www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.4.1

УДК 517.9
ББК 22.161

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА С РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ И ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ [1]

Галина Валериевна Гаркавенко

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики
и методики преподавания математики,
Воронежский государственный педагогический университет
g.garkavenko@mail.ru
ул. Ленина, 86, 394043 г. Воронеж, Российская Федерация

Наталья Борисовна Ускова

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики
и физико-математического моделирования,
Воронежский государственный технический университет
nat-uskova@mail.ru
просп. Московский, 14, 394026 г. Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. Изучаются разностные операторы, соответствующие оператору Штурма — Лиувилля с растущим потенциалом общего вида. Методом исследования служит метод подобных операторов, обычно применяемый в спектральном анализе различных классов дифференциальных операторов. В зависимости от условий, накладываемых на потенциал, сформулированы теоремы о том, что исследуемый оператор является генератором полугруппы (группы) операторов и выписан вид подобной полугруппы (группы).

Ключевые слова: метод подобных операторов, разностный оператор, собственные значения, полугруппа операторов, генератор полугруппы операторов.

Введение

Рассмотрим гильбертово пространство двусторонних комплексных последовательностей $l_2(\mathbb{Z})$ со скалярным произведением $(x,y) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x(n)\overline{y(n)}$, $x, y \in l_2(\mathbb{Z})$, $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $y : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, и нормой $\|x\| = \big(\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|^2\big)^{1/2}$, порожденной этим скалярным произведением. В пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ зададим линейный оператор $A : D(A) \subset l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ формулой

$$(Ax)(n) = a(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in D(A), \tag{1}$$

с областью определения $D(A) \subset l_2(\mathbb{Z})$ вида

$$D(A) = \{x \in l_2(\mathbb{Z}) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a(n)|^2 |x(n)|^2 < \infty\},$$

где $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ — последовательность, обладающая свойствами:

1) $a(i) \neq a(j)$ при $i \neq j$;

2) $\lim\limits_{|n|\to\infty} |a(n)| = \infty$;

3) $0 < d_i = \inf_{i\neq j} |a(i) - a(j)| \to \infty$, $|i| \to \infty$.

Символом $\rho(A)$ обозначим резольвентное множество оператора A, а символом $\sigma(A)$ — его спектр. Из условий на последовательность $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ следует, что $\sigma(A) = \{a(n), n \in \mathbb{Z}\}$, то есть спектр оператора A состоит из простых изолированных собственных значений. Если число λ_0 не совпадает ни с одним $a(n)$, то $\lambda_0 \in \rho(A)$ и оператор $(A-\lambda_0 I)^{-1} : l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ действует по формуле $((A-\lambda_0 I)^{-1}x)(n) = ((a(n)-\lambda_0)^{-1}x)(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Такой оператор является нормальным компактным оператором. Поэтому оператор A также является нормальным оператором. Собственными векторами e_n, $n \in \mathbb{Z}$, оператора A являются векторы стандартного базиса пространства $l_2(\mathbb{Z})$, то есть векторы e_n, $n \in \mathbb{Z}$, такие, что $e_n(m) = \delta_{nm}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, где δ_{nm} — символ Кронекера.

Пусть самосопряженный ограниченный оператор $B : l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ действует по формуле

$$(Bx)(n) = -2x(n) + x(n+1) + x(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l_2(\mathbb{Z}). \tag{2}$$

В работе изучается возмущенный оператор $\mathcal{A} = A - B : D(\mathcal{A}) \subset l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$, $D(\mathcal{A}) = D(A)$. Рассматриваемый класс разностных операторов и их матриц соответствует уравнениям Штурма — Лиувилля при их дискретизации [12].

Основные результаты статьи содержатся в теоремах 2–4. Для их формулировки нам потребуется асимптотика собственных значений оператора $A - B$, которая получена в [8; 10]. Приведем ниже без доказательства соответствующую теорему.

Теорема 1 ([10, теорема 1]). *Существует такое целое число $k \geqslant 0$, что спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ представим в виде*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_{(k)} \bigcup \Big(\bigcup_{|i|>k} \sigma_i \Big),$$

где $\sigma_{(k)}$ содержит не более чем $2k + 1$ собственных значений, $\sigma_i = \{\mu_i\}$, $|i| > k$, — одноточечные множества, и имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\mu_i = a(i) + 2 + O(d_i^{-1}), \quad |i| > k, \tag{3}$$

$$\mu_i = a(i) + 2 - \frac{a(i+1) - 2a(i) + a(i-1)}{(a(i+1) - a(i))(a(i-1) - a(i))} + O(d_i^{-3}), \quad |i| > k. \tag{4}$$

Обозначим через $P_n = P(\{a(n)\}, A)$ спектральный проектор, построенный по одноточечному множеству $\{a(n)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, невозмущенного оператора A, и через Q_k оператор $Q_k = \sum\limits_{|i| \leqslant k} P_i$. Таким образом, $P_n x = (x, e_n)e_n = x(n)e_n$, $n \in \mathbb{Z}$, где $x = (x(n)) \in l_2(\mathbb{Z})$.

