



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.4.6>

УДК 517.968.73

ББК 22.161.6

ОБ ОДНОЙ НОВОЙ МЕТОДИКЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА МОДЕЛЬНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМ ЯДРОМ

Сарвар Кахрамонович Зарипов

Кандидат физико-математических наук,
старший преподаватель кафедры математического анализа и теории функций,
Таджикский национальный университет
sarvar8383@list.ru
проезд Рудаки, 17, 734025 г. Душанбе, Республика Таджикистан

Аннотация. Для одного модельного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с сингулярным ядром найдены интегральные представления многообразий решений через произвольные постоянные. Найдены случаи, когда данное интегро-дифференциальное уравнение имеет единственное решение. Построены аналоги теоремы Фредгольма для этого интегро-дифференциального уравнения. Используемый метод можно применять для изучения модельных и немодельных интегро-дифференциальных уравнений высших порядков.

Ключевые слова: модельное интегро-дифференциальное уравнение, граничные сингулярные точки, интегральные представления, граничные задачи, системы интегро-дифференциальных уравнений.

Введение

Теория интегро-дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами является одним из важных разделов теории интегральных и дифференциальных уравнений, которые находят широкое и многообразное применение в физике и технике.

Многие задачи прикладного характера, например задача Вольтерра о крутильных колебаниях, задача Прандтля расчета крыла самолета, задача об изучении кинетического уравнения Больцмана, приводят к изучению сингулярных интегро-дифференциальных уравнений [4–6; 10–12]. Также в последние годы в силу своей прикладной важности изучаются прямые и обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений [7; 16; 19; 20], а также разрабатываются методы для исследования разных классов вырождающихся интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах [1–3; 17; 18].

Важно заметить, что во многих исследованных сингулярных интегро-дифференциальных уравнениях существующие там интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши, и поэтому для решения этих уравнений применяются методы теории аналитических функций. В случае, когда в сингулярных интегро-дифференциальных уравнениях интегралы понимаются в обычном смысле Римана, известно сравнительно мало работ.

В связи с этим в последние годы в работах Н. Раджабова [13–15] появилась новая методика для изучения интегральных уравнений типа Вольтерра с сингулярным и сверхсингулярным

ядром. Эта методика была нами перенесена для изучения интегро-дифференциальных уравнений с сингулярным и сверхсингулярным ядрами в работах [8; 9].

В данной работе предлагаем новую методику решения одного класса обыкновенного интегро-дифференциального уравнения с сингулярным ядром и на основе полученных результатов исследуем граничные задачи для этих уравнений.

Постановка задач и их решение

Пусть $\Gamma = \{x : a < x < b\}$ – множество точек на вещественной оси. На Γ рассмотрим модельное интегро-дифференциальное уравнение:

$$\varphi'(x) + \frac{A}{x-a} \varphi(x) + \int_a^x \left[\frac{B}{t-a} \varphi'(t) + \frac{C}{(t-a)^2} \varphi(t) \right] dt = f(x), \quad (1)$$

где A, B, C – заданные постоянные числа; $f(x)$ – заданная функция; $\varphi(x)$ – искомая функция.

Прежде всего через $C_a^1[a, b]$ обозначим класс таких функций, которые имеют производную первого порядка, и в точке $x = a$ обращаются в нуль с асимптотическим поведением

$$\varphi(x) = o[(x-a)^{\gamma_1}], \quad \gamma_1 > 1,$$

а первая производная от этих функций в точке $x = a$ обращается в нуль с асимптотическим поведением

$$\varphi'(x) = o[(x-a)^{\gamma_2}], \quad \gamma_2 > \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ и решения уравнения (1) будем искать в этом классе.

