\infty$, если либо $\lim\limits_{D} f = +\infty$, либо $\lim\limits_{D} f = -\infty$.

Лемма 5. *Пусть D — L-регулярный L-субтильный конец. Если $u_1 \in \mathbb{H}'_L(D)$, $u_2 \in \mathbb{H}'_L(D)$ и обе функции неограниченны на D, то существует такая константа C^*, что $u_1 - C^*u_2 \in \mathbb{BH}_L(D)$.*

Доказательство леммы 5 проведем в несколько этапов. **На I этапе** мы докажем, что для любых неограниченных функций $h_D \in \mathbb{H}^+_L(D)$ и $u \in \mathbb{H}^+_L(D)$ таких, что $h_D|_{\partial D} \equiv 0$, $\min\limits_{\partial D} u > 0$, найдется такая константа C^*, что $(C^*u - h_D) \in \mathbb{BH}_L(D)$.

Для этого, в свою очередь, мы

(a) сначала покажем существование такой константы C, что $\frac{h_D}{u} < C$ на D;

(b) далее, выбирая $C^* = \inf\{C : Cu > h_D \text{ на } D\}$, мы докажем, что $(C^*u - h_D) \in \in \mathbb{BH}_L(D)$.

На II этапе доказательство леммы для функций $u_1 \in \mathbb{H}'_L(D)$, $u_2 \in \mathbb{H}'_L(D)$ мы сведем к уже доказанному утверждению леммы для функций h_D и u.

Доказательство. **I этап.** Пусть $h_D \in \mathbb{H}^+_L(D)$ — неограниченная функция такая, что $h_D|_{\partial D} \equiv 0$. Существование такой функции показано в лемме 3.

Докажем, что для любой неограниченной функции $u \in \mathbb{H}^+_L(D)$ такой, что $\min\limits_{\partial D} u > 0$ найдется такая константа C^*, что $(C^*u - h_D) \in \mathbb{BH}_L(D)$.

Отметим, что $\lim\limits_{D} u = +\infty$. Действительно, в силу неравенства Харнака имеем

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{D(k)} u \geq \frac{1}{C} \lim_{k\to\infty} \sup_{D(k)} u.$$

Из последнего, учитывая неограниченность u на D и принцип максимума, заключаем, что $\lim\limits_{D} u = +\infty$. Аналогично, $\lim\limits_{D} h_D = +\infty$.

Заметим, что $\inf\limits_{D} u > 0$. Действительно, в силу локального неравенства Харнака, для любого компактного подмножества $E \subset D$ найдется такая константа C_E, что $\max\limits_{E} u \leq C_E \min\limits_{E} u$. Учитывая неотрицательность функции u на D, получаем, что $u > 0$ на любом компактном подмножестве $E \subset D$. Из того, что $\min\limits_{\partial D} u > 0$ и $\lim\limits_{D} u = +\infty$ заключаем, что $\inf\limits_{D} u > 0$.

1. Покажем, что найдется такая константа C, что $\frac{h_D}{u} < C$ на D. Предположим противное, то есть $\sup\limits_D \frac{h_D}{u} = +\infty$. Учитывая, что $\inf\limits_D u > 0$, получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{D(k)} \frac{h_D}{u} =$ $= +\infty$. Применяя неравенство Харнака, получаем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\inf\limits_{D(k)} h_D}{\sup\limits_{D(k)} u} \geq \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{P}\sup\limits_{D(k)} h_D}{P \inf\limits_{D(k)} u} \geq \frac{1}{P^2} \lim_{k\to\infty} \sup_{D(k)} \frac{h_D}{u} = +\infty,$$

где P — константа из неравенства Харнака. Таким образом, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\inf\limits_{D(k)} h_D}{\sup\limits_{D(k)} u} = +\infty$. Из последнего следует, что для любой константы C справедливо неравенство $h_D \geq Cu$ на $D(k)$ для всех достаточно больших k. В силу принципа максимума заключаем, что для любой константы $C > 0$

$$h_D - Cu \geq 0 \text{ на } D \setminus B_k$$

для достаточно больших k. Отсюда заключаем, что

$$\lim_D (h_D - Cu) = +\infty \text{ для любой константы } C > 0.$$

Действительно, если при некотором $\tilde{C}$ функция $h_D - \tilde{C}u$ окажется ограниченной на D, то, положив $C = \tilde{C} + 1$, в силу уже доказанного, $h_D - Cu \geq 0$ на $D \setminus B_k$ для достаточно больших k, откуда $h_D - \tilde{C}u \geq u$ на $D \setminus B_k$. Учитывая, что $\lim\limits_D u = +\infty$ приходим к противоречию с ограниченностью функции $h_D - \tilde{C}u$ на $D \setminus B_k$.

