DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.5.3
УДК 517.925.52 + 517.926
ББК 22.161.6

О ГРУБОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Владимир Шлеймович Ройтенберг
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики,
Ярославский государственный технический университет
vroitenberg@mail.ru
просп. Московский, 88, 150023 г. Ярославль, Российская Федерация

Аннотация. Рассматриваются линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с ω-периодическими коэффициентами. Даны необходимые и достаточные условия грубости в цилиндрическом фазовом пространстве $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} / \omega\mathbf{Z}$ относительно пространства всех таких систем. При $n = 2$ также получены необходимые и достаточные условия грубости в фазовом пространстве $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{R} / \omega\mathbf{Z}$.

Ключевые слова: линейные дифференциальные уравнения, периодические коэффициенты, проективная плоскость, грубые уравнения, мультипликаторы.

В работе автора [3] рассматривались ω-периодические линейные неоднородные дифференциальные системы n-го порядка в фазовом пространстве $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} / \omega\mathbf{Z}$ и их естественные продолжения на фазовое пространство $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{R} / \omega\mathbf{Z}$. Были получены необходимые и достаточные условия грубости в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} / \omega\mathbf{Z}$ относительно банахова пространства LS_ω^n всех таких систем. В случае $n = 2$ были также доказаны необходимые и достаточные условия грубости в фазовом пространстве $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{R} / \omega\mathbf{Z}$ относительно пространства LS_ω^2.

В настоящей работе мы получим аналогичные результаты для линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

1. Обозначения и определения. Будем рассматривать линейные дифференциальные уравнения n-го порядка $(n \geq 2)$

$$l:\ x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t), \tag{1}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ и f – непрерывные ω-периодические функции. Уравнение l естественно отождествляется с векторной функцией $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, f): \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n+1}$, а множество LE_ω^n всех таких уравнений с банаховым пространством непрерывных ω-периодических функций $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n+1}$ – с равномерной нормой $\|l\| := \max_t \max\{|a_0(t)|, |a_1(t)|, \ldots, |a_{n-1}(t)|, |f(t)|\}$.

От уравнения l перейдем к линейной системе

$$x_1' = x_2, \ldots, x_{n-1}' = x_n,\ x_n' = -a_0(t)x_1 - \ldots - a_{n-1}(t)x_n + f(t). \tag{2}$$

Под *траекториями уравнения* l *в* $\Phi^n := \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} / \omega\mathbf{Z}$ будем понимать траектории динамической системы

$$x_1' = x_2, ..., x_{n-1}' = x_n,\ x_n' = -a_0(s)x_1 - .... - a_{n-1}(s)x_n + f(s),\ s' = 1$$

в фазовом пространстве Φ^n.

Пусть $X(t) = X(t,l)$ – нормированная фундаментальная матрица уравнения l, точнее, соответствующей линейной системы (2). Как обычно, мультипликаторами уравнения называются собственные значения матрицы монодромии $X(\omega)$.

Будем рассматривать $\mathbf{R}^n$ как аффинную часть проективного пространства $\mathbf{RP}^n$. Система (2) единственным образом продолжается до динамической системы на фазовом пространстве $\overline{\Phi}^n := \mathbf{RP}^n \times \mathbf{R} / \omega\mathbf{Z}$. Ее траектории будем называть *траекториями уравнения l в $\overline{\Phi}^n$*. «Бесконечно удаленное» множество $\mathrm{E} := \overline{\Phi}^n \setminus \Phi^n \equiv \mathbf{RP}^{n-1} \times \mathbf{R} / \omega\mathbf{Z}$ состоит из траекторий.

Определение 1. *Уравнения $l \in \mathrm{LE}^n_\omega$ и $\widetilde{l} \in \mathrm{LE}^n_\omega$ топологически эквивалентны в* Φ^n (*в* $\overline{\Phi}^n$), если существует гомеоморфизм $h : \Phi^n \to \Phi^n$ ($h : \overline{\Phi}^n \to \overline{\Phi}^n$, $h(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$), переводящий ориентированные траектории уравнения l в Φ^n (в $\overline{\Phi}^n$) в ориентированные траектории уравнения $\widetilde{l}$ в Φ^n (в $\overline{\Phi}^n$).

