DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.4.2

УДК 517.984.3 : 519.177
ББК 22.161

СПЕКТР МАТРИЦЫ СМЕЖНОСТЕЙ ПОЧТИ ПОЛНОГО ОРГРАФА

Сергей Викторович Козлуков

Студент,
Воронежский государственный университет
rerumnovarum@openmailbox.org
ул. Университетская, 1, 394000 г. Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. С помощью метода подобных операторов [1; 2] изучаются спектральные свойства матриц смежностей графов, близких к ориентированным полным (графам). Приведены оценки собственных значений таких матриц.

Ключевые слова: метод подобных операторов, спектр графа, локализация спектра, жорданова нормальная форма, нелинейные уравнения, сжимающие отображения.

1. Введение и основной результат

Рассмотрим матрицу $\mathscr{A}_{MN}$ размера $N \times N$, составленную из M нулей и $N^2 - M$ единиц. Как матрица смежности, $\mathscr{A}_{MN}$ соответствует орграфу, полученному из полного графа с петлями на N вершинах удалением некоторых M из N^2 ребер. Некоторые важные свойства графа связаны со спектром его матрицы смежностей. Так, например, в [4] описана дискретная модель распространения вируса в сети, в которой спектральный радиус матрицы смежностей графа сети оказывается пороговым значением ${}^1/_{\tau_0}$ отношения ${}^1/_{\tau} = {}^{\delta}/_{\nu}$ интенсивности δ исцеления инфецированных узлов и интенсивности ν заражения узлов, смежных инфецированным. Положение ${}^1/\tau$ относительно порога ${}^1/_{\tau_0}$ определяет (эндемический или эпидемический) характер заражения. Спектральная теория графов и ее приложения подробно рассмотрены в монографии [3].

Что можно сказать о собственных значениях матриц рассматриваемого вида?

Матрицу $\mathscr{A}_{MN}$ можно представить в виде

$$\mathscr{A}_{MN} = \mathcal{J}_N - \mathscr{B}_{MN} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \mathscr{B}_{MN},$$

где $\mathcal{J}_N$ — матрица, составленная из $N \times N$ единиц, а $\mathscr{B}_{MN}$ имеет единицы в точности на тех M местах, где в $\mathscr{A}_{MN}$ стоят нули.

Спектр $\sigma(\mathcal{J}_N)$ матрицы $\mathcal{J}_N$ легко считается: $\mathcal{J}_N^2 = N\mathcal{J}_N$, то есть $\lambda(\lambda - N)$ — аннулирующий и, что легко проверить, минимальный многочлен матрицы $\mathcal{J}_N$, а значит $\sigma(\mathcal{J}_N) = \{0, N\}$.

При достаточно малых M спектры матриц $\mathcal{J}_N$ и $\mathscr{A}_{MN}$ будут «близки». Методом подобных операторов (см.: [1; 2]), позволяющим для возмущений «идеального» объекта, спектральные свойства которого известны, найти элемент рассматриваемой алгебры, изоспектральный возмущенному, но имеющий более удобную для вычислений структуру, в статье доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $M < \frac{N^2}{16}$, тогда спектр матрицы $\mathscr{A}_{MN}$ можно представить в виде объединения $\sigma(\mathscr{A}_{MN}) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ непересекающихся одноэлементного множества $\sigma_1 = \{\lambda_1\}$ и множества σ_2, удовлетворяющих условиям:*

$$\sigma_1 \subset \left\{\mu \in \mathbb{R}; |\mu - N| < 4\sqrt{M}\right\},$$

$$\sigma_2 \subset \left\{\mu \in \mathbb{C}; |\mu| < 4\sqrt{M}\right\}.$$

2. Доказательство

Предварительные преобразования

Доказательство состоит в построении уравнения для матрицы, подобной $\mathscr{A}_{MN}$, но устроеной «проще». Решение возникающего нелинейного уравнения в банаховой алгебре $\mathtt{Matr}_N\mathbb{C}$ доставляется методом простых итераций (см., например, [1]).