Положим $\tilde{u} \equiv u - v_D \max\limits_{\partial D} u$. Очевидно, что $\tilde{u} \leq 0$ на ∂D в силу того, что $v_D|_{\partial D} \equiv$ $\equiv 1$. Кроме того, в силу ограниченности v_D и того, что $\lim\limits_D u = +\infty$ заключаем, что $\lim\limits_D \tilde{u} = +\infty$. Тогда из $\lim\limits_D h_D = +\infty$ следует существование такого k, что $\tilde{u}|_{D(k)} > 0$ и $h_D|_{D(k)} > 0$. Выберем константу $M > 0$ таким образом, чтобы $M\tilde{u} > h_D > 0$ на $D(k)$, откуда

$$h_D - M\tilde{u} < 0 \text{ на } D(k). \tag{4}$$

Положим $f \equiv h_D - M\tilde{u}$. Из того, что функция h_D неотрицательна на D и $\tilde{u}|_{\partial D} \leq 0$ следует, что $f \geq 0$ на ∂D. Кроме того, в силу уже доказанного, $\lim\limits_D f = \lim\limits_D (h_D - M\tilde{u}) =$ $= +\infty$. В силу принципа максимума заключаем, что $f \geq 0$ на D, что противоречит (4). Таким образом, предположение о том, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{D(k)} \frac{h_D}{u} = +\infty$ во всех случаях приводит к противоречию, откуда

$$\frac{h_D}{u} < C \text{ на } D$$

для некоторой константы $C > 0$.

2. Положим

$$C^* = \inf\{C : Cu > h_D \text{ на } D\}.$$

Отметим, что $C^*u - h_D \geq 0$ на D и $C^* > 0$ в силу того, что $h_D \geq 0$, $h_D \not\equiv 0$ на D. Покажем, что $(C^*u - h_D) \in \mathbb{BH}_L(D)$. Предположим противное. Заметим, что $\min\limits_{\partial D}(C^*u - h_D) > 0$

в силу того, что $h_D|_{\partial D} = 0$, $\min\limits_{\partial D} u > 0$ и $C^* > 0$. Тогда, как показано выше, найдется такая константа $b > 0$, что

$$\frac{h_D}{C^* u - h_D} < b$$

на D. Из последнего получаем, что

$$\frac{b}{b+1} C^* u > h_D \text{ на } D,$$

что, в свою очередь, противоречит определению константы C^*. Таким образом, $(C^* u - - h_D) \in \mathbb{BH}_L(D)$.

II этап. Пусть теперь $u_1 \in \mathbb{H}'_L(D)$, $u_2 \in \mathbb{H}'_L(D)$ и обе функции неограничены на D. Не ограничивая общности, будем считать, что обе функции ограничены снизу на D. Рассмотрим функции $f_1 \equiv u_1 - (\min\limits_{\partial D} u_1 - 1) v_D$, $f_2 \equiv u_2 - (\min\limits_{\partial D} u_2 - 1) v_D$. Очевидно, что $\min\limits_{\partial D} f_1 = 1$, $\min\limits_{\partial D} f_2 = 1$ в силу того, что $v_D|_{\partial D} \equiv 1$. В силу леммы 4 и принципа максимума функции f_1 и f_2 неотрицательны на D. Кроме того, f_1 и f_2 неограничены на D в силу того, что u_1, u_2 неограничены на D и $0 \le v_D \le 1$.