Определение 2. *Уравнение $l \in \mathrm{LE}^n_\omega$ называется грубым в* Φ^n (*в* $\overline{\Phi}^n$) [*относительно пространства* LE^n_ω], если существует такая его окрестность V в LE^n_ω, что l и любое уравнение $\widetilde{l} \in V$ топологически эквивалентны в Φ^n (в $\overline{\Phi}^n$).

2. Формулировки результатов. Обозначим $\Sigma_0\mathrm{LE}^n_\omega$ множество уравнений из LE^n_ω с мультипликаторами, не лежащими на единичной окружности.

Теорема 1. 1) *Уравнение $l \in \mathrm{LE}^n_\omega$ является грубым в Φ^n тогда и только тогда, когда оно принадлежит $\Sigma_0\mathrm{LE}^n_\omega$.*

2) *Уравнения $l \in \mathrm{LE}^n_\omega$, грубые в Φ^n, всюду плотны в LE^n_ω.*

Обозначим $\Sigma = \Sigma\mathrm{LE}^2_\omega$ множество уравнений из LE^2_ω, мультипликаторы которых действительны, различны и не совпадают с ± 1. Выделим в Σ подмножества Σ^+_s, Σ^-_s, Σ^+_{ns}, Σ^-_{ns}, Σ^+_{nu} и Σ^-_{nu}, состоящие из уравнений l с мультипликаторами μ_1 и μ_2, для которых $0 < \mu_1 < 1 < \mu_2$ ($\mu_2 < -1 < \mu_1 < 0$), если $l \in \Sigma^+_s$ ($l \in \Sigma^-_s$), $0 < \mu_1 < \mu_2 < 1$ ($-1 < \mu_1 < \mu_2 < 0$), если $l \in \Sigma^+_{ns}$ ($l \in \Sigma^-_{ns}$), $1 < \mu_1 < \mu_2$ ($\mu_1 < \mu_2 < -1$), если $l \in \Sigma^+_{nu}$ ($l \in \Sigma^-_{nu}$).

Теорема 2. 1) *Уравнение $l \in \mathrm{LE}^2_\omega$ является грубым в $\overline{\Phi}^2$ тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству $\Sigma = \Sigma\mathrm{LE}^2_\omega$.*

2) *Динамические системы, задаваемые в $\overline{\Phi}^2$ уравнениями из Σ, являются системами Морса-Смейла* [2]. *Множества Σ^+_s, Σ^-_s, Σ^+_{ns}, Σ^-_{ns}, Σ^+_{nu}* и *Σ^-_{nu} – классы топологической эквивалентности в $\overline{\Phi}^2$ уравнений из Σ.*

Замечание. Структура фазовых портретов в $\overline{\Phi}^2$ уравнений из $\Sigma\mathrm{LE}^2_\omega$ описана в [1].

3. Грубость в Φ^n. Доказательство теоремы 1. Уравнения $l \in \Sigma_0\mathrm{LE}^n_\omega$ имеют в Φ^n единственную гиперболическую периодическую траекторию, их грубость – известный факт [2].

Пусть уравнение $l \in \mathrm{LE}^n_\omega \setminus \Sigma_0\mathrm{LE}^n_\omega$ имеет вид (1). Сделаем в соответствующем однородном уравнении

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0 \tag{3}$$

замену $y = x\exp\varepsilon g(t)$, где $g(t) = \int_0^t \sin^{2n}(2\pi\theta / \omega)\, d\theta$. Получим уравнение

$$y^{(n)} + (a_{n-1}(t) + \varepsilon d_{n-1}(t,\varepsilon))y^{(n-1)} + ... + (a_1(t) + \varepsilon d_1(t,\varepsilon))y' + (a_0(t) + \varepsilon d_0(t,\varepsilon))y = 0, \tag{4}$$