Подобие матриц $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ понимается в смысле существования обратимой матрицы $\mathcal{U}$ такой, что $\mathcal{A}_1\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{A}_2$. Подобные матрицы изоспектральны (их спектры совпадают).

Проведем предварительные преобразования.

Лемма 1. *Матрица единиц $\mathcal{J}_N = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, подобна матрице*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Точнее, существует ортогональная матрица $\mathcal{U}$ такая, что $\mathcal{J}_N = \mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{U}^{-1}$.

Доказательство. Собственному значению 0 соответствует $N-1$ независимый собственный вектор $f_1 = (1, -1, 0, \ldots, 0), \ldots, f_{N-1} = (0, \ldots, 0, 1, -1)$, а собственному значению N матрицы $\mathcal{J}_N$ соответствует собственный вектор $f_N = (1, \ldots, 1)$. Применив ортогонализацию Грамма — Шмидта, получим ортонормальную систему $h_1, \ldots, h_N$:

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}\,(\underbrace{1,\ \ldots,\ 1,}_{k\text{ раз}}\ -k,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in \mathbb{R}^N, \quad k = 1, \ldots, N-1,$$

$$h_N = (1,\ \dots,\ 1) \in \mathbb{R}^N,$$

В качестве матрицы $\mathcal{U}$ выберем матрицу, имеющую столбцами векторы $h_N, h_1, \dots, h_{N-1}$:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(N-2)(N-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(N-1)N}} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(N-2)(N-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(N-1)N}} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(N-2)(N-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(N-1)N}} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(N-2)(N-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(N-1)N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(N-2)(N-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(N-1)N}} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & 0 & 0 & \cdots & \frac{2-N}{\sqrt{(N-2)(N-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(N-1)N}} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1-N}{\sqrt{(N-1)N}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная матрица $\mathcal{A}_{MN}$ подобна матрице $\mathcal{A}-\mathcal{B}$, где $\mathcal{B} = \mathcal{U}^{-1}\mathscr{B}_{MN}\mathcal{U}$. Далее ортогональность матрицы U будет играть важную роль.

Расщепление матрицы и результат

Матрицы из $\mathtt{Matr}_N\mathbb{C}$ будем записывать в блочном виде $X \sim \begin{pmatrix} x_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$, где x_{11} — число, X_{12} — строка, X_{21} — столбец, X_{22} — квадратный блок размерности $N-1$. Такие блочные матрицы сами образуют алгебру, изоморфную исходной, и их можно естественным образом умножать на элементы пространства $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^{N-1}$, изоморфного $\mathbb{C}^N$:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}x_1 + X_{12}x_2 \\ X_{21}x_1 + X_{22}x_2 \end{pmatrix}, \quad x \sim \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^{N-1}.$$

В дальнейших выкладках изоморфные объекты понимаются взаимозаменяемыми.

Следуя общей схеме метода подобных операторов [2], будем искать более «простую» матрицу, подобную $\mathcal{A}-\mathcal{B}$, в виде $\mathcal{A} - \mathfrak{J}X$ с матрицей преобразования подобия $E + \Gamma X$, где $E \in \mathtt{Matr}_N\mathbb{C}$ — единичная матрица, $\mathfrak{J}, \Gamma : \mathtt{Matr}_N\mathbb{C} \to \mathtt{Matr}_N\mathbb{C}$ — линейные операторы, действующие на алгебре $\mathtt{Matr}_N\mathbb{C}$, подбираемые в ходе решения, причем $\mathfrak{J}$ — проектор ($\mathfrak{J}^2 = \mathfrak{J}$), «упрощающий» возмущение $\mathfrak{J}X$, а Γ при всех $X \in \mathtt{Matr}_N\mathbb{C}$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{A}\Gamma X - (\Gamma X)\mathcal{A} = X - \mathfrak{J}X$.

