DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.4.7

УДК 517.547.3
ББК 22.16

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ИХ ЗНАЧЕНИЯМ В КОНЕЧНОМ ЧИСЛЕ ТОЧЕК

Михаил Петрович Овчинцев

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики,
Московский государственный строительный университет
6714543@rambler.ru
Ярославское шоссе, 26, 129337 г. Москва, Российская Федерация

Аннотация. В работе изучается задача наилучшего приближения второй производной от ограниченной аналитической функции, заданной в единичном круге в точке по информации о значениях первой производной в этой же точке, а также значениях самой функции в некотором конечном наборе точек. Вначале находится погрешность наилучшего метода приближения. После этого вычисляются коэффициенты линейного наилучшего метода восстановления. В конце статьи доказывается, что линейный наилучший метод приближения в рассматриваемом случае единственен.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, аналитическая функция, наилучший метод, погрешность наилучшего метода, экстремальная функция, линейный наилучший метод, коэффициенты линейного наилучшего метода.

Введение

Пусть $K=\{z:|z|<1\}$ – единичный круг, а $\Gamma=\{z:|z|= \}$ – единичная окружность. Обозначим через $B^1(K)=\{f(z):|f(z)|\le 1, z\in K\}$ – множество аналитических функций, заданных в круге K. Пусть также $z_0, z_1, \ldots, z_n$ – заданные различные точки, лежащие в круге K.

Если $S(t_1,\ldots,t_n,t_{n+1},t_{n+2})$ – любая комплексная функция $n+2$ комплексных переменных, то погрешностью приближения методом S второй производной $f''(z_0)$ по информации о значениях $f(z_1),\ldots,f(z_n),f(z_0),f'(z_0)$ называется следующая величина

$$r_{n+2}(S)=\sup_{f(z)\in B^1(K)}\left|f''(z_0)-S\left(f(z_1),\ldots,f(z_n),f(z_0),f'(z_0)\right)\right|.$$

Согласно работе К.Ю. Осипенко [1] существует линейный наилучший метод приближения

$$S_0=\alpha f'(z_0)+c_0 f(z_0)+\sum_{k=1}^{n} c_k f(z_k)$$

(здесь α, c_0, c_k – комплексные числа),
для которого имеют место следующие равенства

$$r_{n+2}(S_0)=\inf_S r_{n+2}(S)=\sup_{\substack{f(z)\in B^1(K)\\ f(z_1)=\ldots=f(z_n)=f(z_0)=f'(z_0)=0}} |f''(z_0)| \tag{1}$$

В дальнейшем погрешность наилучшего метода приближения обозначаем $r_2(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ (то есть $r_2(z_0, z_1, \ldots, z_n) = r_{n+2}(S_0)$).

Заметим, задачи оптимального восстановления изучались в работах [1; 2]. Напомним теперь некоторые результаты из работ [3] и [4].

Если $\omega(\zeta)$ – суммируемая на Γ функция, то выполняется соотношение двойственности

$$\sup_{f \in B^1(K)} |\int_\Gamma f(\zeta)\omega(\zeta)d\zeta| = \min_{\varphi \in H_1} \int_\Gamma |\omega(\zeta) - \varphi(\zeta)||d\zeta|, \tag{2}$$

где H_1 – класс Харди. В рассматриваемом случае существуют экстремальные функции $f^*(z) \in B^1(K)$ и $\varphi^*(z) \in H_1$ для равенства (2). Причем функция $f^*(z)$ единственна с точностью до множителя $e^{i\mu}$ $(\mu \in R)$, а $\varphi^*(z)$ – единственна. Кроме того, функции $f^*(z) \in B^1(K)$ и $\varphi^*(z) \in H_1$ являются экстремальными тогда и только тогда, когда почти везде на Γ выполняется соотношение

$$f^*(\zeta)\left[\omega(\zeta) - \varphi^*(\zeta)\right]d\zeta = e^{i\delta}\left|\omega(\zeta) - \varphi^*(\zeta)\right|ds, \tag{3}$$

где δ – действительная константа. В работе [3] доказано, если $\omega(\zeta)$ является граничным значением на Γ мероморфной в $\overline{K}$ функции $\omega(z)$ с полюсами $\beta_1, \ldots, \beta_m$ (каждый полюс повторен столько раз, какова его кратность), то произведение

$$R(z) = f^*(z)[\omega(z) - \varphi^*(z) \tag{4}$$

является аналитической функцией (за исключением полюсов) вплоть до Γ и имеет в $\overline{K}$

$$M = m - 1 \tag{5}$$

нулей.