где $d_0(t,\varepsilon), \ldots, d_{n-1}(t,\varepsilon)$ – непрерывные функции, ω-периодические по t. Если $x(t)$ – решение уравнения (3), то $y(t) = x(t)\exp\varepsilon g(t)$ – решение уравнения (4) и $y^{(k)}(0) = x^{(k)}(0)$, $y^{(k)}(\omega) = x^{(k)}(\omega)\exp\varepsilon\, g(\omega)$ для всех $k = 0,1,...,n-1$. Поэтому матрица монодромии уравнения

$$l_\varepsilon \in \mathrm{LE}^n_\omega :\ y^{(n)} + (a_{n-1}(t) + \varepsilon d_{n-1}(t,\varepsilon))y^{(n-1)} + ... + (a_1(t) + \varepsilon d_1(t,\varepsilon))y' + a_0(t)y = f(t)$$

получается из матрицы монодромии уравнения l умножением на $\exp\varepsilon g(\omega)$: $X(\omega, l_\varepsilon) = X(\omega, l)\exp\varepsilon g(\omega)$. Для любой окрестности V уравнения l в LE^n_ω найдется такое $\overline{\varepsilon} > 0$, что при всех $\varepsilon \in (-\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon})$ $l_\varepsilon \in V$.

Поскольку все собственные значения матрицы $X(\omega, l_\varepsilon)$ получаются из собственных значений матрицы $X(\omega, l)$ умножением на $\exp \varepsilon g(\omega)$, а $g(\omega) > 0$, то при достаточно малом $\overline{\varepsilon}$, для всех ε, $0 < |\varepsilon| < \overline{\varepsilon}$, их модули отличны от единицы. Таким образом, в V есть уравнения из $\Sigma_0 \mathrm{LE}^n_\omega$, то есть $\Sigma_0 \mathrm{LE}^n_\omega$ всюду плотно в LE^n_ω.

Покажем, что любое уравнение $l \in \mathrm{LE}^n_\omega \setminus \Sigma_0 \mathrm{LE}^n_\omega$ – негрубое в Φ^n. Уравнение из $\Sigma_0 \mathrm{LE}^n_\omega$ имеет единственную гиперболическую периодическую траекторию, устойчивое инвариантное многообразие которой имеет размерность $n_- + 1$, где n_- – сумма кратностей мультипликаторов с модулем меньшим единицы [2]. Но для уравнения l_ε при достаточно малых $|\varepsilon|$ числа n_- разные для положительных и отрицательных значений ε. Следовательно, хотя бы одно из этих уравнений не топологически эквивалентно l и потому l – негрубое уравнение.

Теорема 1 доказана.

5. Грубость в $\overline{\Phi}^2$. Доказательство теоремы 2. Грубость в $\overline{\Phi}^2$ уравнения $l \in \Sigma \mathrm{LE}^2_\omega$ и утверждение 2) теоремы следуют из [1].

Покажем, что уравнение $l \in \mathrm{LE}^2_\omega$: $x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t)$, грубое в $\overline{\Phi}^2$, принадлежит множеству $\Sigma \mathrm{LE}^2_\omega$. Так как уравнение, грубое в $\overline{\Phi}^2$, является и грубым в Φ^2, то по теореме 1 $l \in \Sigma_0 \mathrm{LE}^2_\omega$. Предположим, что $l \in \Sigma_0 \mathrm{LE}^2_\omega \setminus \Sigma \mathrm{LE}^2_\omega$, и получим противоречие.

Пусть $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}$ – нормированная фундаментальная матрица уравнения l, а μ_1 и μ_2 – его мультипликаторы. Обозначим также $A := (x_1(\omega) + x_2'(\omega))/2$, $W(t) := \det X(t) = \exp\left(-\int_0^t p(s)ds\right)$.

Пусть сначала $A^2 < W(\omega)$, то есть мультипликаторы комплексные: $\mu_{1,2} = A \pm i\sqrt{W(\omega) - A^2}$. Тогда $x_2(\omega) \neq 0$. Выберем число N, удовлетворяющее условиям

$$N > 1,\ N > \max_{0 \le t \le 1} \max_{k=1,2} \max\{|x_k(t)|, |x_k'(t)|\},\ N > 100/|x_2(\omega)|, \tag{5}$$

а затем число $\delta \in (0, \omega)$ так, чтобы

$$\forall t \in [0,\delta]\ \ 2^{-1} < x_1(t) < 2,\ |x_1'(t)| < N^{-2},\ |x_2(t)| < N^{-2},\ 2^{-1} < x_2'(t) < 2,\ 2^{-1} < W(t) < 2. \tag{6}$$