Лемма 2. *Операторы $\mathfrak{J}$ и Γ следует задать формулами*

$$\mathfrak{J}X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma X = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ -X_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

для $X \sim \begin{pmatrix} x_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \in \mathtt{Matr}_N\mathbb{C}$.

Следствие 1. *Спектр блочно-диагональной матрицы* $\mathcal{A} - \mathfrak{J}X = \begin{pmatrix} N - x_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}$ *есть объединение спектров ее диагональных блоков:*

$$\sigma(\mathcal{A} - \mathfrak{J}X) = \{N - x_{11}\} \cup \sigma(X_{22}).$$

Доказательство. Пусть Γ действует по формуле $\Gamma X = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}(X) & \Gamma_{12}(X) \\ \Gamma_{21}(X) & \Gamma_{22}(X) \end{pmatrix}$, тогда

$$\mathcal{A}\Gamma X - (\Gamma X)\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & N\Gamma_{12}(X) \\ -N\Gamma_{21}(X) & 0 \end{pmatrix},$$

и уравнение для ΓX сводится к

$$X - \mathfrak{J}X = N \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{12}(X) \\ -\Gamma_{21}(X) & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\mathfrak{J}$ может обнулить в $X \sim \begin{pmatrix} x_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \in \mathtt{Matr}_N\mathbb{C}$ все, кроме двух диагональных блоков x_{11} и X_{22}, поэтому положим

$$\mathfrak{J}X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma X = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ -X_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь выпишем уравнение подобия матриц $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} - \mathfrak{J}X$:

$$(\mathcal{A} - \mathcal{B})(E + \Gamma X) = (E + \Gamma X)(\mathcal{A} - \mathfrak{J}X), \quad X \in \mathtt{Matr}_N\mathbb{C}. \tag{1}$$

Лемма 3. *Уравнение* (1) *эквивалентно уравнению*

$$X = \mathcal{B}\Gamma X + \mathcal{B} - (\Gamma X)(\mathfrak{J}(\mathcal{B}(E + \Gamma X))), \quad X \in \mathtt{Matr}_N\mathbb{C}. \tag{2}$$

Доказательство. Раскрывая скобки, уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$X = \mathcal{B}\Gamma X + \mathcal{B} - (\Gamma X)\mathfrak{J}X. \tag{3}$$

Пусть для X выполнено (3). Тогда, учитывая равенство $\mathfrak{J}\left((\Gamma X)\mathfrak{J}X\right) = 0$, получим равенство

$$\mathfrak{J}X = \mathfrak{J}\mathcal{B} + \mathfrak{J}\left(\mathcal{B}\Gamma X\right) = \mathfrak{J}(\mathcal{B}(E + \Gamma X)). \tag{4}$$

Подставляя это выражение обратно в (3), получим (2). Аналогично, применяя к обеим частям равенства (2) оператор $\mathfrak{J}$ и учитывая, что $\mathfrak{J}\left((\Gamma X)\mathfrak{J}(\mathcal{B}(E + \Gamma X))\right) = 0$, получим (3).

Выражение в правой части уравнения (2) обозначим как

$$\Phi(X) = \mathcal{B}\Gamma X + \mathcal{B} - (\Gamma X)(\mathfrak{J}(\mathcal{B}(E + \Gamma X))).$$

Теперь покажем, что при определенных условиях возникшее нелинейное отображение $\Phi : \mathtt{Matr}_N\mathbb{C} \to \mathtt{Matr}_N\mathbb{C}$ имеет инвариантным множеством некоторый шар $\Omega \subset \mathtt{Matr}_N\mathbb{C}$ с центром в нуле (то есть $\Phi(\Omega) \subset \Omega$), на котором оно является сжимающим.