Как показано выше, существуют такие константы $C_1^* > 0$ и $C_2^* > 0$, что $\tilde{f}_1 \equiv \equiv (C_1^* f_1 - h_D) \in \mathbb{BH}_L(D)$ и $\tilde{f}_2 \equiv (C_2^* f_2 - h_D) \in \mathbb{BH}_L(D)$. Очевидно, что

$$\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2 \equiv (C_1^* f_1 - h_D) - (C_2^* f_2 - h_D) \in \mathbb{BH}_L(D),$$

откуда следует, что

$$(f_1 - \frac{C_2^*}{C_1^*} f_2) \in \mathbb{BH}_L(D).$$

Из последнего, учитывая определение функций f_1, f_2 и ограниченность v_D, заключаем, что

$$(u_1 - \frac{C_2^*}{C_1^*} u_2) \in \mathbb{BH}_L(D).$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Всякий L-регулярный и L-массивный конец является L-строгим.*

Доказательство. Из неравенства Харнака, учитывая замечание 1, получаем

$$0 \le \lim_{k\to\infty} \sup_{D(k)} v_D \le C \lim_{k\to\infty} \inf_{D(k)} v_D = 0,$$

откуда, в силу принципа максимума, $v_D \sim 0$.

Замечание. Обратное, вообще говоря, неверно: из L-строгости L-массивного конца не следует его L-регулярность (примеры L-строгих L-массивных концов, не являющихся L-регулярными, см., например, в [7]).

Лемма 7. *Пусть f — L-гармоническая, ограниченная с одной стороны на L-регулярном конце D функция.*
(1) Если f не ограничена на D, то $\lim\limits_{D} f = \pm\infty$.
(2) Если D является L-массивным концом, то существует такая константа b, что $f \sim bu_D$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что f ограничена снизу на D. Пусть сначала f неотрицательна и не ограничена на D. Из неравенства Харнака следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{D(k)} f \geq \frac{1}{C} \lim_{k\to\infty} \sup_{D(k)} f,$$

откуда $\lim\limits_{D} f = +\infty$ в силу принципа максимума.

Пусть теперь f — произвольная неограниченная, но ограниченная снизу L-гармоническая на D функция. Положим $m = \inf\limits_{\partial D} f$. Тогда функция $f^* \equiv f - mv_D$ не ограничена и неотрицательна на D. Как было показано выше, $\lim\limits_{D} f^* = +\infty$, откуда $\lim\limits_{D} f = +\infty$. Таким образом, первая часть леммы доказана.

Докажем, что если D является L-массивным, то f ограничена на D. Предположим противное. Тогда $\lim\limits_{D} f = +\infty$, как было показано выше. Отсюда, учитывая, что $u_D \not\equiv 0$, следует существование такого $\tilde{x} \notin \partial D$, что $f(\tilde{x}) > 0$ и $u_D(\tilde{x}) > 0$. Пусть $C > 0$ — такая константа, что

$$\frac{f(\tilde{x})}{C} < u_D(\tilde{x}). \tag{5}$$

Рассмотрим L-гармоническую функцию

$$w = \frac{f}{C} - u_D.$$

Заметим, что $\lim\limits_{D} w = +\infty$, так как $\lim\limits_{D} f = +\infty$ и $0 \leq u_D \leq 1$. Кроме того, $w|_{\partial D} \geq 0$, так как f неотрицательна на D и $u_D|_{\partial D} \equiv 0$. С другой стороны, $w(\tilde{x}) < 0$ в силу (5). Пришли к противоречию с принципом максимума. Таким образом, если D является L-массивным, то f ограничена на D.

Рассмотрим случай, когда f — ограниченная неотрицательная L-гармоническая функция на L-массивном конце D. Положим

$$b = \lim_{k\to\infty} \sup_{D(k)} f.$$

Если $b = 0$, тогда $f \sim 0$ в силу принципа максимума, откуда следует утверждение леммы 7. Предположим, что $b > 0$.

Из лемм 2 и 6 следует существование ограниченной L-гармонической на D функции u такой, что $u = 0$ на ∂D и $u \sim \frac{f}{b}$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{D(k)} u = 1$.