В данной работе будем исследовать уравнение (1) в случае, когда коэффициенты этого уравнения связаны между собой равенством $C = A \cdot B$. В этом случае уравнение (1) можно записать в таком виде:

$$\varphi'(x) + \frac{A}{x-a} \varphi(x) + \int_a^x \frac{B}{t-a} \left[\varphi'(t) + \frac{A}{t-a} \varphi(t) \right] dt = f(x). \quad (2)$$

Если введем обозначение $\varphi'(x) + \frac{A}{x-a} \varphi(x) = \psi(x)$, тогда приходим к решению следующей системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi'(x) + \frac{A}{x-a} \varphi(x) = \psi(x), \\ \psi(x) + \int_a^x \frac{B}{t-a} \psi(t) dt = f(x). \end{cases} \quad (3)$$

Как видно из (3), первое уравнение этой системы является дифференциальным уравнением, а второе – интегральным уравнением с сингулярным ядром. Эти уравнения в отдельности хорошо изучены в работах Н. Раджабова [13–15]. Используя эти результаты решения системы (3), получим следующие случаи:

I. Пусть $B < 0$, тогда решение уравнений системы (3) дается по формулам:

$$\begin{cases} \varphi(x) = (x-a)^{-A} c_1 + \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{-A} \psi(t) dt, \\ \psi(x) = (x-a)^{|B|} c_2 + f(x) - B \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{|B|} \frac{f(t)}{t-a} dt. \end{cases} \quad (4)$$

Для получения решения уравнения (2) в первом равенстве (4) вместо $\psi(x)$, подставляя его значение из второго равенства, получим:

$$\varphi(x) = (x-a)^{-A} c_1 + \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{-A} \left[(t-a)^{|B|} c_2 + f(t) - B \int_a^t \left(\frac{t-a}{\tau-a} \right)^{|B|} \frac{f(\tau)}{\tau-a} d\tau \right] dt. \quad (5)$$

После некоторых преобразований решение вида (5) легко можно записать в таком виде:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & (x-a)^{-A} c_1 + (x-a)^{|B|+1} \frac{c_2}{|B|+A+1} + \\ & + \frac{1}{|B|+A+1} \int_a^x \left[(A+1) \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{-A} + |B| \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{|B|+1} \right] f(t) dt \equiv E_1^+ [c_1, c_2, f(x)] \end{aligned} \quad (6)$$

Не ограничивая общности, предположим, что $1 < -A < |B| + 1$. В этом случае для сходимости интегралов в правой части (6) требуем, чтобы функция $f(x)$ в точке $x = a$ обращалась в нуль с асимптотическим поведением:

$$f(x) = o\left[(x-a)^{\delta_1}\right], \delta_1 > |B|. \quad (7)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (1) коэффициенты A, B и C между собой связаны равенством $C = A \cdot B$ и они такие, что выполняется неравенство $B < 0, 1 < -A < |B| + 1$. Функция $f(x)$ в точке $x = a$ обращается в нуль с асимптотическим поведением (7).

Тогда однородное уравнение (1) имеет два линейно независимых решения, а неоднородное уравнение (1) в классе функций $y(x) \in C_a^1[a, b]$, обращающихся в нуль в точке $x = a$, всегда разрешимо, и его общее решение содержит две произвольные постоянные, и дается по формуле (6).

Замечание 1. Подобное утверждение можно получить в случае, когда вместо условия $1 < -A < |B| + 1$ выполняется условие $1 < |B| + 1 < -A$.

Теперь пусть выполняется неравенство $-A < 1 < |B| + 1$. В этом случае из выражения (6) следует, что если решение уравнения (1) при $-A < 1$ существует, тогда для того чтобы оно принадлежало классу $C_a^1[a, b]$, произвольная постоянная c_1 должна быть равна нулю, то есть в этом случае решение уравнения (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & (x-a)^{|B|+1} \frac{c_2}{|B|+A+1} + \frac{1}{|B|+A+1} \int_a^x \left[(A+1) \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{-A} + |B| \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{|B|+1} \right] f(t) dt \equiv \\ \equiv & E_1^+ [0, c_2, f(x)] \end{aligned} \quad (8)$$

В этом случае тоже для сходимости интегралов в правой части (8) функция $f(x)$ должна обращаться в нуль с асимптотическим поведением (7).