1. Вычисление погрешности наилучшего метода приближения

Теорема 1. Погрешность наилучшего метода приближения определяется по формуле

$$r_2(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \frac{2|B(z_0)|}{\left(1 - |z_0|^2\right)^2}. \tag{6}$$

Экстремальная функция $f^*(z)$ задачи (1) единственна с точностью до множителя $e^{i\delta}$, где $\delta \in R$.

Доказательство. Обозначим

$$A = \{f(z) : f(z) \in B^1(K), f(z_1) = \ldots = f(z_n) = f(z_0) = f'(z_0) = 0\} -$$

семейство аналитических функций. Пусть $f(z) \in A.$ Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{f(z)}{\left(\dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}\right)^2 B(z)},$$

где

$$B(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z} -$$

конечное произведение Бляшке. Если $|z| = 1$, то $|g(z)| = |f(z)| \le 1.$

Отсюда, если $f(z) \in$ A, то

$$f(z) = \left(\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}\right)^2 B(z) g(z),$$

где $g(z) \in B^1(K)$. Нетрудно подсчитать $f''(z_0) = 2\frac{B(z_0) g(z_0)}{\left(1 - |z_0|^2\right)^2}$.

Если $g(z) \in B^1(K)$, то $|g(z_0)| \le 1$, и поэтому

$$\sup_{g(z) \in B^1(K)} |g(z_0)| \le 1.$$

Так как $g^*(z) = e^{i\delta} \in B^1(K)(\delta \in R)$, то

$$\sup_{g(z) \in B^1(K)} |g(z_0)| \ge 1.$$

Откуда

$$\sup_{g(z) \in B^1(K)} |g(z_0)| = 1.$$

Экстремальные функции этой задачи имеют вид $g^*(z) = e^{i\delta}(\delta \in R)$. В самом деле, если $g^*(z) \in B^1(K)$ и $|g^*(z_0)| = 1$, то по принципу максимума модуля $g^*(z)$ является постоянной, и поэтому $g^*(z) = e^{i\delta}(\delta \in R)$.

Поэтому

$$r_2(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \frac{2\,|B(z_0)|}{\left(1 - |z_0|^2\right)^2} \sup_{g(z) \in B^1(K)} |g(z_0)| = \frac{2\,|B(z_0)|}{\left(1 - |z_0|^2\right)^2}.$$

Понятно, что экстремальная функция $f^*(z)$ задачи (1) единственна с точностью до множителя $e^{i\delta}$, где $\delta \in R$. Теорема доказана.

Следствие. Так как $f^*(z)$ является экстремальной функцией задачи (1), то $|(f^*)''(z_0)| = r_2(z_0, z_1, \ldots, z_n)$. Отсюда следует, что $f^*(z)$ является экстремальной функцией задачи

$$r_2(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \sup_{f \in B^1(K)} \left| f''(z_0) - \alpha f'(z_0) - c_0 f(z_0) - \sum_{k=1}^{n} c_k f(z_k) \right| =$$

$$= \sup_{f \in B^1(K)} \left| \int_{\Gamma} \omega(\zeta) f(\zeta) d\zeta \right|, \tag{7}$$

где $\alpha f'(z_0) + c_0 f(z_0) + \sum_{k=1}^{n} c_k f(z_k)$ – любой из линейных наилучших методов приближения (если их много), а

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{2}{(\zeta - z_0)^3} - \frac{\alpha}{(\zeta - z_0)^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\zeta - z_k}\right). \tag{8}$$

Следовательно, экстремальная функция задачи (7) имеет вид $e^{i\delta} f^*(z)$, где $\delta \in R$.