Докажем, что $u \equiv u_D$. Пусть $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность следующих решений задач Дирихле в B_k

$$\begin{cases} Lu_k = 0 & \text{на} \quad B_k, \\ u_k = 0 & \text{на} \quad \partial D, \\ u_k = 1 & \text{на} \quad D(k). \end{cases}$$

Очевидно, что $u_D = \lim_{k\to\infty} u_k$ в силу определения L-гармонической меры u_D. Кроме того, $0 \le u \le u_k$ на B_k в силу принципа максимума. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получаем $0 \le u \le u_D \le 1$ на D, откуда $0 \le u_D - u \le 1 - u$. Из последнего получаем, что

$$0 \le \inf_{D(k)} (u_D - u) \le 1 - \sup_{D(k)} u.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$0 \le \lim_{k\to\infty} \inf_{D(k)} (u_D - u) \le 1 - \lim_{k\to\infty} \sup_{D(k)} u.$$

В силу того что $\lim_{k\to\infty} \sup_{D(k)} u = 1$, заключаем, что $\lim_{k\to\infty} \inf_{D(k)} (u_D - u) = 0$. Заметим, что $(u_D - u)$ — неотрицательная L-гармоническая на D функция. Применяя неравенство Харнака к функции $(u_D - u)$, получаем, что

$$0 \le \lim_{k\to\infty} \sup_{D(k)} (u_D - u) \le C \lim_{k\to\infty} \inf_{D(k)} (u_D - u) = 0,$$

откуда $u \equiv u_D$ в силу принципа максимума и того, что $u|_{\partial D} = u_D|_{\partial D} = 0$.

Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{D\setminus B_k} |f - bu_D| = b \lim_{k\to\infty} \sup_{D\setminus B_k} |\frac{f}{b} - u| = 0.$$

Из последнего следует, что $f \sim bu_D$. Мы доказали вторую часть леммы 7 для ограниченной неотрицательной L-гармонической функции f.

Пусть теперь f — произвольная ограниченная L-гармоническая функция на L-массивном конце D. Покажем, что существуют такие константы m_1 и m_2, что функция $\tilde{f} = f + m_1 v_D + m_2 u_D$ является неотрицательной ограниченной L-гармонической на D. Действительно, пусть f — ограничена на D и $\inf_D f < 0$. Положим $m_1 = -\inf_{\partial D} f$, $m_2 = -\lim_{k\to\infty} \inf_{D(k)} f$. Тогда $\tilde{f} \ge 0$ на ∂D в силу того, что $v_D|_{\partial D} = 1$, а также $u_D|_{\partial D} = 0$ и $\lim_{k\to\infty} \inf_{D(k)} \tilde{f} \ge 0$ в силу замечания 1 и того, что $v_D \sim 0$ на D (в силу леммы 6). Учитывая принцип максимума, заключаем, что $\tilde{f} \ge 0$ на D.

Как было показано выше, найдется такая константа b, что $\tilde{f} \sim bu_D$, откуда $f + m_1 v_D + m_2 u_D \sim bu_D$. Из леммы 6 следует, что $v_D \sim 0$, откуда $f \sim (b - m_2)u_D$.

Лемма 7 доказана.

2. *L*-гармонические функции на многообразии *M*

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание M, то есть последовательность предкомпактных открытых подмножеств многообразия M с гладкими границами ∂B_k такая, что $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$ для всех k и $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = M$.

Лемма 8. *Пусть D_i — конец многообразия M, f_i — непрерывная L-допустимая на D_i функция. Тогда существует такая L-гармоническая на M функция $f^*_{D_i}$, что*

(i) $f^*_{D_i} \simeq f_i$ на D_i;

(ii) $f^*_{D_i} \simeq 0$ на D_j, $j = 1, \dots s + l$, $j \neq i$.

Доказательство. Так как f_i — L-допустима на D_i, то существует такая L-гармоническая на D_i функция u_i, что $u_i \sim f_i$ на D_i. Продолжим по непрерывности функцию u_i нулем всюду на $M \setminus (B \cup D_i)$ (причем так, чтобы $|u_i| \leq \max\limits_{D_i(0)} u_i$ на B).

Рассмотрим последовательность функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решением задачи

$$\begin{cases} L\varphi_k = 0 \quad \text{на } B_k, \\ \varphi_k|_{\partial B_k} = u_i|_{\partial B_k}, \end{cases}$$

где $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание M.