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (1) коэффициенты A, B и C между собой связаны равенством $C = A \cdot B$ и они такие, что выполняется неравенство $B < 0, -A < 1 < |B| + 1$. Функция $f(x)$ в точке $x = a$ обращается в нуль с асимптотическим поведением (7).

Тогда однородное уравнение (1) имеет одно линейно независимое решение, а неоднородное уравнение (1) в классе функций $y(x) \in C_a^1[a, b]$, обращающихся в нуль в точке $x = a$, всегда разрешимо, и его общее решение содержит одну произвольную постоянную c_2 , и дается при помощи формулы (8).

II. Пусть $B > 0$, тогда формальное решение уравнений системы (3) дается по формулам:

$$\begin{cases} \varphi(x) = (x-a)^{-A} c_1 + \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{-A} \psi(t) dt, \\ \psi(x) = (x-a)^{-B} c_2 + f(x) - B \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{-B} \frac{f(t)}{t-a} dt. \end{cases} \quad (9)$$

Так как во втором равенстве этой системы слагаемое $(x-a)^{-B} c_2$ не принадлежит классу $C_a^1[a, b]$, поэтому мы должны взять $c_2 = 0$ и значения

$$\psi(x) = f(x) - B \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{-B} \frac{f(t)}{t-a} dt,$$

подставляя в первое равенство системы (9), после некоторых преобразований решение уравнения (2) получим в таком виде:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (x-a)^{-A} c_1 + \frac{1}{A-B+1} \int_a^x \left[(A+1) \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{-A} - B \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{-B+1} \right] f(t) dt \equiv \\ &\equiv E_1^+[c_1, 0, f(x)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Если $-A > 1$, тогда для сходимости первого интеграла в правой части (10) требуем, чтобы функция $f(x)$ в точке $x = a$ обращалась в нуль с асимптотическим поведением:

$$f(x) = o\left[(x-a)^{\delta_2}\right], \quad \delta_2 > -A-1. \quad (11)$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (1) $B > 0$ и коэффициенты A , B и C между собой связаны равенством $C = A \cdot B$. Кроме того, пусть функция $f(x) \in C[a, b]$ и в случае $-A > 1$ в точке $x = a$ обращается в нуль асимптотическим поведением (11).

Тогда однородное уравнение (1) имеет одно линейно независимое решение, а неоднородное уравнение (1) в классе функций $y(x) \in C_a^1[a, b]$, обращающихся в нуль в точке $x = a$, всегда разрешимо, и его общее решение содержит одну произвольную постоянную c_1 и дается при помощи формулы (10).

Объединяя вышеприведенные результаты для интегро-дифференциального уравнения (1), можно построить аналог об альтернативе Фредгольма в следующем виде.

Аналог теоремы об альтернативе Фредгольма для интегро-дифференциального уравнения (1): Если в интегро-дифференциальном уравнении (1) коэффициенты A , B и C между собой связаны равенством $C = A \cdot B$ и они такие, что выполняются неравенства $B < 0$, $1 < -A < |B| + 1$, то однородное уравнение (1) имеет два линейно независимых решения и его общее решение содержит две произвольные постоянные, а неоднородное уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию (7). В этом случае неоднородное уравнение (1) имеет бесконечное число решений и его общее решение зависит от двух произвольных постоянных, и дается по формуле (6).

Если выполняются неравенства $B < 0$, $-A < 1 < |B| + 1$, то однородное уравнение (1) имеет одно линейно независимое решение и его общее решение содержит одну произвольную постоянную, а неоднородное уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию (7). В этом случае неоднородное уравнение (1) имеет бесконечное число решений и его общее решение содержит одну произвольную постоянную, и дается при помощи формулы (8).

