DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.3.3
УДК 517.95
ББК 22.161.6

О РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ [1]

Александр Асатурович Григорьян

Доктор физико-математических наук, профессор факультета математики,
Университет Билефельда, Германия
Старший научный сотрудник,
ИПУ РАН, Российская Федерация
grigor@math.uni-bielefeld.de
Fakultat fur Mathematik, Universitat Bielefeld, Postfach 100131, Bielefeld, Germany

Александр Георгиевич Лосев

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры
математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
allosev59@gmail.com, alexander.losev@volsu.ru, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Работа выполнена в рамках тематики, посвященной доказательству теорем типа Лиувилля о тривиальности пространств решений эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях. Считающаяся в настоящее время классической формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая функция в R^n есть тождественная постоянная. В последнее время наметилась тенденция к более общему подходу к теоремам типа Лиувилля, а именно, оцениваются размерности различных пространств решений линейных уравнений эллиптического типа. В частности, в работе А.А. Григорьяна (1990) была доказана точная оценка размерностей пространств ограниченных гармонических функций на некомпактных римановых многообразиях в терминах массивных множеств.

Данная статья посвящена получению аналогичной точной оценки размерности пространства ограниченных решений стационарного уравнения Шредингера на произвольных некомпактных римановых многообразиях.

Ключевые слова: стационарное уравнение Шредингера, теоремы типа Лиувилля, некомпактные римановы многообразия, массивные множества, размерность пространства решений.

Данная работа посвящена изучению ограниченных решений стационарного уравнения Шредингера

$$Lu = \Delta u - q(x)u = 0 \qquad (1)$$

на произвольном некомпактном римановом многообразии M. Здесь $q(x)$ — непрерывная неотрицательная на M функция. Далее решения уравнения (1) будем называть q-гармоническими функциями.

В исследованиях последних десятилетий неоднократно отмечалась глубокая связь между классическими проблемами теории функций, теорией уравнений в частных производных и геометрией римановых многообразий. В частности, исторически сложившимися в данной области математики являются следующие постановки задач:

1) найти условия, гарантирующие, что всякое решение из заданного класса — тривиально (теоремы типа Лиувилля);

2) найти условия, обеспечивающие однозначную разрешимость краевых задач.

Одним из истоков указанной проблематики считается классификационная теория двумерных некомпактных римановых поверхностей. Отличительным свойством двумерных поверхностей параболического типа является выполнение для них теоремы Лиувилля, утверждающей, что всякая положительная супергармоническая функция на данной поверхности является тождественной постоянной. Данное свойство послужило основой для распространения понятий параболичности и гиперболичности на произвольные римановы многообразия.

А именно, многообразия, на которых всякая ограниченная снизу супергармоническая функция равна константе, называют многообразиями *параболического* типа.

К числу одного из первых геометрических результатов в определении типа риманова многообразия относится теорема С.Я. Ченга и С.Т. Яу [6], утверждающая, что полное многообразие является параболическим, если объем геодезического шара радиуса R растет не быстрее, чем R^2 при $R \to \infty$. В работе [3] А.А. Григорьян доказал, что параболичность типа полного риманова многообразия M эквивалентна тому, что вариационная емкость любого компакта в M равна нулю. Вообще, поиски признаков параболичности типа имеют большую историю. Общее представление о современных исследованиях в данном вопросе, а также о теоремах типа Лиувилля, можно получить, например, из работы А.А. Григорьяна [7].

Вопросы существования нетривиальных гармонических и супергармонических функций естественным образом приводят к теоремам типа Лиувилля. Считающаяся в настоящее время классической формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая функция в R^n есть тождественная постоянная.

Традиционно осуществляется следующий подход к теоремам типа Лиувилля. Пусть на римановом многообразии M задан класс функций A и эллиптический оператор L. Будем говорить, что на M выполнено (A, L)-лиувиллево свойство, если любое решение уравнения $Lu = 0$, принадлежащее функциональному классу A, является тождественной постоянной.

Заметим, что в случае, когда $q(x)$ нетривиальна, ненулевая постоянная не является решением уравнения (1), и лиувиллево свойство формулируется для него несколько иначе.