Определения и используемые результаты из теории полугрупп можно найти в [1; 16; 18].

В следующих теоремах используются обозначения теоремы 1, и ее условия считаются выполненными. Обозначение $\mathrm{Im}\, C$ означает образ некоторого линейного оператора C.

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство. Символом $\mathrm{End}\, \mathcal{H}$ обозначим банахову алгебру ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{H}$ с нормой $\|X\|_\infty = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Xx\|$, $x \in \mathcal{H}$.

Теорема 2. *Пусть последовательность $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условию $\mathrm{Re}\, a(n) \leqslant \beta$ для всех $n \in \mathbb{Z}$ и некоторого $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда оператор $\mathcal{A}$ является генератором полугруппы операторов $T : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{End}\, l_2(\mathbb{Z})$, и эта полугруппа подобна полугруппе $\widetilde{T} : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{End}\, l_2(\mathbb{Z})$ вида*

$$\widetilde{T}(t) = \widetilde{T}_{(k)}(t) \oplus \widetilde{T}^{(k)}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{5}$$

действующей в $l_2(\mathbb{Z}) = \mathcal{H}_{(k)} \oplus \mathcal{H}^{(k)}$, где $\mathcal{H}_{(k)} = \mathrm{Im}\, Q_k$ и $\mathcal{H}^{(k)} = \mathrm{Im}\,(I - Q_k)$. Полугруппа $\widetilde{T}^{(k)} : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{End}\, \mathcal{H}^{(k)}$ определяется формулой

$$\widetilde{T}^{(k)}(t)x = \sum_{|n|>k} e^{\mu_n t} P_n x, \quad x \in \mathcal{H}^{(k)}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где числа μ_n, $|n| > k$, определены равенствами (3), (4).

Теорема 3. *Пусть $\alpha \leqslant \mathrm{Re}\, a(n) \leqslant \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, для всех $n \in \mathbb{Z}$. Тогда оператор $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ является производящим оператором группы операторов $T : \mathbb{R} \to \mathrm{End}\, l_2(\mathbb{Z})$ и эта группа подобна группе $\widetilde{T} : \mathbb{R} \to \mathrm{End}\, l_2(\mathbb{Z})$ вида (5), где*

$$\widetilde{T}^{(k)}(t)x = \sum_{|n|>k} e^{\mu_n t} P_n x, \quad x \in \mathcal{H}^{(k)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Теорема 4. *Пусть оператор $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ самосопряжен. Тогда оператор $i\mathcal{A}$ является генератором группы изометрий $T : \mathbb{R} \to \mathrm{End}\, l_2(\mathbb{Z})$, эта группа подобна группе вида (5), где*

$$\widetilde{T}^{(k)}(t)x = \sum_{|n|>k} e^{i\mu_n t} P_n x, \quad x \in \mathcal{H}^{(k)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что в работах [8–11] исследовались спектральные свойства указанного разностного оператора $A - B$. Вопросы, связанные с построением генератора полугруппы (группы) операторов, в этих работах не рассматривались. В [9] изучался случай четной последовательности $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, что соответствует четному потенциалу.

1. О методе подобных операторов

Метод подобных операторов берет начало с работ А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова, Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова, К.О. Фридрихса, Р. Тернера и окончательно оформляется в работах А.Г. Баскакова [1–3; 6; 7]. Мы будем придерживаться идеологии и методологии работы [3]. Обычно метод подобных операторов применяется для получения спектральных характеристик дифференциальных операторов (см., например, недавно вышедшие работы [4; 5; 13–15; 17]).

К исследованию разностных операторов метод подобных операторов применялся в [8–11].

Определение 1 ([3]). *Два линейных оператора $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, называются* подобными, *если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и $A_1Ux = UA_2x$, $x \in D(A_2)$. Оператор U называется* оператором преобразования *оператора A_1 в A_2.*

Подобные операторы обладают рядом совпадающих спектральных свойств. Соответствующее утверждение удобно формулировать в виде следующей леммы.