Пусть в $\mathtt{Matr}_N\mathbb{C}$ выбрана какая-нибудь субмультипликативная норма $\|\cdot\|$ (то есть норма, удовлетворяющая неравенству $\|\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\| \leq \|\mathcal{A}_1\|\|\mathcal{A}_2\|$ при всех $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \in \mathtt{Matr}_N\mathbb{C}$). Нам нужно найти такой радиус $r \geq 0$, что при $\|X\|, \|Y\| \leq r$ выполнялись бы неравенства $\|\Phi(X)\| \leq r$ и $\|\Phi(X) - \Phi(Y)\| < q\|X - Y\|$, $q \in (0, 1)$. Обозначим $\beta = \|\mathcal{B}\|$, $\gamma = \sup_{\|X\|=1} \|\Gamma X\|$.

Лемма 4. *Пусть* $\gamma\beta < \frac{1}{4}$, *тогда шар*

$$\Omega = \{X \in \mathtt{Matr}_N\mathbb{C}; \|X\| \leq r_0\},$$

$$0 < r_0 = \frac{1 - 2\gamma\beta - \sqrt{1 - 4\gamma\beta}}{2\gamma^2\beta} < 4\beta,$$

удовлетворяет условию $\Phi(\Omega) \subset \Omega$.

Доказательство. Очевидно неравенство

$$\|\Phi(X)\| \leq \beta\gamma^2\|X\|^2 + 2\beta\gamma\|X\| + \beta.$$

Значит, если r удовлетворяет неравенству

$$\beta\gamma^2 r^2 + (2\beta\gamma - 1)r + \beta \leq 0, \tag{5}$$

то $\|\Phi(X)\| \leq r$ при всех $\|X\| \leq r$. Если $\gamma\beta \leq \frac{1}{4}$, то дискриминант $\Delta = 1 - 4\gamma\beta$ соответствующего уравнения положителен и его корни вещественны. Из знаков коэффициентов возникшего многочлена видно, что оба корня положительны. Следовательно, наименьший положительный r, удовлетворяющий неравенству (5), есть наименьший корень соответствующего уравнения:

$$r_0 = \frac{1 - 2\gamma\beta - \sqrt{1 - 4\gamma\beta}}{2\gamma^2\beta}.$$

Учитывая $\gamma\beta < \frac{1}{4}$, имеем $r_0 < 4\beta$.

Аналогичным образом устанавливается следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть* $\gamma\beta < \frac{1}{4}$, *тогда* Φ *— сжимающее отображение:*

$$\|\Phi(X) - \Phi(Y)\| \leq q\|X - Y\|, \quad X, Y \in \Omega,$$

$$q = (1 + 2\gamma r_0)\gamma\beta \leq (1 + 8\gamma\beta)\gamma\beta \leq \frac{3}{4}.$$

Доказательство.

$$\|\Phi(X)-\Phi(Y)\| = \|\mathcal{B}\Gamma(X-Y)+(\Gamma X)(\mathcal{B}\Gamma X+\mathcal{B})-(\Gamma Y)(\mathcal{B}\Gamma Y+\mathcal{B})\| \leq$$
$$\leq \beta\gamma\|X-Y\|+\beta\gamma^2\|X-Y\|\|X+Y\| \leq$$
$$\leq \beta\gamma\|X-Y\|+2r_0\beta\gamma^2\|X-Y\|.$$

Здесь использовано равенство

$$(\Gamma X)\mathfrak{J}(\mathcal{B}\Gamma X)-(\Gamma Y)\mathfrak{J}(\mathcal{B}\Gamma Y)=\frac{1}{2}\left[\Gamma(X-Y)\mathfrak{J}(\mathcal{B}\Gamma(X+Y))+\Gamma(X+Y)\mathfrak{J}(\mathcal{B}\Gamma(X-Y))\right].$$

Отсюда и из теоремы Банаха о неподвижной точке следует лемма.