2. Вычисление коэффициентов линейного наилучшего метода

Теорема 2. Линейный наилучший метод приближения $\alpha f'(z_0) + c_0 f(z_0) + \sum_{k=1}^{n} c_k f(z_k)$ – единственен, а его коэффициенты находятся по формулам:

$$\alpha = 2\frac{\overline{z_0}B(z_0) + \left(1-|z_0|^2\right)B'(z_0)}{\left(1-|z_0|^2\right)B(z_0)}, \tag{9}$$

$$c_0 = \frac{\left(1-|z_0|^2\right)B(z_0)B''(z_0) - 2\left(\overline{z_0}B(z_0)+\left(1-|z_0|^2\right)B'(z_0)\right)B'(z_0)}{\left(1-|z_0|^2\right)B^2(z_0)}, \tag{10}$$

$$c_k = \frac{2B(z_0)}{|z_0|^2-1}\frac{(1-|z_k|^2)(1-\overline{z_0}z_k)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{z_k-z_j}{1-\overline{z_j}z_k}\left(z_k-z_0\right)^3}\left(k=1,\ldots,n\right). \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{2B(z_0)\left(1-\overline{z_0}z\right)}{\left(1-|z_0|^2\right)B(z)\left(z-z_0\right)^3}f(z)\,dz, \tag{12}$$

где $f(z)\in B^1(K)$. Оценим интеграл по модулю

$$|J| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{2B(z_0)\left(1-\overline{z_0}z\right)}{\left(1-|z_0|^2\right)B(z)\left(z-z_0\right)^3}f(z)\,dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{2|B(z_0)|}{\left(1-|z_0|^2\right)|z-z_0|^2}|dz| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{2|B(z_0)|}{1-|z_0|^2}\frac{1}{1-|z_0|^2}\int_{\Gamma}\frac{1-|z_0|^2}{|z-z_0|^2}|dz| = \frac{2|B(z_0)|}{\left(1-|z_0|^2\right)^2}. \tag{13}$$

Подсчитаем интеграл. Для этого рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \frac{1-\overline{z_0}z}{B(z)(z-z_0)^3}.$$

Разложим $\Phi(z)$ в ряд Лорана

$$\frac{1-\overline{z_0}z}{B(z)\left(z-z_0\right)^3} = \frac{C_{-3}}{\left(z-z_0\right)^3} + \frac{C_{-2}}{\left(z-z_0\right)^2} + \frac{C_{-1}}{z-z_0} + \varphi(z), \tag{14}$$

где $\varphi(z)$ – аналитическая функция; $z\in K$. Найдем коэффициенты C_{-3}; C_{-2}; C_{-1}. Сначала найдем коэффициент C_{-3}. Имеем:

$$C_{-3} = \lim_{z\to z_0}\left(z-z_0\right)^3\Phi(z) = \lim_{z\to z_0}\left(z-z_0\right)^3\frac{1-\overline{z_0}z}{B(z)\left(z-z_0\right)^3} = \frac{1-|z_0|^2}{B(z_0)}. \tag{15}$$

Найдем коэффициент C_{-2}. Так как

$$\left(\left(z-z_0\right)^3\Phi(z)\right)' = \frac{-\overline{z_0}B(z) - \left(1-\overline{z_0}z\right)B'(z)}{B^2(z)},$$

то

$$C_{-2} = \lim_{z\to z_0}\left(\left(z-z_0\right)^3\Phi(z)\right)' = \lim_{z\to z_0}\frac{-\overline{z_0}B(z)-\left(1-\overline{z_0}z\right)B'(z)}{B^2(z)} =$$

$$= -\frac{\overline{z_0}B(z_0)+\left(1-|z_0|^2\right)B'(z_0)}{B^2(z_0)}. \tag{16}$$

Найдем коэффициент C_{-1}. Так как

$$((z-z_0)^3\,\Phi(z))''=\frac{\left[-\overline{z_0}B'(z)+\overline{z_0}B'(z)-\left(1-\overline{z_0}z\right)B''(z)\right]B^2(z)}{B^4(z)}-$$

$$-\frac{\left[-\overline{z_0}B(z)-\left(1-\overline{z_0}z\right)B'(z)\right]2B(z)B'(z)}{B^4(z)},\ \text{то}$$

$$C_{-1}=\frac{1}{2}\lim_{z\to z_0}\left(\frac{\left(-\overline{z_0}B'(z)+\overline{z_0}B'(z)-\left(1-\overline{z_0}z\right)B''(z)\right)}{B^2(z)}-\frac{2\left(-\overline{z_0}B(z)-\left(1-\overline{z_0}z\right)B'(z)\right)}{B^3(z)}\right)=$$

$$=-\frac{\left(1-|z_0|^2\right)B''(z_0)B(z_0)-2\left(\overline{z_0}B(z_0)+\left(1-|z_0|^2\right)B'(z_0)\right)B'(z_0)}{2B^3(z_0)}. \qquad (17)$$