Лемма 1 ([3]). *Пусть $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, — два подобных оператора, и $U \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ — оператор преобразования оператора A_1 в оператор A_2. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2)$, $\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2)$, $\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, где $\sigma(A_i)$, $\sigma_d(A_i)$, $\sigma_c(A_i)$, $\sigma_r(A_i)$, $i = 1, 2,$ — спектр, дискретный, непрерывный и остаточный спектры операторов A_i, $i = 1, 2$, соответственно;

2) если оператор A_2 допускает разложение $A_2 = A_{21} \oplus A_{22}$, где $A_{2k} = A|\mathcal{H}_k$, $k = 1, 2$, — сужение A_2 на $\mathcal{H}_k$ относительно прямой суммы $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ инвариантных относительно A_2 подпространств $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, то подпространства $\widetilde{\mathcal{H}}_k = U(\mathcal{H}_k)$, $k = 1, 2$, инвариантны относительно оператора A_1 и $A_1 = A_{11} \oplus A_{12}$, где $A_{1k} = A|\widetilde{\mathcal{H}}_k$, $k = 1, 2$, относительно разложения $\mathcal{H} = \widetilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_2$. Кроме того, если P — проектор, осуществляющий разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ (то есть $\mathcal{H}_1 = \operatorname{Im} P$ — образ проектора P, $\mathcal{H}_2 = \operatorname{Im}(I - P)$ — образ дополнительного проектора), то проектор $\widetilde{P} \in \operatorname{End}\mathcal{H}$, осуществляющий разложение $\mathcal{H} = \widetilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_2$, определяется формулой

$$\widetilde{P} = UPU^{-1};$$

3) если оператор A_2 является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $T_2 : \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ (полугруппы класса C_0), то оператор A_1 также является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов

$$T_1(t) = UT_2(t)U^{-1}, \quad t \geqslant 0, \quad T_1 : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{H}.$$

Линейные операторы, действующие в пространстве операторов согласно терминологии М.Г. Крейна будем называть трансформаторами.

Наиболее важным понятием метода подобных операторов является понятие допустимой тройки.

Определение 2 ([3]). *Пусть $J : \operatorname{End}\mathcal{H} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$, $\Gamma : \operatorname{End}\mathcal{H} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$, являются трансформаторами. Тройку $(\operatorname{End}\mathcal{H}, J, \Gamma)$ назовем допустимой для невозмущенного оператора A тройкой, и $\operatorname{End}\mathcal{H}$ — допустимым пространством возмущений, если*

1) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причем J — проектор;

2) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$, *при этом*

$$A\Gamma X - (\Gamma X)A = X - JX, \quad X \in \operatorname{End}\mathcal{H}, \tag{6}$$

и $Y = \Gamma X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ *— единственное решение уравнения* $AY - YA = X - JX$, *удовлетворяющее условию* $JY = 0$;

3) существует постоянная $\gamma > 0$ *такая, что*

$$\|\Gamma\| \leqslant \gamma, \quad \max\{\|X\Gamma Y\|, \|(\Gamma X)Y\|\} \leqslant \gamma\|X\|\|Y\|;$$

4) для любого $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует* $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ *такое, что*

$$\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon.$$

Теорема 5 ([3]). *Пусть* $(\operatorname{End}\mathcal{H}, J, \Gamma)$ *— допустимая для оператора* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *тройка и* B *— некоторый оператор из* $\operatorname{End}\mathcal{H}$. *Тогда, если*

$$4\gamma\|B\| < 1, \tag{7}$$

то оператор $A - B$ *подобен оператору* $A - JX_*$, *где оператор* $X_* \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ *является решением нелинейного операторного уравнения*

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B. \tag{8}$$

Решение X_* *может быть найдено методом простых итераций, положив* $X_0 = 0$, $X_1 = B, \ldots$ *Преобразование подобия оператора* $A - B$ *в оператор* $A - JX_*$ *осуществляет оператор* $I + \Gamma X_* \in \operatorname{End}\mathcal{H}$.

Из леммы 1 и теоремы 5 следует следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть* $(\operatorname{End}\mathcal{H}, J, \Gamma)$ *— допустимая тройка для оператора* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, *оператор* $B \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ *удовлетворяет условию (7), и оператор* $A - JX_*$, *где* X_* *— решение нелинейного операторного уравнения (8), является генератором полугруппы операторов* $\widetilde{T} : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{H}$. *Тогда оператор* $A - B$ *является генератором полугруппы операторов* $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{H}$, *определенной равенствами*

$$T(t) = (I + \Gamma X_*)\widetilde{T}(t)(I + \Gamma X_*)^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

2. Преобразование подобия исходного оператора

В этом параграфе символом $\mathcal{H}$ будем обозначать гильбертово пространство $l_2(\mathbb{Z})$. Отметим, что в дальнейшем удобно будет пользоваться матричным представлением операторов A и B, определенных формулами (1) и (2) соответственно.

Представим оператор $A-B$ в виде $A-B = \widetilde{A}-\widetilde{B}$, где $(\widetilde{A}x)(n) = a(n)x(n)+2x(n)$, $(\widetilde{B}x)(n) = x(n-1) + x(n+1)$. Тогда $\sigma(\widetilde{A}) = \{a(n) + 2, n \in \mathbb{Z}\}$ — собственные векторы и спектральные проекторы те же, что и у оператора $\widetilde{A}$, оператор $\widetilde{B} \in \operatorname{End}\mathcal{H}$, $\|\widetilde{B}\| = 2$ и главная диагональ у матрицы оператора $\widetilde{B}$ нулевая.