Лемма 6. *В шаре*

$$\Omega=\{X\in \mathtt{Matr}_N\mathbb{C};\quad \|X\|\leq r_0\}$$

существует и притом единственное решение X^o уравнения (2)*, являющееся пределом последовательности $\{\Phi^k(0); k\in\mathbb{N}\}$, где $\Phi^k=\Phi\circ\Phi^{k-1}$ — композиция.*

Следствие 2. *Матрица $\mathcal{A}-\mathcal{B}$ подобна блочно-диагональной матрице $\mathcal{A}-\mathfrak{J}X^o$:*

$$\mathcal{A}-\mathcal{B}\sim\begin{pmatrix} N-x_{11}^o & 0\\ 0 & -X_{22}^o\end{pmatrix},$$

при этом выполняются условия:

$$\sigma(\mathcal{A}-\mathcal{B})=\{N-x_{11}^o\}\cup\sigma(-X_{22}^o),$$

$$x_{11}^o\in\mathbb{R}, |x_{11}^o|\leq r_0\leq 4\beta,$$
$$\sigma(-X_{22}^o)\subset\{\mu\in\mathbb{C}; |x|\leq r_0\leq 4\beta\}.$$

Доказательство. Матрица $\mathcal{A}-\mathcal{B}$ подобна блочно-диагональной $\mathcal{A}-\mathfrak{J}X^o$, поэтому их спектры совпадают. Спектр матрицы $\mathcal{A}-\mathfrak{J}X^o$ есть объединение спектров ее диагональных блоков. Ввиду субмультипликативности нормы имеют место неравенства

$$\mathtt{spr}(X^o)=\max_{\lambda\in\sigma(X^o)}|\lambda|\leq\|X^o\|\leq r_0.$$

Кроме того, собственное значение x_{11}^o является вещественным, как предел сходящейся вещественной последовательности.

Вернемся, наконец, к непосредственному доказательству основной теоремы.

Доказательство теоремы 1. Для доказательства осталось лишь выбрать подходящую субмультипликативную норму. Заметим, что матрица $\mathcal{U}$, приводящая $\mathcal{J}_N$ к диагональному виду, является ортогональной, поэтому умножение на $\mathcal{U}$ или $\mathcal{U}^{-1}$ есть изометрия. Следовательно, $\|\mathcal{B}\|=\|\mathscr{B}_{MN}\|$. Рассмотрим в пространстве $\mathtt{Matr}_N\mathbb{C}$ норму Фробениуса $\|\cdot\|_F$, определенную формулой $\|X\|_F=\sqrt{\sum_{ij}|x_{ij}|^2}$, $X=(x_{ij})\in\mathtt{Matr}_N\mathbb{C}$. Она субмультипликативна. При этом $\mathscr{B}_{MN}$ состоит из M единиц, поэтому

$$\beta=\|B\|_F=\|\mathscr{B}_{MN}\|_F=\sqrt{M}.$$

Заметим также очевидное равенство

$$\gamma = \frac{1}{N} \sup_{\|X\|_F=1} \left\| \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ -X_{21} & 0 \end{pmatrix} \right\|_F = \frac{1}{N}.$$

Если $\sqrt{M} < \frac{N}{4}$, то выполняются условия леммы, причем $r_0 < 4\sqrt{M}$. Это значит, что $\sigma(\mathscr{A}_{MN}) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где $\sigma_1 = \{\lambda_1\} \subset \mathbb{R}, |\lambda_1 - N| < 4\sqrt{M}$, $\sigma_2 \subset \{\mu \in \mathbb{C}; |\mu| < 4\sqrt{M}\}$, $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков, А. Г. Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. — Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1987. — 165 с.

2. Баскаков, А. Г. Расщепление возмущенного дифференциального оператора с неограниченными операторными коэффициентами / А. Г. Баскаков // Фундаментальная и прикладная математика. — 2002. — Т. 8, № 1. — С. 1–16.

3. Cvetkovic, D. M. Spectra of Graphs: Theory and Applications (3rd revision) / D. M. Cvetkovic, M. Doob, H. Sachs. — N. Y. : Wiley, 1998. — 368 p.

4. Epidemic spreading in real networks: an eigenvalue viewpoint / Y. Wang, D. Chakrabarti, C. Wang, C. Faloutsos // 22nd International Symposium on Reliable Distributed Systems, Oct. 2003. Proceedings. — 2003. — P. 25–34.