Если выполняется неравенство $B > 0$, то однородное уравнение (1) тоже имеет одно линейно независимое решение и его общее решение содержит одну произвольную постоянную, а неоднородное уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию (11). В этом случае тоже неоднородное уравнение (1) имеет бесконечное число решений и его общее решение содержит одну произвольную постоянную, и дается при помощи формулы (10).

Постановка и решение граничных задач

Вначале изучим свойства решений уравнения (1). Для этого введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P_A^a[\varphi(x)] &= \frac{1}{(x-a)^{-A}} \varphi(x); \quad P_{A,B}^a[\varphi'(x)] = \frac{1}{(x-a)^{A+|B|}} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{(x-a)^{-A}} \varphi(x) \right]; \\ P_{|B|}^a[\varphi(x)] &= \frac{1}{(x-a)^{|B|+1}} \varphi(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда имеют место следующие замечания.

Замечание 2. Решение вида (6) обладает свойствами:

$$\left[P_A^a[\varphi(x)] \right]_{x=a} = c_1; \quad \left[P_{A,B}^a[\varphi'(x)] \right]_{x=a} = c_2. \quad (11)$$

Замечание 3. Решение вида (8) обладает свойством

$$\left[P_{|B|}^a[\varphi(x)] \right]_{x=a} = \frac{c_2}{A + |B| + 1}. \quad (12)$$

Используя полученные интегральные представления и свойства данных решений для уравнения (1), можно ставить и решать граничные задачи типа Коши.

Задача A_r . Требуется найти решение уравнения (1) из класса $C_a^1[a, b]$ по следующим условиям:

$$\left[P_A^a[\varphi(x)] \right]_{x=a} = B_1^1, \quad \left[P_{A,B}^a[\varphi'(x)] \right]_{x=a} = B_2^1,$$

где B_j^1 ($j=1,2$) – заданные постоянные числа; $P_A^a[\varphi(x)]$, $P_{A,B}^a[\varphi'(x)]$ – функции, определенные в (10).

Исследование задачи A_r . Пусть выполнены условия теоремы 1. Используя интегральное представление (6) и его свойства (11), находим постоянные c_1, c_2 : $c_1 = B_1^1, c_2 = B_2^1$.

Подставляя значения c_1, c_2 в (6), получим

$$\varphi(x) = E_1^+ [B_1^1, B_2^1, f(x)]. \quad (13)$$

Таким образом, о решении задачи A_1 справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (1) удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Тогда задача A_1 имеет единственное решение, которое выражается формулой (13).

Задача A_r . Требуется найти решение уравнения (1) из класса $C_a^1[a, b]$ по следующим условиям

$$\left[P_{|B|}^a[\varphi(x)] \right]_{x=a} = B_3^1,$$

где B_3^1 – заданное постоянное число; $P_{|B|}^a[\varphi(x)]$ – функция, определенная в (10).

Исследование задачи A_r . Пусть выполнены условия теоремы 2. Используя интегральное представление (8) и его свойства (12), находим постоянную c_2 :

$$\left[\frac{P^a}{|B|} [\varphi(x)] \right]_{x=a} = \frac{c_2}{A+|B|+1} = B_2^1 \Rightarrow c_2 = (A+|B|+1)B_2^1.$$

Подставляя значения c_2 в (8), получим

$$\varphi(x) = E_1^+ \left[0, (A+|B|+1)B_2^1, f(x) \right]. \quad (14)$$

Таким образом, о решении задачи A_2 справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (1) удовлетворяют всем условиям теоремы 2. Тогда задача A_2 имеет единственное решение, которое выражается формулой (14).