Докажем сначала, что последовательность φ_k равномерно ограничена на $D_i(0)$. Предположим противное. Тогда найдется такая подпоследовательность $\{k_n\}$, что $a_{k_n} = \max\limits_{D_i(0)} |\varphi_{k_n}| \to \infty$ при $n \to \infty$. Полагаем $k_n = k$ и $\Phi_k = \varphi_k / a_k$ на B_k. Тогда

$$\begin{cases} \Phi_k = u_i/a_k & \text{на} \quad \partial B_k \cap D_i, \\ \Phi_k = 0 & \text{на} \quad \partial B_k \setminus D_i, \\ \max\limits_{D_i(0)} |\Phi_k| = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Применяя принцип максимума для функции $\Phi_k - \frac{u_i}{a_k}$ сначала на $B_k \cap D_i$, а затем на $B_k \setminus D_i$, получаем, что

$$-1 - \frac{\max\limits_{D_i(0)} |u_i|}{a_k} + \frac{u_i}{a_k} \leq \Phi_k \leq 1 + \frac{\max\limits_{D_i(0)} |u_i|}{a_k} + \frac{u_i}{a_k} \text{ на } B_k. \tag{7}$$

Действительно, так как $\max\limits_{D_i(0)} |\Phi_k| = 1$, то

$$-1 \leq \Phi_k \leq 1 \text{ на } D_i(0).$$

Из последнего следует, что

$$-1 - \frac{\max\limits_{D_i(0)} |u_i|}{a_k} \leq \Phi_k - \frac{u_i}{a_k} \leq 1 + \frac{\max\limits_{D_i(0)} |u_i|}{a_k} \text{ на } D_i(0).$$

Отсюда, учитывая, что

$$\Phi_k - \frac{u_i}{a_k} = \frac{\varphi_k}{a_k} - \frac{u_i}{a_k} = \frac{u_i}{a_k} - \frac{u_i}{a_k} = 0 \text{ на } \partial B_k \cap D_i,$$

заключаем, что

$$-1 - \frac{\max\limits_{D_i(0)} |u_i|}{a_k} \leq \Phi_k - \frac{u_i}{a_k} \leq 1 + \frac{\max\limits_{D_i(0)} |u_i|}{a_k} \text{ на } B_k \cap D_i. \tag{8}$$

С другой стороны, из того, что $\Phi_k = 0$ на $\partial B_k \setminus D_i$ и $\max\limits_{D_i(0)} |\Phi_k| = 1$, в силу принципа максимума, получаем, что
$$-1 \leq \Phi_k \leq 1 \text{ на } B_k \setminus D_i. \tag{9}$$

Объединяя оценки (8) и (9), получаем (7).

Из (7) следует, что $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ локально равномерно ограничена на M. Отсюда следует существование подпоследовательности последовательности $\{\Phi_k\}$, сходящейся равномерно к некоторой предельной функции Φ на любом компактном подмножестве многообразия M, причем $L\Phi = 0$ на M и $-1 \leq \Phi \leq 1$ на M. Заметим также, что выбирая подходящим образом подпоследовательность последовательности $\{\Phi_k\}$, можно считать, что $\max\limits_{D_i(0)} |\Phi| = 1$. Пришли к противоречию с принципом максимума.

Таким образом, предположение о том, что $a_{k_n} = \max\limits_{D_i(0)} \varphi_{k_n} \to \infty$ при $n \to \infty$ неверно, откуда следует, что последовательность φ_k равномерно ограничена на $D_i(0)$. Из последнего получаем локальную равномерную ограниченность последовательности $\{\varphi_k - u_i\}_{k=1}^{\infty}$ на M, откуда следует, что существует $f_{D_i}^* = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k$.

Докажем, что $f_{D_i}^* \simeq 0$ на D_j, $j = 1, \ldots s + l$, $j \neq i$.

Пусть
$$\max_{\partial D_j} \varphi_k = A_k, \quad \min_{\partial D_j} \varphi_k = a_k. \tag{10}$$

В силу того что, как было показано, существует $f_{D_i}^* = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k$, то найдется и
$$A = \lim_{k\to\infty} A_k, \quad a = \lim_{k\to\infty} a_k.$$

Из (10), того, что $u_i \equiv 0$ на $M \setminus (D_i \cup B)$ и принципа максимума следует, что
$$\min\{a_k, 0\} \cdot v_{D_j} \leq \varphi_k \leq \max\{A_k, 0\} \cdot v_{D_j}$$
на $D_j \cap B_k$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем, что
$$\min\{a, 0\} \cdot v_{D_j} \leq f_{D_i}^* \leq \max\{A, 0\} \cdot v_{D_j},$$
откуда окончательно заключаем, что $f_{D_i}^* \simeq 0$ на D_j.