А именно, говорят, что на M выполнено лиувиллево свойство для ограниченных решений уравнения (1), если любое такое решение есть тождественный нуль.

Заметим, что в последнее время наметилась тенденция к более общему подходу к теоремам типа Лиувилля, а именно, оцениваются размерности различных пространств решений линейных уравнений эллиптического типа (см., например, [2; 4; 5; 7–10]). В частности, в работе [2] была доказана точная оценка размерностей пространств ограниченных гармонических функций на некомпактных римановых многообразиях в терминах массивных множеств.

Целью данной работы является доказательство аналогичного результата для ограниченных решений стационарного уравнения Шредингера.

Перейдем к точным формулировкам. Пусть M — гладкое связное некомпактное риманово многообразие. Непрерывную функцию u, определенную на открытом множестве $\Omega \subset M$, будем называть q-субгармонической, если для любой области $G \Subset \Omega$ и q-гармонической функции

$$v \in C(\overline{G}), \quad u|_{\partial G} = v|_{\partial G},$$

выполнено $u \leq v$ in G.

Следуя [7], открытое собственное подмножество $\Omega \subset M$ будем называть q-массивным, если на M существует нетривиальная q-субгармоническая функция такая, что $u = 0$ на $M \setminus \Omega$ и $0 \leq u \leq 1$ (в случае $q \equiv 0$ множество Ω называется массивным). Такую функцию u будем называть *внутренним потенциалом множества* Ω.

Свойства q-массивных множеств вполне аналогичны свойствам массивных множеств, подробно изложены в [2] и [1]. Сформулируем некоторые из них.

Лемма 1. *Пусть $\Omega_1 \subset \Omega_2$ — открытые собственные подмножества M. Тогда:*
1) если Ω_1 — q-массивно, то и Ω_2 — q-массивно;
2) если Ω_2 — q-массивно и $\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1$ — компакт, то и Ω_1 – q-массивно.

Доказательства почти дословно повторяют доказательства аналогичных утверждений для массивных множеств, приведенные в [2].

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $q(x)$ — нетривиальная, неотрицательная на M функция, а $m \geq 1$ — натуральное число. Следующие утверждения эквивалентны:*
1) размерность пространства ограниченных q-гармонических функций на M не менее m;
2) в M найдется m попарно не пересекающихся q-массивных подмножеств.

Замечание. В случае $q(x) \equiv 0$ данное утверждение верно только для $m \geq 2$ (см. [2]).

Доказательство. Обоснование того, что если на M существует m попарно не пересекающихся q-массивных множеств $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$, то размерность пространства ограниченных q-гармонических функций на M не менее m — почти дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения для гармонических функций (см. [2]). Однако, для лучшего понимания утверждения, приведем его.

Обозначим через $u_1, \ldots, u_m$ — внутренние потенциалы множеств $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$. Пусть $\{B_k\}$ — гладкое исчерпание многообразия M предкомпактными областями с гладкими границами (трансверсальными к ∂M, если край многообразия не пуст). Решим в B_k краевые задачи

$$\begin{cases} \Delta v_k - q(x) v_k = 0, x \in B_k \\ v_k^{(i)}|_{\partial B_k} = u_i|_{\partial B_k} \\ \frac{\partial v_k^{(i)}}{\partial n}|_{\partial M \cap B_k} = 0 \end{cases}.$$

Напомним, что $u_i = 0$ вне Ω_i. В силу q-субгармоничности u_i имеем $v_k^{(i)} \geq u_i$ в B_k. Аналогично, $v_{k+1}^{(i)} \geq u_i$ в B_{k+1}, в частности, $v_{k+1}^{(i)} \geq u_i$ на ∂B_k. Таким образом получаем, что $v_{k+1}^{(i)} \geq u_i = v_k^{(i)}$ на ∂B_k. Применяя принцип сравнения, получаем $v_{k+1}^{(i)} \geq v_k^{(i)}$ в B_k. Из условия $u_i \leq 1$ следует, что $v_k^{(i)} \leq 1$. Таким образом, последовательность q-гармонических функций $\{v_k^{(i)}\}$ не убывает и ограничена. Следовательно, существует предел

$$v^{(i)} = \lim_{k\to\infty} v_k^{(i)},$$

являющийся q-гармонической функцией в M. При этом выполнены неравенства

$$1 \geq v^{(i)} \geq u_i \geq 0.$$

Можно с самого начала считать, что $\sup u_i = 1$. Тогда справедливо равенство $\sup v^i = 1$.