Перейдем к определению трансформаторов $J_k : \operatorname{End}\mathcal{H} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ и $\Gamma_k : \operatorname{End}\mathcal{H} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$, $k \geqslant 0$. Положим

$$J_kX = \sum_{|n|>k} P_nXP_n + Q_kXQ_k, \quad X \in \operatorname{End}\mathcal{H}.$$

Очевидно, что трансформатор J_k блочно диагонализирует матрицу оператора X и $J_k\widetilde{B}$ — оператор конечного ранга.

Перепишем равенство (6) для матричных элементов y_{nm}, n, $m \in \mathbb{Z}$, матрицы Y ($Y = \Gamma_k X$):

$$a(n)y_{nm} - y_{nm}a(m) = x_{nm}, \quad n \neq m, \max\{|n|, |m|\} > k,$$

откуда

$$y_{nm} = \frac{x_{nm}}{a(n) - a(m)}, \tag{9}$$

и $y_{nm} = 0$ в противном случае. Так как $a(n) \neq a(m)$ при $n \neq m$, то формула (9) корректна. Таким образом, матричные элементы оператора $\Gamma_k X$ определены. При этом $Y \in \operatorname{End}\mathcal{H}$.

Лемма 2 ([10, лемма 2]). *Тройка* $(\operatorname{End} l_2(\mathbb{Z}), J_k, \Gamma_k)$ *является допустимой для оператора* $\widetilde{A}$ *тройкой при любом* $k \geqslant 0$.

Отметим, что в уже упомянутых работах [8–11] для разностного оператора были построены различные допустимые тройки. Они отличались выбором пространства допустимых возмущений. Наряду с $\operatorname{End}\mathcal{H}$ в качестве пространства допустимых возмущений можно рассматривать пространство $\operatorname{End}_1\mathcal{H}$ операторов из $\operatorname{End}\mathcal{H}$, имеющих матрицы с суммируемыми диагоналями. При этом возмущение $\widetilde{B}$ принадлежит пространству $\operatorname{End}_1\mathcal{H}$. Также в качестве пространства допустимых возмущений может выступать двусторонний идеал операторов Гильберта — Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ из алгебры $\operatorname{End}\mathcal{H}$. В этом случае на последовательность $d : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ необходимо наложить дополнительное условие $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} d_i^{-2} < \infty$. Отметим также, что $\widetilde{B} \notin \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Поэтому придется проводить вначале предварительное преобразование подобия (см.: [3; 13–15]).

При построении генераторов групп (полугрупп) операторов можно использовать любую из перечисленных допустимых троек. Выбор пространств допустимых возмущений несущественен, поэтому остановимся на $\operatorname{End}\mathcal{H}$.

Теорема 7 ([10, теорема 4]). *Существует такое* $k > 0$*, что оператор* $\widetilde{A} - \widetilde{B}$ *подобен оператору блочно-диагонального вида* $\widetilde{A} - J_k X_*$*, то есть*

$$(\widetilde{A} - \widetilde{B})(I + \Gamma_k X_*) = (I + \Gamma_k X_*)(\widetilde{A} - J_k X_*),$$

где оператор X_* *есть решение уравнения (8) с* Γ_k *и* J_k *и возмущением* $\widetilde{B}$.

Отметим, что теорема 7 вытекает из леммы 2 и теоремы 5, если учесть, что $d_n \to \infty$ при $|n| \to \infty$.

3. Доказательство основных результатов

Пусть $\mathcal{H}$ — абстрактное комплексное гильбертово пространство, причем оно представимо в виде взаимно ортогональных замкнутых подпространств $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, то есть

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n, \tag{10}$$

где $\mathcal{H}_i$ ортогонально $\mathcal{H}_j$ при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{Z}$, и $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_n$, $x_n \in \mathcal{H}_n$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|^2$. Такое представление пространства $\mathcal{H}$ ведет к существованию разложения единицы системой ортопроекторов $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

При этом проекторы $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, обладают свойствами:

1) $\mathcal{P}_n^* = \mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{Z}$;

2) $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = 0$ при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i$;

3) ряд $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{P}_n x$ безусловно сходится к $x \in \mathcal{H}$ и $\|x\|^2 = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \|\mathcal{P}_k x\|^2$.

Определение 3. *Линейный оператор $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ называется ортогональной прямой суммой ограниченных операторов $\mathcal{E}_n \in \operatorname{End} \mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, относительно разложения вида (10), при этом используется запись*

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}_n, \tag{11}$$

если:

1) $\mathcal{H}_n \subset D(\mathcal{E})$ для всех $n \in \mathbb{Z}$;

2) каждое подпространство $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, инвариантно для оператора $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, есть сужение оператора $\mathcal{E}$ на подпространство $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Операторы $\mathcal{E}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, называются частями оператора $\mathcal{E}$.