Докажем теперь, что $f_{D_i}^* \simeq f_i$ на D_i. Положим
$$U_1 = \min_{\partial D_i} f_{D_i}^*, \quad U_2 = \max_{\partial D_i} f_{D_i}^*.$$

Тогда $U_1 \leq f_{D_i}^*|_{\partial D_i} \leq U_2$ и
$$U_1 - 1 \leq \varphi_k|_{\partial D_i} \leq U_2 + 1$$
при достаточно больших k.

Пусть
$$A_1 = \min\{U_1 - 1 - \max_{\partial D_i} u_i, 0\} \leq 0, \quad A_2 = \max\{U_2 + 1 - \min_{\partial D_i} u_i, 0\} \geq 0.$$

Положим
$$\underline{u}_i \equiv u_i + A_1 v_{D_i} \leq u_i, \quad \overline{u}_i \equiv u_i + A_2 v_{D_i} \geq u_i.$$

Очевидно, что
$$\underline{u}_i \leq U_1 - 1 \leq \varphi_k \leq U_1 + 1 \leq \overline{u}_i \text{ на } \partial D_i$$

при достаточно больших k. Заметим, что $\underline{u}_i \simeq f_i$, $\overline{u}_i \simeq f_i$ в силу того, что $u_i \simeq f_i$. Кроме того,

$$\underline{u}_i \leq u_i \leq \overline{u}_i$$

на D_i и при достаточно больших k на $D_i \cap B_k$ в силу принципа максимума имеем

$$\underline{u}_i \leq \varphi_k \leq \overline{u}_i.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\underline{u}_i \leq f^*_{D_i} \leq \overline{u}_i \text{ на } D_i,$$

откуда $f^*_{D_i} \simeq f_i$ на D_i в силу того, что $\underline{u}_i \simeq f_i$, $\overline{u}_i \simeq f_i$.

Лемма 8 доказана.

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем $i = 1, \ldots, l+s$. Из леммы 8 следует существование на M L-гармонической функции f^*_i такой, что $f^*_i \simeq f_i$ на D_i и $f^*_i \simeq 0$ на D_j, $j = 1, \ldots s+l$, $j \neq i$. Очевидно, функция

$$u = \sum_{i=1}^{s+l} f^*_i$$

является искомой.

Доказательство теоремы 2.

Существование искомой функции для любых непрерывных L-допустимых функций f_j, $j = 1, \ldots, s+l$, следует из теоремы 1 и замечания 2. Единственность сразу вытекает из замечания 2, леммы 4 и принципа максимума.

Доказательство теоремы 3.

Зафиксируем $i \leq l$. Из теоремы 1 следует существование на M такой функции $u_i \in \mathbb{H}_L(M)$, что $u_i \simeq u_{D_i}$ на D_i и $u_i \simeq 0$ на D_j, $j = 1, \ldots, l+s$, $j \neq i$. Отметим, что в силу принципа максимума $u_i \in \mathbb{BH}_L(M)$. Из того, что $u_{D_i} \not\simeq 0$ на D_i следует линейная независимость набора функций $\{u_i\}_{i=1}^{l}$, откуда получаем оценку

$$\dim \mathbb{BH}_L(M) \geq l.$$

Отметим, что данная оценка будет точной, так как в силу следствия 1 на L-субтильном конце всякая ограниченная L-гармоническая функция слабо эквивалентна нулю.

Из леммы 3 следует существование на каждом L-субтильном конце неограниченной неотрицательной L-гармонической функции. Тогда, учитывая теорему 1 и принцип максимума, получаем оценки

$$\dim \mathbb{H}^+_L(M) \geq s+l, \quad \dim \mathbb{H}'_L(M) \geq s+l.$$

Доказательство теоремы 4.

Отметим, что в силу леммы 6 в условиях теоремы 4 каждый L-массивный конец является L-строгим.