Замечание 4. Подобную задачу можно решить для нахождения c_1 в решении вида (10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бободжанов, А. А. Задача с обратным временем для сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения с диагональным вырождением ядра высокого порядка / А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 2016. – Т. 80, № 2. – С. 3–15.
2. Бободжанов, А. А. Метод нормальных форм в сингулярно возмущенных системах интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с быстро изменяющимися ядрами / А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов // Матем. сб. – 2013. – Т. 204, № 7. – С. 47–70.
3. Бьянка, К. Асимптотический предел интегро-дифференциального уравнения, моделирующего сложные системы / К. Бьянка, М. Феррара, L. Guertini // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 2014. – Т. 78, № 6. – С. 49–64.
4. Вейнберг, М. М. Интегро-дифференциальные уравнения / М. М. Вейнберг // Итоги науки. – М. : Ин-т науч. информации АН СССР, 1964. – С. 5–37.
5. Векуа, И. Н. Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля / И. Н. Векуа // Прикладная математика и механика. – 1945. – Т. 9, № 2. – С. 143–150.
6. Вольтерра, В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений / В. Вольтерра. – М. : Наука, 1982. – 304 с.
7. Дурдиев, Д. К. Глобальная разрешимость одной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения электродинамики / Д. К. Дурдиев // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 7. – С. 867–873.
8. Зарипов, С. К. Об одном классе модельного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с одной сингулярной точкой в ядре / С. К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2015. – № 1/3 (164). – С. 27–32.
9. Зарипов, С. К. Об одном классе модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка со сверхсингулярной точкой в ядре / С. К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2015. – № 1/6 (191). – С. 6–12.
10. Магнарадзе, Л. Г. Об одной системе линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и о линейной граничной задаче Римана / Л. Г. Магнарадзе // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1943. – Т. 5, № 1. – С. 3–9.
11. Магнарадзе, Л. Г. Об одном новом интегральном уравнении теории крыла самолета / Л. Г. Магнарадзе // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1942. – Т. 3, № 6. – С. 503–508.
12. Некрасов, А. И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений / А. И. Некрасов. – М. ; Л. : ГТТИ, 1934. – С. 1–17.
13. Раджабов, Н. Интегральные уравнения типов Вольтера с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения / Н. Раджабов. – Душанбе : Деваштич, 2007. – 221 с.
14. Раджабов, Н. Многомерное интегральное уравнение вольтеровского типа с сингулярными граничными областями в ядрах / Н. Раджабов // ДАН России. – 2011. – Т. 437, № 2. – С. 1–3.
15. Раджабов, Н. Об одном классе двумерных сопряженных интегральных уравнений вольтеровского типа / Н. Раджабов, Л. Раджабова, О. А. Репин // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 3. – С. 1–10.
16. Сафаров, Ж. Ш. Оценки устойчивости решений некоторых обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений / Ж. Ш. Сафаров // Вестник Удмуртского университета. Серия: Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2014. – № 3. – С. 75–82.

17. Фалалеев, М. В. Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения типа свертки в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. «Математика». – 2016. – Т. 17. – С. 77–85.
18. Фалалеев, М. В. Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. «Математика». – 2013. – Т. 6, № 4. – С. 128–137.
19. Юлдашев, Т. К. Об обратной задаче для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка / Т. К. Юлдашев // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 1. – С. 153–163.
20. Юлдашев, Т. К. Обратная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка / Т. К. Юлдашев // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2013. – № 1. – С. 58–66.