Обозначим

$$P(z)=\frac{2B(z_0)}{1-|z_0|^2}\Phi(z)f(z), \qquad (18)$$

$$c_k=\operatorname*{res}_{z=z_k}\frac{2B(z_0)\Phi(z)}{|z_0|^2-1}(k=1,\ldots,n). \qquad (19)$$

Тогда (см. (14)–(18))

$$\operatorname*{res}_{z=z_0}P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma P(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{2f(z)}{(z-z_0)^3}dz+$$

$$+\frac{2B(z_0)}{1-|z_0|^2}\frac{C_{-2}}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz+\frac{2B(z_0)}{1-|z_0|^2}\frac{C_{-1}}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-z_0}dz=$$

$$=f''(z_0)-\alpha f'(z_0)-c_0f(z_0), \qquad (20)$$

где γ – некоторая окружность с центром в точке z_0, принадлежащая K (внутри γ и на самой окружности не лежат простые полюсы $z_1,\ldots,z_n$), а

$$\alpha=-\frac{2B(z_0)}{1-|z_0|^2}C_{-2},c_0=-\frac{2B(z_0)}{1-|z_0|^2}C_{-1},$$

и поэтому (см. (16), (17)) вычисляются по формулам (9) и (10).

Отсюда (см. (12), (20), (19)) по теореме о вычетах

$$J=f''(z_0)-\alpha f'(z_0)-c_0f(z_0)-\sum_{k=1}^{n}c_kf(z_k).$$

Итак, получается

$$|\,f''(z_0)-\alpha f'(z_0)-c_0f(z_0)-\sum_{k=1}^{n}c_kf(z_k)|\le\frac{2\,|\,B(z_0)|}{\left(1-|z_0|^2\right)^2}$$

для всех $f(z)\in B^1(K)$. Отсюда и вытекает, что метод $\alpha f'(z_0)+c_0f(z_0)+\sum_{k=1}^{n}c_kf(z_k)$ является линейным наилучшим методом приближения.

Подсчитаем коэффициенты c_k. Имеем:

$$c_k = \frac{2B(z_0)}{|z_0|^2 - 1} \operatorname*{res}_{z=z_k} \Phi(z) = \frac{2B(z_0)}{|z_0|^2-1} \lim_{z\to z_k} \frac{(1-\overline{z_k}z)(1-\overline{z_0}z)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{z-z_j}{1-\overline{z_j}z}(z-z_0)^3} = \frac{2B(z_0)}{|z_0|^2-1} \frac{(1-|z_k|^2)(1-\overline{z_0}z_k)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{z_k-z_j}{1-\overline{z_j}z_k}(z_k-z_0)^3}$$

где $k = 1,\ldots,n$.

В заключение убедимся в том, что линейный наилучший метод приближения единственен. В самом деле, если $\alpha f'(z_0) + \sum_{k=0}^{n} c_k f(z_k)$ является линейным наилучшим методом приближения, то выполняются равенства (7) и (3), где $\omega(\zeta)$ определяется по формуле (8). Заметим, что функция $R(z) = f^*(z)[\omega(z) - \varphi^*(z)]$ в рассматриваемом случае не имеет нулей в $\overline{K}$ (см. (5)).

Предположим, что существует еще один линейный наилучший метод приближения

$$\hat{\alpha} f'(z_0) + \sum_{k=0}^{n} \hat{c}_k f(z_k).$$

Тогда

$$\sup_{f\in B^1(K)} \left| \int_\Gamma \omega_1(\zeta) f(\zeta) d\zeta \right| = r_2(z_0, z_1, \ldots, z_n),$$

где

$$\omega_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{2}{(\zeta - z_0)^3} - \frac{\hat{\alpha}}{(\zeta - z_0)^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\hat{c}_k}{\zeta - z_k}\right] \tag{21}$$

и (см. (3))

$$f^*(\zeta)[\omega_1(\zeta) - \phi_1^*(\zeta)] d\zeta = e^{i\delta_1} |\omega_1(\zeta) - \phi_1^*(\zeta)| |d\zeta|, \tag{22}$$

где δ_1 – вещественная константа ($\varphi_1^*(z) \in H_1$; см. (2)). Обозначим через $R_1(z) = f^*(z)[\omega_1(z) - \varphi_1^*(z)]$. Рассмотрим функцию

$$Q(z) = e^{i\theta} \frac{\omega_1(z) - \varphi_1^*(z)}{\omega(z) - \varphi^*(z)},$$

где $\theta = \delta - \delta_1$. Проверим ее аналитичность в точке z_0. В самом деле (см. (21), (8)),

$$Q(z_0) = \lim_{z\to z_0} Q(z) = e^{i\theta} \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)^3 (\omega_1(z) - \varphi_1^*(z))}{(z-z_0)^3 (\omega(z) - \varphi^*(z))} = e^{i\theta}.$$

Очевидно, что функция $Q(z)$ аналитична в $\overline{K}$ вплоть до границы Г.