Пусть f — произвольная ограниченная L-гармоническая на M функция. Зафиксируем $i \leq l$. В силу теоремы 2 и принципа максимума, на M существует такая функция $u_i \in \mathbb{BH}_L(M)$, что $u_i \sim u_{D_i}$ на D_i, $u_{D_i} \sim 0$ на остальных L-массивных концах и $u_{D_i} \simeq 0$ на всех L-субтильных концах.

Из леммы 7 следует существование таких констант $(b_1, b_2, ..., b_l)$, что $f \sim b_i u_{D_i}$, $i = 1, \ldots, l$. Отметим, что функция

$$f^* \equiv f - \sum_{i=1}^{l} b_i u_i$$

такова, что $f^* \sim 0$ на $D_1, \ldots, D_l$ и f^* ограничена на M. Учитывая лемму 4 и принцип максимума, получаем, что $f^* \equiv 0$ и, соответственно,

$$f \equiv \sum_{i=1}^{l} b_i u_i,$$

откуда, в силу линейной независимости функций $\{u_i\}_{i=1}^{l}$, следует, что $\dim \mathbb{BH}_L(M) = l$.

Действуя совершенно аналогично и используя лемму 5, получаем требуемые оценки размерностей конуса $\mathbb{H}_L^+(M)$ и пространства $\mathbb{H}_L'(M)$

Теорема 4 доказана.

Примечания

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 10-01-97004-р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьян А. А. О размерности пространств гармонических функций / А. А. Григорьян // Мат. заметки. — 1990. — Т. 48, вып. 5. — С. 55–61.
2. Корольков, С. А. Гармонические функции на римановых многообразиях с концами / С. А. Корольков // Сиб. мат. журн. — 2008. — Т. 49, № 6. — С. 1319–1332.
3. Корольков, С. А. О гармонических функциях на римановых многообразиях с квазимодельными концами / С. А. Корольков, А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Вестн. СамГУ. Математика. — 2008. — № 3. — С. 175–191.
4. Корольков, С. А. Решения стационарного уравнения Шредингера на многообразиях с квазимодельными концами / С. А. Корольков, А. Г. Лосев // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. — 2009. — № 1. — С. 9–14.
5. Лосев, А. Г. Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида / А. Г. Лосев // Изв. вузов. Математика. — 1991. — № 12. — С. 15–24.
6. Лосев, А. Г. О поведении ограниченных решений уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Вестн. ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — 1998. — Вып. 3. — С. 32–43.
7. Лосев, А. Г. Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Алгебра и анализ — 2001. — Т. 13, вып. 1. — С. 84–110.
8. Лосев, А. Г. Стационарное уравнение Шредингера на римановых произведениях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Вестн. ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — 1999. — Вып. 4. — С. 37–51.

9. Лосев, А. Г. Теоремы типа Лиувилля на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев // Вестн. ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — 1998. — Вып. 3. — С. 18–31.
10. Мазепа, Е. А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43, № 3. — С. 591–599.
11. Grigor'yan, A. Analitic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. Grigor'yan // Bull. Amer. Math. Soc. — 1999. — V. 36. — P. 135–249.
12. Kim, S. W. Generalized Liouville property for Shrödinger operator on Riemannian manifolds / S. W. Kim, Y. H. Lee // Math. Z. — 2001. — V. 238, № 2. — P. 355–387.
13. Li, P. Harmonic functions and the structure of complete manifolds / P. Li, L. F. Tam // J. Diff. Geom. — 1992. — V. 35, № 2. — P. 359–383.
14. Losev, A. G. Unbounded solutions of the Stationary Shrödinger equation on Riemannian manifolds / A. G. Losev, E. A. Mazepa, V. Y. Chebanenko // Computational Methods and Function Theory — 2003. — V. 3, № 2. — P. 443–451.

SOLUTIONS OF ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS ON RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH ENDS

S.A. Korolkov, A.G. Losev

We study solutions of elliptic PDE (L-harmonic functions) on arbitrary noncompact Riemannian manifolds with finitely many ends. We establish some existence and uniqueness results, and obtain sharp dimension estimates for L-harmonic functions on such manifolds.

Key words: *Boundary problems, Liouville type theorem, Riemannian manifolds, L-harmonic functions, L-massive sets.*