Покажем, что q-гармонические функции $\{v^{(i)}\}$ являются линейно независимыми. Заметим, что из условия $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ (при $i \neq j$) следует, что $u_i + u_j \leq 1$. Таким образом, заключаем, что

$$v_k^{(i)} + v_k^{(j)} \leq 1,$$

и, соответственно,

$$0 \leq v^{(i)} + v^{(j)} \leq 1. \tag{2}$$

Выведем из условий (2) и $\sup v^{(i)} = 1$ линейную независимость $\{v^{(i)}\}$. Действительно, так как $\sup v^i = 1$, то для любого $\epsilon > 0$ можно найти такую точку $x_i \in M$, что

$$1 \geq v^{(i)}(x_i) > 1 - \epsilon.$$

В силу неравенства (2) получаем, что $v^{(j)}(x_i) < \epsilon$. Учитывая неотрицательность $v^{(j)}$, заключаем, что матрица

$$||v^{(j)}(x_i)||_{i,j=1}^m$$

при достаточно малом ϵ является невырожденной. Последнее объясняется тем, что на диагонали стоят числа, близкие к единице, а вне диагонали — близкие к нулю. Тем самым $\{v^{(i)}\}$ — линейно независимые q-гармонические функции, что означает, что размерность пространства ограниченных q-гармонических на M функций не меньше m.

Вторая часть доказательства теоремы достаточно серьезно отличается от доказательства аналогичного факта для гармонических функций, предложенного в [2]. В последнем случае по существу использовался тот факт, что ненулевая константа является элементом пространства ограниченных гармонических функций, что не выполняется в нашем случае.

Пусть на M существует m линейно независимых ограниченных q-гармонических функций. Докажем, что на M найдутся m попарно непересекающихся q-массивных множеств.

Сразу отметим, что на M существует q-массивное множество. Не умаляя общности, мы можем считать, что на M существует нетривиальная q-гармоническая функция u такая, что $\sup u = a > 0$. В качестве массивного множества можно взять, например, множество $\{x : u > \frac{a}{2}\}$. Внутренним потенциалом данного множества будет q-субгармоническая функция $u - \frac{a}{2}$.

Построим функцию Лиувилля многообразия M. Пусть $\{h_k\}$ — решения краевых задач

$$\begin{cases} \Delta h_k - q(x)h_k = 0, x \in B_k \\ h_k|_{\partial B_k} = 1 \\ \frac{\partial h_k}{\partial n}|_{\partial M \cap B_k} = 0 \end{cases}.$$

Последовательность $\{h_k\}$ — монотонно убывает и, следовательно, имеет предел

$$h = \lim_{k\to\infty} h_k,$$

причем

$$\Delta h - q(x)h = 0.$$

Из существования на M q-массивных множеств и принципа максимума следует, что $h > 0$ на M.

Обозначим

$$\Delta_h f = \frac{1}{h^2} div(h^2 \nabla f).$$

Тогда справедливы равенства

$$\Delta_h f = \frac{1}{h^2}(h^2 \Delta f + 2h \nabla h \nabla f) = \Delta f + \frac{2}{h} \nabla f \nabla h.$$

Предположим далее, что g — q-гармоническая функция в некоторой области Ω. Пусть

$$f = \frac{g}{h}.$$

Тогда

$$0 = \Delta g - q(x)g = \Delta(\frac{g}{h}h) - q(x)\frac{g}{h}h = \Delta(fh) - q(x)fh =$$
$$= \Delta f h + 2\nabla f \nabla h + f(\Delta h - q(x)h) = h\Delta_h f.$$

Таким образом, заключаем, что если g — q-гармоническая функция, то f — решение уравнения

$$\Delta_h f = 0. \tag{3}$$

Решения уравнения (3) далее будем называть h-весовыми гармоническими функциями.