Невозмущенный оператор $\widetilde{A} : D(\widetilde{A}) \subset l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ есть прямая ортогональная сумма операторов относительно разложения $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z})$ вида (10), где $\mathcal{H}_n = \operatorname{Im} P_n$, $n \in \mathbb{Z}$, имеющих ранг один, то есть

$$\widetilde{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (a(n) + 2) I_n,$$

где символом I_n, $n \in \mathbb{Z}$, обозначен тождественный оператор в подпространстве $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$. При этом системой ортопроекторов, осуществляющих разложение единицы, является система его проекторов Рисса. Оператор $\widetilde{A}$ также является прямой ортогональной суммой операторов

$$\widetilde{A} = \left(\bigoplus_{|n| > k} A_n \right) \oplus A_{(k)}, \tag{12}$$

относительно разложения $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z})$ вида

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{(k)} \bigoplus_{|n| > k} \mathcal{H}_n, \tag{13}$$

где $\mathcal{H}_{(k)} = \operatorname{Im} Q_k$, $Q_k = \sum\limits_{|i| \leqslant k} P_i$, $A_{(k)} = A|\mathcal{H}_{(k)}$, $k \geqslant 0$, и ранг $A_{(k)}$ равен $2k+1$.

Теорема 8. *Существует такое число $k \geqslant 0$, что оператор $A - B$, определенный формулами (1), (2), подобен оператору, который является ортогональной прямой суммой операторов конечного ранга. Причем имеет место равенство*

$$(A - B)(I + \Gamma_k X_*) = (I + \Gamma_k X_*) \left(\left(\bigoplus_{|n| > k} \widetilde{A}_n \right) \oplus \widetilde{A}_{(k)} \right),$$

где ранг $\widetilde{A}_n$, $|n| > k$, равен 1, ранг $\widetilde{A}_{(k)}$, $k \geqslant 0$, равен $2k+1$, $\widetilde{A}_n = A_n - P_n X_* | \mathcal{H}_n$, $\widetilde{A}_{(k)} = A_{(k)} - Q_k X_* | \mathcal{H}_{(k)}$, и оператор X_* есть решение нелинейного операторного уравнения (8).

Доказательство. Из теоремы 7 следует, что оператор $\widetilde{A}-\widetilde{B} = A-B$ подобен оператору $\widetilde{A} - J_k X_*$. Непосредственно из определения трансформатора $J_k \in \operatorname{End} l_2(\mathbb{Z})$ следует, что оператор $J_k X$ допускает разложение в ортогональную прямую сумму операторов

$$J_k X = \left(\bigoplus_{n>k} X_n\right) \oplus X_{(k)},$$

где $X_{(k)} = Q_{(k)} X | \mathcal{H}_{(k)}$ и $X_n = P_n X | \mathcal{H}_n$, $|n| > k$. Таким образом, теорема 8 вытекает из теоремы 7.

Для операторов $\mathcal{E}$ вида (11) имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *Для того чтобы оператор $\mathcal{E}$ вида (11) был генератором некоторой сильно непрерывной полугруппы $T_0 : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathcal{H}$, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\sup_{t\in[0,a]} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|e^{\mathcal{E}_n t}\|_{\operatorname{End} \mathcal{H}_n} = C(a) < \infty, \tag{14}$$

где $a \geqslant 1$. Если условие (14) выполнено, то операторы $T_0(t)$, $t \geqslant 0$, представимы в виде ортогональной прямой суммы

$$T_0(t) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} e^{\mathcal{E}_n t}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

относительно разложения (10).

Доказательство. Если выполнено условие (14), то формула

$$T_0(t)x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\mathcal{E}_n t} \mathcal{P}_n x$$

определяет ограниченный оператор, что следует из равенства Парсеваля

$$\|T_0(t)x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|e^{\mathcal{E}_n t} \mathcal{P}_n x\|^2 \leqslant C^2(a) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\mathcal{P}_n x\|^2 = C^2(a)\|x\|^2.$$

Непосредственно проверяется, что операторы $T_0 \in \operatorname{End} \mathcal{H}$ образуют полугруппу операторов. Ввиду того, что она сильно непрерывна на плотном подпространстве векторов, представимых в виде $x = \sum\limits_{|n|\leqslant m} \mathcal{P}_n x$, $m \in \mathbb{Z}_+$, то она сильно непрерывна на всем пространстве $\mathcal{H}$.

Обратное утверждение очевидно. Лемма доказана.

Аналогичный результат имеет место для группы операторов. Таким образом, построение полугруппы (группы) операторов для исходного оператора сводится к построению полугруппы (группы) операторов для оператора, являющегося прямой ортогональной суммой операторов конечного ранга с использованием леммы 3.