REFERENCES

1. Baskakov A.G. *Garmonicheskiy analiz lineynykh operatorov* [Harmonic Analysis of Linear Operators]. Voronezh, Voronezh State University Publ., 1987. 165 p.

2. Baskakov A.G. Rasshcheplenie vozmushchennogo differentsialnogo operatora s neogranichennymi operatornymi koeffitsientami [Analysis of Linear Differential Equations by Methods of the Spectral Theory of Difference Operators and Linear Relations]. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Russian Mathematical Surveys], 2002, vol. 8, no. 1, pp. 1-16.

3. Cvetkovic D.M., Doob M., Sachs H. *Spectra of Graphs: Theory and Applications (3rd revision)*. N. Y., Wiley, 1998. 368 p.

4. Wang Y., Chakrabarti D., Wang C., Faloutsos C. Epidemic Spreading in Real Networks: an Eigenvalue Viewpoint. *22nd International Symposium on Reliable Distributed Systems, Oct. 2003. Proceedings*, 2003, pp. 25-34.

ON SPECTRUM OF AN ADJACENCIES MATRIX OF ALMOST-COMPLETE GRAPH

Sergey Viktorovich Kozlukov

Student,
Voronezh State University
rerumnovarum@openmailbox.org
Universitetskaya St., 1, 394000 Voronezh, Russian Federation

Abstract. Let $\mathscr{A}_{MN}$ be a $N \times N$ matrix composed of $N^2 - M$ unities and M zeroes. Considered as an adjacencies matrix, $\mathscr{A}_{MN}$ corresponds to a complete digraph with loops on N vertices with some M out of N^2 edges removed. Some

important properties of a graph are determined by its spectrum. For example Wang et al. [4] proposed a discrete-time model of viral propagation in a network. In that model a virus will die out or linger on depending on whether the ratio of curing and infection rates is below or above the treshold value. As Wang et al. have shown that treshold value is the spectral radius of the adjacencies matrix of the network graph, i.e. the maximal absolute value of its eigenvalues. More comprehensive description of spectral graph theory and its application is given by Cvètkovic et al. [3].

This article analyzes spectral properties of such matrices. The matrix $\mathscr{A}_{MN}$ can be represented in the form $\mathscr{A}_{MN} = \mathcal{J}_N - \mathscr{B}_{MN}$, where $\mathcal{J}_N$ is a $N \times N$ matrix whose all entries are ones and $\mathcal{B}_{MN}$ has unities exactly at these M places where $\mathscr{A}_{MN}$ has zeroes. The spectrum of $\mathcal{J}_N$ can be easily computed: $\mathcal{J}_N^2 = N\mathcal{J}$, so $\lambda(\lambda - N)$ is the minimal annihilating polynomial of $\mathcal{J}_N$ and hence the spectrum of $\mathcal{J}_N$ is $\sigma(\mathcal{J}_N) = \{0, N\}$.

For small enough M the eigenvalues of $\mathscr{A}_{MN}$ will be “close” to those of $\mathcal{J}_N$. Then The Method of Similar Operators [1; 2] is used, which allows in the case of perturbation of some ideal object (whose properties are known) to find an element of the algebra under consideration similar to the disturbed one yet having “simpler” structure. Via this method the following theorem is proven:

Theorem. *Let $M < \frac{N^2}{16}$, then the spectrum of $\mathscr{A}_{MN}$ can be represented as a disjoint union $\sigma(\mathscr{A}_{MN}) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ of a singletone $\sigma_1 = \{\lambda_1\}$ and the set σ_2, satisfying the following conditions:*

$$\sigma_1 \subset \left\{\mu \in \mathbb{R}; |\mu - N| < 4\sqrt{M}\right\},$$

$$\sigma_2 \subset \left\{\mu \in \mathbb{C}; |\mu| < 4\sqrt{M}\right\}.$$

Key words: the method of similar operators, graph spectra, eigenvalues localization, Jordan normal form, nonlinear equations, contraction theory.