Обозначим через $g_1, \ldots, g_m$ m линейно независимых на M, ограниченных q-гармонических функций (существование которых следует из предположения второй части теоремы). Не умаляя общности, можем считать, что одна из них, например g_m, совпадает с h. Кроме того, можем считать для всех i выполнено $|g_i| < 1$. Из q-субгармоничности функций $|g_i|$ и принципа максимума заключаем, что на M выполнено $|g_i| \le h$. Обозначим

$$u_i = \frac{g_i}{h},$$

соответствующие h-весовые гармонические функции. Несложно показать, что $\{u_i\}$ являются линейно независимыми и ограниченными.

Дальнейшая часть доказательства почти дословно повторяет рассуждения из [2]. Пусть $\hat{M}$ — компактификация Чеха многообразия M, то есть $\hat{M}$ — компактное топологическое пространство, M — открытое всюду плотное множество в $\hat{M}$, и всякая непрерывная ограниченная функция в M непрерывно продолжается на $\hat{M}$. Обозначим $\mu = \hat{M} \setminus M$, и пусть u_i, непрерывно продолженные на $\hat{M}$, равны на μ функциям f_i. Из принципа максимума для весовых гармонических функций следует линейная независимость функций $f_1, \ldots, f_m$. В качестве искомых массивных q-множеств мы могли бы попробовать взять множества $\{x : u_i > \sup u_i - \epsilon\}$, если бы они попарно не пересекались. Последнее эквивалентно тому, что множества точек на μ, в которых $f_i = \sup f_i$ попарно не пересекаются. Однако это не всегда так. Чтобы обойти эту трудность, как и в [2], воспользуемся доказанной там леммой.

Лемма 2 (см. [2]). *Пусть* μ — *компактное топологическое пространство,* $f_1, \ldots, f_m$ — *линейно независимые непрерывные функции на* μ. *Тогда найдутся функции* $F_1, \ldots, F_m$, *являющиеся линейными комбинациями* $f_1, \ldots, f_m$, *такие, что множества*

$$\mu_i = \{x : F_i = \max F_i\}$$

попарно не пересекаются.

Так как функции F_i являются линейными комбинациями функций $f_1, \ldots, f_m$, то существуют функции $v_1, \ldots, v_m$, являющиеся линейными комбинациями $u_1, \ldots, u_m$, причем $v_i|_\mu = F_i$. Очевидно v_i являются h-весовыми гармоническими функциями.

Обозначим $\Omega_i^\epsilon = \{x \in M : v_i > \max F_i - \epsilon\}$. Из утверждения леммы, как впрочем и из ее доказательства, не следует, что $\max F_i > 0$. Положим $C = \max_{i=1,\ldots,m} \max |F_i| + 1$. Тогда, учитывая, что $u_m = 1$ и рассматривая в случае необходимости вместо v_i функции $v_i + Cu_m$, мы можем рассматривать случай $\max F_i > 0$ при всех i.

Покажем вначале, что при достаточно малом $\epsilon > 0$ множества Ω_i^ϵ попарно не пересекаются. В предположении противного можно считать, что $\Omega_i^\epsilon \cap \Omega_j^\epsilon \neq \emptyset$ при некоторых $i \neq j$ и $\epsilon = \epsilon_k \quad (k = 1, 2, \ldots)$. Здесь последовательность $\{\epsilon_k\}$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Обозначим через x_k некоторую точку из $\Omega_i^{\epsilon_k} \cap \Omega_j^{\epsilon_k}$. При $k \to \infty$ последовательность $\{x_k\}$ имеет предельную точку $x_0 \in \hat{M}$. Очевидно, $v_l(x_0) = \max F_l = \sup v_l, \quad l = i, j$. Если $x_0 \in M$, то по строгому принципу максимума $v_i = \mathrm{const}, \quad v_j = \mathrm{const}$, откуда $F_i = \mathrm{const}, \quad F_j = \mathrm{const}$, что противоречит тому, что функции F_i и F_j не имеют общих точек максимума. Если $x_0 \in \mu$, то x_0 является общей точкой максимума функций F_i и F_j, что опять противоречит их выбору. Итак, при некотором $\epsilon > 0$ множества $\Omega_i^\epsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$ попарно не пересекаются.