Утверждения теорем 2–4 следуют из теоремы 7 и леммы 3. При этом, учитывая, что пространство $\mathcal{H}$ есть прямая сумма $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{(k)} \oplus \mathcal{H}^{(k)} = \mathcal{H}_{(k)} \oplus_{|i|>k} \mathcal{H}_i$, $\mathcal{H}^{(k)} = \operatorname{Im}(I - Q_k)$, $\mathcal{H}^{(k)} = \oplus_{|i|>k} \mathcal{H}_i$ и все операторы $\widetilde{A}_j$ имеют ранг, равный 1. Поэтому, при выполнении условий теоремы 7, соответствующая полугруппа имеет вид

$$\widetilde{T}^{(k)}(t)x = \sum_{|n|>k} e^{\mu_n t} P_n x, \quad x \in \mathcal{H}^{(k)}, \quad t \geqslant 0,$$

где числа μ_n определены формулами (3) или (4). В условиях теоремы 4 в силу теоремы Стоуна [18] оператор $i\mathcal{A}$ является генератором сильно непрерывной группы изометрий.

Пример 1. Все приведенные результаты имеют место в случае, если $a(n) = c_1 \operatorname{sign}(n) \cdot |n|^\alpha + c_2$, $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha > 1$ и c_1, c_2 — некоторые константы, причем $c_1 \neq 0$.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00197).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков, А. Г. Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. — Воронеж : Изд-во ВГУ, 1987. — 165 с.

2. Баскаков, А. Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов / А. Г. Баскаков // Сиб. мат. журн. — 1983. — Т. 24, № 1. — С. 21–39.

3. Баскаков, А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков // Изв. РАН. Сер.: Математическая. — 2011. — Т. 75, № 3. — С. 3–28.

4. Баскаков, А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, Д. М. Поляков // Мат. сб. — 2017. — Т. 208, № 1. — С. 3–47.

5. Баскаков, А. Г. Оценка функции Грина и параметров экспоненциальной дихотомии гиперболической полугруппы операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // Мат. сб. — 2015. — Т. 206, № 8. — С. 23–62.

6. Баскаков, А. Г. Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов / А. Г. Баскаков // Изв. РАН. Сер.: Математическая. — 1994. — Т. 54, № 4. — С. 3–32.

7. Баскаков, А. Г. Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений / А. Г. Баскаков // Изв. АН СССР. Сер.: Математическая. — 1986. — Т. 50, № 3. — С. 435–457.

8. Гаркавенко, Г. В. Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств одного класса разностных операторов / Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова // Вестник ВГУ. Серия Физика-Математика. — 2016. — № 3. — С. 101–111.

9. Гаркавенко, Г. В. Метод подобных операторов в спектральном анализе разностного оператора с растущим четным потенциалом / Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова, А. Р. Зголич // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. — 2016. — Вып. 44. — № 20 (241). — С. 42–49.

10. Гаркавенко, Г. В. Спектральный анализ одного класса разностных операторов с растущим потенциалом / Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16, № 4. — С. 395–402.

11. Гаркавенко, Г. В. Спектральный анализ разностных операторов второго порядка с растущим потенциалом / Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — Т. 28, № 3. — С. 40–48.

12. Мусилимов, В. Оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц, соответствующего разностному уравнению Штурма — Лиувилля / В. Мусилимов, М. Отелбаев // Журн. вычисл. мат. и математ. физики. — 1981. — Т. 21, № 6. — С. 1430–1434.

13. Поляков, Д. М. Спектральные свойства одномерного оператора Шрёдингера / Д. М. Поляков // Вестник ВГУ. Серия: Физика-Математика. — 2016. — № 2. — С. 146–152.

14. Ускова, Н. Б. О спектральных свойствах одного дифференциального оператора второго порядка с матричным потенциалом / Н. Б. Ускова // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 5. — С. 557–567.

15. Ускова, Н. Б. О спектральных свойствах оператора Штурма — Лиувилля с матричным потенциалом / Н. Б. Ускова // Уфим. мат. журн. — 2015. — Т. 7, № 3. — С. 88–99.

16. Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле. — М. : Изд-во иностр. лит., 1962. — 830 с.

17. Шелковой, А. Н. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора с нелокальными краевыми условиями / А. Н. Шелковой // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. — 2016. — Т. 13 (234), № 43. — С. 73–80.

18. Engel, K.-J. One-parameter semigroups for linear evolution equations / K.-J. Engel, R. Nagel. — New York ; Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1999. — 609 p.

REFERENCES

1. Baskakov A.G. *Garmonicheskiy analiz lineynykh operatorov* [Harmonic Analysis of Linear Operators]. Voronezh, VGU Publ., 1987. 165 p.

2. Baskakov A.G. Metody abstraktnogo garmonicheskogo analiza v teorii vozmushcheniy lineynykh operatorov [Methods of Abstract Harmonic Analysis in the Perturbation of Linear Operators]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 1983, vol. 24, no. 1, pp. 21-39.