Кроме того, функция $Q(z)$ принимает положительные значения на окружности Г (см. (22), (3)). Тогда $Q(z) = C$ (C – константа; $C > 0$).

Так как $Q(z_0) = e^{i\theta}$, то $e^{i\theta} = 1$. Следовательно, $Q(z) = 1$, и поэтому $\hat{\alpha} = \alpha, \hat{c}_0 = c_0, \ldots, \hat{c}_n = c_n$. То есть линейный наилучший метод восстановления единственен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осипенко, К. Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек / К. Ю. Осипенко // Математические заметки. – 1976. – Т. 19, № 1. – С. 29–40.

2. Хавинсон, С. Я. Основы теории экстремальных задач для ограниченных аналитических функций и их различные обобщения / С. Я. Хавинсон. – М. : МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1981. – 92 с.

3. Micchelli, C. Lectures on optimal recovery / C. Micchelli, T. Rivlin // Lect. Notes. – 1982. – Vol. 9. – P. 21–93.

4. Rogosinski, W. W. On certain extremum problems for analytic functions / W. W. Rogosinski, H. Schapiro // Acta Math. – 1954. – Vol. 90, № 3. – P. 287–318.

REFERENCES

1. Osipenko K.Yu. Nailuchshee priblizhenie analiticheskikh funktsiy po informatsii ob ikh znacheniyakh v konechnom chisle tochek [The Best Approximation of Analytic Functions by Information on Their Values at a Finite Number of Points]. *Matematicheskie zametki*, 1976, vol. 19, no. 1, pp. 29-40.

2. Khavinson S.Ya. *Osnovy teorii ekstremalnykh zadach dlya ogranichennykh analiticheskikh funktsiy i ikh razlichnye obobshcheniya* [Fundamentals of the Theory of Extremal Problems for Bounded Analytic Functions and Their Various Generalizations]. Moscow, MISI im. V.V. Kuybysheva, 1981. 92 p.

3. Micchelli C., Rivlin T. Lectures on optimal recovery. *Lect. Notes*, 1982, vol. 9, pp. 21-93.

4. Rogosinski W.W., Schapiro H. On certain extremum problems for analytic functions. *Acta Math.*, 1954, vol. 90, no. 3, pp. 287-318.

OPTIMAL RECOVERY OF ANALYTIC FUNCTIONS' SECONDARY DERIVATIVES BY THEIR VALUES AT A FINITE NUMBER OF POINTS

Mikhail Petrovich Ovchintsev

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Applied Mathematics,
Moscow State University of Civil Engineering
6714543@rambler.ru
Yaroslavskoe shosse, 26, 129337 Moscow, Russian Federation

Abstract. Many works are devoted to the problems of optimal recovery of a linear functional defined on a certain class of functions from information on the values of functions at a finite number of points (see, for example, [1; 2]). In this article we study the problem of best approximation of the second derivative of a bounded analytic function given in the unit circle at a point with respect to the value of the first derivative at this point, and also the values of the function in some finite collection of points. The article consists of three sections.

The introduction contains the necessary information from the articles of K.Yu. Osipenko. The definition of the best approximation method, the existence of the linear best method, and the formula for calculating the error of the best method are recalled. Also some necessary results from S.Ya. Khavinson articles are given.

In the second section, the error of the best approximation method is calculated. For this a family of functions, which is used to find the error of the best method, is factorized. After this, the required error is calculated directly. It is noted, that the extremal function, used to determine the error of the best method, is unique up to a multiplier $e^{i\delta}, \delta \in R$.

In the last section, the coefficients of the linear best method are calculated. To do this, we use the corresponding contour integral, taken along the unit circle. This integral is estimated modulo from above, and then it is calculated. As a result, the coefficients of the linear best method are obtained. At the end of the paper, the uniqueness of the linear best method is established using the relation connecting the extremal functions (see [3]).

Key words: optimal recovery, analytic function, the best method, error of the best method, extremal function, linear best method, coefficients of the linear best method.