Учитывая, что $\max F_i > 0$, для всех $i = 1, 2, \ldots, m$, заключаем, что при достаточно малом $\epsilon > 0$ все указанные множества Ω_i^ϵ являются массивными относительно h-весового оператора Лапласа. Последнее означает, что на M существуют нетривиальные h-весовые субгармонические функции w_i такие, что $w_i = 0$ на $M \setminus \Omega_i^\epsilon$ и $0 \leq w_i \leq 1$.

Таким образом, на M существуют q-субгармонические функции $g_i = w_i h$ такие, что $g_i = 0$ на $M \setminus \Omega_i^\epsilon$ и $0 \leq g_i \leq 1$. Стало быть множества $\Omega_i^\epsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$ являются q-массивными, непересекающимися подмножествами многообразия M. Последнее доказывает теорему.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области (проект № 15-41-02479 р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьян, А. А. О лиувиллевых теоремах для гармонических функций с конечным интегралом Дирихле / А. А. Григорьян // Мат. сб. — 1987. — Т. 132, № 4. — С. 496–516.

2. Григорьян, А. А. О размерности пространств гармонических функций / А. А. Григорьян // Мат. заметки. — 1990. — Т. 48, № 5. — С. 55–60.

3. Григорьян, А. А. О существовании положительных фундаментальных решений уравнения Лапласа на римановых многообразиях / А. А. Григорьян // Мат. сб. — 1985. — Т. 128, № 3. — С. 354–363.

4. Корольков, С. А. Решения эллиптических уравнений на римановых многообразиях с концами / С. А. Корольков, А. Г. Лосев // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2011. — № 1 (14). — С. 23–40.

5. Лосев, А. Г. Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Алгебра и анализ. — 2001. — Т. 13, № 1. — С. 84–110.

6. Cheng, S. Y. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications / S. Y. Cheng, S. T. Yau // Comm. Pure and Appl. Math. — 1975. — Vol. 28, № 3. — P. 333–354.

7. Grigor'yan, A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. Grigor'yan // Bulletin of Amer. Math. Soc. — 1999. — № 36. — P. 135–249.

8. Korolkov, S. A. Generalized Harmonic Functions of Riemannian Manifolds with Ends / S. A. Korolkov, A. G. Losev // Mathematische Zeitschrift. — 2012. — Iss. 272. — № 1-2. — P. 459–472.

9. Li, P. Harmonic functions and the structure of complete manifolds / P. Li, L.-F. Tam // J. Diff. Geom. — 1992. — Vol. 35, № 2. — P. 359–383.

10. Sung, C.-J. Spaces of harmonic functions / C.-J. Sung, L.-F. Tam, J. Wang // J. London Math. Soc. (2). — 2000. — № 3. — P. 789–806.

REFERENCES

1. Grigoryan A.A. O liuvillevykh teoremakh dlya garmonicheskikh funktsiy s konechnym integralom Dirikhle [On Liouville Theorems for Harmonic Functions with Finite Dirichlet Integral]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 1987, vol. 132, no. 4, pp. 496-516.

2. Grigoryan A.A. O razmernosti prostranstv garmonicheskikh funktsiy [Dimension of Spaces of Harmonic Functions]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 1990, vol. 48, no. 5, pp. 55-60.

3. Grigoryan A.A. O sushchestvovanii polozhitelnykh fundamentalnykh resheniy uravneniya Laplasa na rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Existence of Positive Fundamental Solution of the Laplace Equation on Riemannian Manifolds]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 1985, vol. 128, no. 3, pp. 354-363.

4. Korolkov S.A., Losev A.G. Resheniya ellipticheskikh uravneniy na rimanovykh mnogoobraziyakh s kontsami [Solutions of Elliptic Partial Differential Equations on Riemannian Manifolds with Ends]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2011, no. 1 (14), pp. 23-40.

5. Losev A.G., Mazepa E.A. Ogranichennye resheniya uravneniya Shredingera na rimanovykh proizvedeniyakh [Bounded Solutions of the Schrodinger Equation on Riemannian Products]. *Algebra i analiz* [St. Petersburg Mathematical Journal], 2001, vol. 13, no. 1, pp. 84-110.