3. Baskakov A.G., Derbushev A.V., Shcherbakov A.O. Metod podobnykh operatorov v spektralnom analize nesamosopryazhennogo operatora Diraka s negladkim potentsialom [The Method of Similar Operators in the Spectral Analysis of Non-Self-Adjoint Dirac Operators with Non-Smooth Potentials]. *Izv. RAN. Ser.: Matematicheskaya* [Izvestiya: Mathematics], 2011, vol. 75, no. 3, pp. 3-28.

4. Baskakov A.G., Polyakov D.M. Metod podobnykh operatorov v spektralnom analize operatora Khilla s negladkim potentsialom [The Method of Similar Operators in Spectral Analysis of the Hill Operator with Nonsmooth Potential]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 2017, vol. 208, no. 1, pp. 3-47.

5. Baskakov A.G. Otsenka funktsii Grina i parametrov eksponentsialnoy dikhotomii giperbolicheskoy polugruppy operatorov i lineynykh otnosheniy [Estimates for the Green's Function and Parameters of Exponential Dichotomy of a Hyperbolic Operator Semigroup and Linear Relations]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 2015, vol. 206, no. 8, pp. 23-62.

6. Baskakov A.G. Spektralnyy analiz vozmushchennykh nekvazianaliticheskikh i spektralnykh operatorov [Spectral Analysis of Perturbed Nonquasianalytic and Spectral Operators]. *Izv. RAN. Ser.: Matematicheskaya* [Izvestiya: Mathematics], 1994, vol. 54, no. 4, pp. 3-32.

7. Baskakov A.G. Teorema o rasshcheplenii operatora i nekotorye smezhnye voprosy analiticheskoy teorii vozmushcheniy [A Theorem on Splitting an Operator, and Some Related Questions in the Analytic Theory of Perturbations]. *Izv. AN SSSR. Ser.: Matematicheskaya* [Izvestiya: Mathematics], 1986, vol. 50, no. 3, pp. 435-457.

8. Garkavenko G.V., Uskova N.B. Metod podobnykh operatorov v issledovanii spektralnykh svoystv odnogo klassa raznostnykh operatorov [The Method of Similar Operators in the Study of Spectral Properties of Class for the Difference Operators]. *Vestnik VGU. Seriya Fizika-Matematika*, 2016, no. 3, pp. 101-111.

9. Garkavenko G.V., Uskova N.B., Zgolich A.R. Metod podobnykh operatorov v spektralnom analize raznostnogo operatora s rastushchim chetnym potentsialom [The Method of Similar Operators in Spectral Analysis of the Difference Operator with Even Growing Potential]. *Nauchnye vedomosti BelGU. Seriya: Matematika. Fizika*, 2016, iss. 44, no. 20 (241), pp. 42-49.

10. Garkavenko G.V., Uskova N.B. Spektralnyy analiz odnogo klassa raznostnykh operatorov s rastushchim potentsialom [Spectral Analysis of the Class for Difference Operators with Growing Potential]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2016, vol. 16, no. 4, pp. 395-402.

11. Garkavenko G.V., Uskova N.B. Spektralnyy analiz raznostnykh operatorov vtorogo poryadka s rastushchim potentsialom [Spectral Analysis of Second Order Difference Operators with Growing Potential]. *Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki*, 2015, vol. 28, no. 3, pp. 40-48.

12. Musilimov V., Otelbaev M. Otsenka naimenshego sobstvennogo znacheniya odnogo klassa matrits, sootvetstvuyushchego raznostnomu uravneniyu Shturma — Liuvillya [Estimation of the Least Eigenvalues for the Matrix Class Corresponding to the Sturm — Liouville Difference Equation]. *Zhurn. vychisl. mat. i matemat. fiziki* [USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1981, vol. 21, no. 6, pp. 1430-1434.

13. Polyakov D.M. Spektralnye svoystva odnomernogo operatora Shrëdingera [Spectral Properties of 1D Shrödinger Operator]. *Vestnik VGU. Seriya: Fizika-Matematika.*, 2016, no. 2, pp. 146-152.

14. Uskova N.B. O spektralnykh svoystvakh odnogo differentsialnogo operatora vtorogo poryadka s matrichnym potentsialom [On Spectral Properties of Second Order Differential Operator with Matrix Potential]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 2016, vol. 52, no. 5, pp. 557-567.

15. Uskova N.B. O spektralnykh svoystvakh operatora Shturma — Liuvillya s matrichnym potentsialom [On Spectral Properties of Second Order Differential Operator with Matrix Potential]. *Ufim. mat. zhurn.* [Ufa Math. Journal], 2015, vol. 7, no. 3, pp. 88-99.

16. Khille E. *Funktsionalnyy analiz i polugruppy* [Functional Analysis and Semi-Groups]. Moscow, Izd-vo inostr. lit. Publ., 1962. 830 p.