REFERENCES

1. Bobodzhanov A.A., Safonov V.F. Zadacha s obratnym vremenem dlya singulyarno vozmushchennogo integro-differentsialnogo uravneniya s diagonalnym vyrozhdением ядра vysokogo poryadka [Problem with Inverse Time for Singular Perturbed Integro-Differential Equation with Diagonal Degeneration of the Kernel of a High Order]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya matematicheskaya*, 2016, vol. 80, no. 2, pp. 3-15.
2. Bobodzhanov A.A., Safonov V.F. Metod normalnykh form v singulyarno vozmushennykh sistemakh integro-differentsialnykh uravneniy Fredgolma s bystro izmenyayushimisya yadrami [Method of Normal forms in Singular Perturbed Systems of the Integro-Differential Equations of Fredholm with Fast Varying Kernels]. *Matem. Sb.*, 2013, vol. 204, no. 7, pp. 47-70.
3. Byanka K., Ferrara M., Guerrini L. Asimptoticheskiy predel integro-differentsialnogo uravneniya, modeliruyushogo slozhnye sistemy [Asymptotic Limit of the Integro-Differential Equation, Modeling Complicated Systems]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya matematicheskaya*, 2014, vol. 78, no. 6, pp. 49-64.
4. Veynberg M.M. Integro-differentsialnye uravneniya [Integro-Differential Equations]. *Itogi nauki*. Moscow, 1964, pp. 5-37.
5. Vekua I.N. Ob integro-differentsialnom uravnenii Prandtlya [About Prandtl Integro-Differential Equation]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1945, vol. 9, no. 2, pp. 143-150.
6. Voltera V. *Teoriya funktsionalov, integralnykh i integro-differentsialnykh uravneniy* [Theory of Functionals, Integral and Integro-Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 304 p.
7. Durdiev D.K. Globalnaya razreshimost odnoy obratnoy zadachi dlya integro-differentsialnogo uravneniya elektrodinamiki [Global Solubility of One Inverse Problem for Integro-Differential Equation of Electrodynamics]. *Differentsialnye uravneniya*, 2008, vol. 44, no. 7, pp. 867-873.
8. Zaripov S.K. Ob odnom klasse nemodelnogo integro-differentsialnogo uravneniya pervogo poryadka s odnoy singulyarnoy tochkoy v yadre [About a Class of First-Order Model Integro-Differential Equation with a Singular Point in the Kernel]. *Vestnik Tadzhijskogo natsionalnogo universiteta*, 2015, no. 1/3 (164), pp. 27-32.
9. Zaripov S.K. Ob odnom klasse modelnykh integro-differentsialnykh uravneniy pervogo poryadka so sverkh-singulyarnoy tochkoy v yadre [About a Class of First-Order Model Integro-Differential Equations with a Super-Singular Point in the Kernel]. *Vestnik Tadzhijskogo natsionalnogo universiteta*, 2015, no. 1/6 (191), pp. 6-12.
10. Magnaradze L.G. Ob odnoy sisteme lineynykh singulyarnykh integro-differentsialnykh uravneniy i o lineynoy granichnoy zadache Rimana [About One System of Linear Singular Integro-Differential Equation and about Linear Boundary Value Problem of Riemann]. *Soobsh. AN Gruz SSR*, 1943, vol. 5, no. 1, pp. 3-9.
11. Magnaradze L.G. Ob odnom novom integralnom uravnenii teorii kryla samoleta [About One New Integral Equation of Plane Wing Theory]. *Soobsh. AN Gruz SSR*, 1942, vol. 3, no. 6, pp. 503-508.
12. Nekrasov A.I. *Ob odnom klasse lineynykh integro-differentsialnykh uravneniy* [About One Class of Linear Integro-Differential Equations]. Moscow; Leningrad, GTTI Publ., 1934, pp. 1-17.
13. Radzhabov N. *Integralnye uravneniya tipov Volterra s fiksirovannymi granichnymi i vnutrennimi singulyarnymi i sverkh-singulyarnymi yadrami i ikh prilozheniya* [Volterra-Type Integral Equations with Boundary and Interior Fixed Singularity and Super-Singularity Kernels and Their Applications]. Dushanbe, Devastich Publ., 2007. 221 p.
14. Radzhabov N. Mnogomernoe integralnoe uravnenie volterovskogo tipa s singulyarnymi granichnymi oblastyami v yadrah [Many-Dimensional Volterra-Type Integral Equations with Singular Boundary Spaces in Kernels]. *DAN Rossii*, 2011, vol. 437, no. 2, pp. 1-3.
15. Radzhabov N., Radzhabova L., Repin O.A. Ob odnom klasse dvumernykh sopryazhennykh integralnykh uravneniy volterovskogo tipa [About One Class of the Two-Dimensional Conjugate Volterra-Type Integral Equations]. *Differentsialnye uravneniya*, 2011, vol. 47, no. 3, pp. 1-10.