6. Cheng S.Y., Yau S.T. Differential Equations on Riemannian Manifolds and Their Geometric Applications. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1975, vol. 28, no. 3, pp. 333-354.

7. Grigor'yan A. Analytic and Geometric Background of Recurrence and Non-Explosion of the Brownian Motion on Riemannian Manifolds. *Bulletin of Amer. Math. Soc.*, 1999, no. 36, pp. 135-249.

8. Korolkov S.A., Losev A.G. Generalized Harmonic Functions of Riemannian Manifolds with Ends. *Mathematische Zeitschrift*, 2012, iss. 272, no. 1-2, pp. 459-472.

9. Li P., Tam L.-F. Harmonic Functions and the Structure of Complete Manifolds. *J. Diff. Geom.*, 1992, vol. 35, no. 2, pp. 359-383.

10. Sung C.-J., Tam L.-F., Wang J. Spaces of Harmonic Functions. *J. London Math. Soc. (2)*, 2000, no. 3, pp. 789-806.

DIMENSION OF SPACES OF SOLUTIONS OF THE SCHRODINGER EQUATION ON NONCOMPACT RIEMANNIAN MANIFOLDS

Alexander Asaturovich Grigor'yan

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Mathematics, Bielefeld University, Germany
Senior Researcher,
Institute of Control Sciences of RAS, Russian Federation
grigor@math.uni-bielefeld.de
Fakultat fur Mathematik, Universitat Bielefeld, Postfach 100131, Bielefeld, Germany

Alexander Georgievich Losev

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
allosev59@gmail.com, alexander.losev@volsu.ru, matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. Let M be a smooth connected noncompact Riemannian manifold, Δ the Laplace — Beltrami operator on M, $q(x)$ a smooth nonnegative function on M, not identically zero. Considering the Schrodinger equation on M,

$$\Delta u - q(x)u = 0,$$

we ask the following question: For what manifold M and potentials $q(x)$ does this equation have a unique solutions $u = 0$? If this is the case we say that Liouville's theorem is true for Schrodinger equation.

We say that u is q-harmonic function if it satisfies the Schrodinger equation.

The classical Liouville theorem says that any bounded harmonic function in R^n is identically constant. We note that recently there has been a trend towards a more general approach to theorems of Liouville type, namely, they are estimated dimensionality of various solution spaces of linear equations elliptic type.

In particular, Grigor'yan (1990) proved an exact estimate dimensionality of spaces of bounded harmonic functions on non-compact Riemannian manifolds in terms of massive sets. The aim of this paper is to prove a similar result for bounded solutions of the stationary equation Schrodinger.

Dimensions of spaces of harmonic functions and q-harmonic functions has been studied in numerous articles for various classes of manifolds. Among them are the works of M.T. Anderson, T.H. Colding, A. Grigor'yan, P. Li, A.G. Losev, L.-F. Tam, D. Sullivan, S.-T. Yau and many other authors. In contrast to the mentioned articles (and many others), we do not restrict the manifold M a priori in any way.

Let $LB(M)$ be the space of bounded q-harmonic functions on M. We define q-massive subsets of M and prove that $LB(M)$ is equal to the maximal number of pairwise non-intersecting q-massive subsets of M.

We now state the exact formulations.

A continuous function u defined on some open set $\Omega \subset M$ is called q-subharmonic if for every domain $G \Subset \Omega$ and a q-harmonic function

$$v \in C(\overline{G}), \quad u|_{\partial G} = v|_{\partial G}$$

implies $u \leq v$ in G.

An open proper subset $\Omega \subset M$ is called q-massive if there is a non-trival q-subharmonic function $u \in C(\overline{\Omega})$ such that $u|_{\partial\Omega} = 0, \quad 0 \leq u \leq 1$.

The main result of the paper is the following statement.

Theorem. Let $m \geq 1$ be a natural number. The following statements are equivalent:
1) dim$LB(M) \geq m$;
2) there exist m pairwise non-intersection q-massive subsets of M.

Note that in the case $q(x) \equiv 0$, this assertion is true only for $m \geq 2$.

Key words: stationary Schrodinger equation, Liouville-type theorems, non-compact Riemannian manifolds, massive sets, dimension of spaces of solutions.