17. Shelkovoy A.N. Asimptotika sobstvennykh znacheniy differentsialnogo operatora s nelokalnymi kraevymi usloviyami [Asymptotic of Eigenvalues of Differential Operators with Nonlocal Boundary Conditions]. *Nauchnye vedomosti BelGU. Seriya: Matematika. Fizika*, 2016, vol. 13 (234), no. 43, pp. 73-80.

18. Engel K.-J., Nagel R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. New York, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1999. 609 p.

THE ASYMPTOTIC OF EIGENVALUES FOR DIFFERENCE OPERATOR WITH GROWING POTENTIAL

Galina Valerievna Garkavenko

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Informatics and Mathematics Teaching Methodology,
Voronezh State Pedagogical University
g.garkavenko@mail.ru
Lenina St., 86, 394043 Voronezh, Russian Federation

Natalya Borisovna Uskova

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Mathematics and Physical-Mathematical Modeling,
Voronezh State Technical University
nat-uskova@mail.ru
Prosp. Moskovsky, 14, 394026 Voronezh, Russian Federation

Abstract. We consider $A : D(A) \subset l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$, $(Ax)(n) = a(n)x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in D(A)$, and $(Bx)(n) = -2x(n) + x(n-1) + x(n+1)$. Let $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ be a sequence with property:

1) $a(i) \neq a(j)$, $i \neq j$;
2) $\lim\limits_{|n|\to\infty} |a(n)| = \infty$;

3) $0 < d_i = \inf_{i \neq j} |a(i) - a(j)| \to \infty$, $|i| \to \infty$.

By $\mathcal{A}$ we denote the operator $A - B$. By P_n we denote $P_n = P(a(n), A)$, $n \in \mathbb{Z}$, and by Q_k denote the operator $Q_k = \sum\limits_{|i| \leqslant k} P_i$.

Theorem 1. There exists a number $k \geqslant 0$, such that the spectrum $\sigma(\mathcal{A})$ of operator $\mathcal{A}$ has form

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_{(k)} \bigcup \Big(\bigcup_{|i|>k} \sigma_i \Big),$$

where $\sigma_{(k)}$ is a finite set with number of points not exceeding $2k+1$ and $\sigma_i = \{\mu_i\}$, $|i| > k$, are singleton sets. The asymptotic formulas of eigenvalues have the following form:

$$\mu_i = a(i) + 2 + O(d_i^{-1}),$$

$$\mu_i = a(i) + 2 - \frac{a(i+1) - 2a(i) + a(i-1)}{(a(i+1) - a(i))(a(i-1) - a(i))} + O(d_i^{-3}), \quad |i| > k.$$

Theorem 2. Let the sequence $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ satisfies the condition $\operatorname{Re} a(n) \leqslant \beta$ for all $n \in \mathbb{Z}$ and a $\beta \in \mathbb{R}$. Then the operator $\mathcal{A}$ is the generator of the semigroup operators $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} l_2(\mathbb{Z})$ and this semigroup is similar to $\widetilde{T} : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} l_2(\mathbb{Z})$ type

$$\widetilde{T}(t) = \widetilde{T}_{(k)}(t) \oplus \widetilde{T}^{(k)}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

acting in $l_2(\mathbb{Z}) = \mathcal{H}_{(k)} \oplus \mathcal{H}^{(k)}$, where $\mathcal{H}_{(k)} = \operatorname{Im} Q_k$ and $\mathcal{H}^{(k)} = \operatorname{Im}(I - Q_k)$. The semigroup $\widetilde{T}^{(k)} : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathcal{H}^{(k)}$ determined by the formula

$$\widetilde{T}^{(k)}(t)x = \sum_{|n|>k} e^{\mu_n t} P_n x, \quad x \in \mathcal{H}^{(k)}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

where the numbers μ_n, $|n| > k$, are defined by Theorem 1.

Theorem 3. Let $\alpha \leqslant \operatorname{Re} a(n) \leqslant \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, for every $n \in \mathbb{Z}$. Then the operator $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ is generator of group $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} l_2(\mathbb{Z})$. This group is similar to $\widetilde{T} : \mathbb{R} \to \operatorname{End} l_2(\mathbb{Z})$, where $\widetilde{T}(t) = \widetilde{T}_{(k)}(t) \oplus \widetilde{T}^{(k)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ and

$$\widetilde{T}^{(k)}(t)x = \sum_{|n|>k} e^{\mu_n t} P_n x, \quad x \in \mathcal{H}^{(k)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Theorem 4. Let the operator $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ be self-adjoint. Then $i\mathcal{A}$ is a generator of isometric group $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} l_2(\mathbb{Z})$. This group is similar to

$$\widetilde{T}(t) = \widetilde{T}_{(k)}(t) \oplus \widetilde{T}^{(k)}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

and

$$\widetilde{T}^{(k)}(t)x = \sum_{|n|>k} e^{i\mu_n t} P_n x, \quad x \in \mathcal{H}^{(k)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Key words: method of similar operators, difference operator, eigenvalues, semigroup of operators, generator of operator semigroup.