16. Safarov Zh.Sh. Otsenki ustoychivosti resheniy nekotorykh obratnykh zadach dlya integro-differentsialnykh uravneniy [Estimating the Stability of Solutions of Some Inverse Problems for Integro-Differential Equations]. *Vestnik Udmurtskovo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Kompyuternye nauki*, 2014, vol. 3, pp. 75-82.
17. Falaleev M.V. Vyrozhdennye integro-differentsialnye uravneniya tipa svertki v banakhovykh prostranstvakh [Degenerate Integro-Differential Equations of Convolution Type in Banach Spaces]. *Izv. Irkut. gos. un-ta. Ser. «Matematika»*, 2016, vol. 17, pp. 77-85.
18. Falaleev M.V. Singulyarnye integro-differentsialnye uravneniya spetsialnogo vida v banakhovykh prostranstvakh i ikh prilozheniya [Singular Integro-Differential Equations of Special Type in Banach Spaces and Their Applications]. *Izv. Irkut. gos. un-ta. Ser. «Matematika»*, 2013, vol. 6, no. 4, pp. 128-137.
19. Yuldashev T.K. Ob obratnoy zadache dlya nelineynykh integro-differentsialnykh uravneniy vysshego poryadka [An Inverse Problem for Nonlinear Integro-Differential Equations of Higher Order]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, 2014, no. 1, pp. 153-163.
20. Yuldashev T.K. Obratnaya zadacha dlya odnogo nelineynogo integro-differentsialnogo uravneniya tretyego poryadka [Inverse Problem for a Nonlinear Integro-Differential Equation of the Third Order]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya*, 2013, no. 1, pp. 58-66.

A NEW SOLUTION FOR ONE-CLASS MODEL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FIRST ORDER WITH SINGULARITY IN THE KERNEL

Sarvar Kakhramonovich Zaripov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Senior Lecturer, Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Tajik National University
sarvar8383@list.ru
Travel Rudaki, 17, 734025 Dushanbe, Republic of Tajikistan

Abstract. Integral representations of manifold solutions are obtained by arbitrary constants for one-class first-order model integro-differential equation with singularity in the kernel. First of all, the author highlights a new class of functions that at point $x = a$ convert to zero with some asymptotic behavior. The solution of the given equation is found in this class. It is shown that the solution of studied equation is equivalent to the solution of such system of integro-differential equation in which one of the equations is differential equation, and the other is integral equation. In the case when $B < 0$, the solution of homogeneous equation depends on two arbitrary constants and general solutions of non-homogeneous equation, as well as on two arbitrary constants. When $B > 0$ the solution of homogeneous equation depends only on one arbitrary constant, and the general solution of non-homogeneous equation depends on one arbitrary constant too.

The analogue of Fredholm theorems it proposed for a given integro-differential equation. In addition, the singular differential operators are described, and the main properties of these operators are studied.

In the cases, when the solution of a given integro-differential equation depends on any arbitrary constant, a Koshi-type problems are investigated. For the investigation of Koshi-type problems, first of all, the property of the obtained solution is studied. It is shown that, when some conditions are fulfilled, the Koshi-type problems have only unique solution. All received results can be transferred for the equations with right singular point in the kernel.

The method of solution of a given singular integro-differential equation can be used for the solution of higher-order model and non-model integro-differential equations with singular coefficients. Moreover, the proposed method can be used for the solution of partial model and non-model integro-differential equations with singular coefficients.

Key words: model integro-differential equation, boundary singular points, integral representations, boundary problems, systems of integro-differential equations.