Рассмотрим уравнение $l_\varepsilon \in \mathrm{LE}^2_\omega$: $x'' + p(t)x' + (q(t) - \varepsilon g(t))x = f(t)$, где $g(t)$ – непрерывная ω-периодическая функция, удовлетворяющая условиям:

$$g(t) = 0 \text{ при } t \in [\delta, \omega],\ 0 < g(t) \le 2 \text{ при } t \in (0, \delta),\ \int_0^\omega g(t)dt = \int_0^\delta g(t)dt = \delta. \tag{7}$$

Можно, например, взять $g(t) = 2 - 2\delta^{-1}|\delta - 2t|$ для $t \in (0, \delta)$.

Пусть $x_1^*(t,\varepsilon)$ и $x_2^*(t,\varepsilon)$ – решения соответствующего однородного уравнения $x'' + p(t)x' + (q(t) - \varepsilon g(t))x = 0$, удовлетворяющие начальным условиям $x_1^*(0,\varepsilon) = 1$, $(x_1^*)_t'(0,\varepsilon) = 0$ и $x_2^*(0,\varepsilon) = 0$, $(x_2^*)_t'(0,\varepsilon) = 1$. Тогда $x_k^*(t,0) \equiv x_k(t)$ $(k = 1,2)$. Мультипликаторы уравнения l_ε при достаточно малом $|\varepsilon|$ имеют вид

$$\widetilde{\mu}_{1,2} = \widetilde{A}(\varepsilon) \pm i\sqrt{W(\omega) - \widetilde{A}^2(\varepsilon)} = \sqrt{W(\omega)}\, e^{\pm i\theta(\varepsilon)},$$

где $\widetilde{A}(\varepsilon) = (x_1^*(\omega,\varepsilon) + (x_2^*)_t'(\omega,\varepsilon))/2$, $\theta(\varepsilon) = \operatorname{arcctg} \dfrac{\widetilde{A}(\varepsilon)}{\sqrt{W(\omega) - \widetilde{A}^2(\varepsilon)}}$.

Производная $y_k(t) = \partial x_k^*(t,0)/\partial\varepsilon$ $(k = 1, 2)$ удовлетворяет уравнению в вариациях $y_k'' + p(t)y_k' + q(t)y_k = g(t)x_k(t)$ и нулевым начальным условиям: $y_k(0) = y_k'(0) = 0$. Поэтому

$$y_k(\omega) = -x_1(\omega)\int_0^\omega W^{-1}(t)g(t)x_k(t)x_2(t)\,dt + x_2(\omega)\int_0^\omega W^{-1}(t)g(t)x_k(t)x_1(t)\,dt, \tag{8}$$

$$y_2'(\omega) = -x_1'(\omega)\int_0^{\omega} W^{-1}(t)g(t)x_2^2(t)\,dt + x_2'(\omega)\int_0^{\omega} W^{-1}(t)\,g(t)\,x_1(t)\,x_2(t)\,dt. \qquad (9)$$

Из (5)–(7) получаем

$$\int_0^{\omega} W^{-1}(t)g(t)x_1^2(t)dt \geq \delta/8. \qquad (10)$$

$$0 \leq \int_0^{\omega} W^{-1}(t)g(t)x_2^2(t)dt \leq 2\delta/N^2,\ \left|\int_0^{\omega} W^{-1}(t)g(t)x_1(t)x_2(t)dt\right| \leq 4\delta/N^2. \qquad (11)$$

Вследствие (8)–(11) и (5)

$$2\,|\,\widetilde{A}'(0)\,| = |\,y_1(\omega) + y_2'(\omega)\,| \geq |\,x_2(\omega)\,|\,\delta/8 - 10\delta/N > 0\,.$$

Но тогда и $\theta'(0) \neq 0$. Поэтому при достаточно малом $\overline{\varepsilon} > 0$ $\theta(\varepsilon)$ – непрерывная монотонí àÿ ôóí êöèÿ í à $(-\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon})$. Из работы [1] следует, что уравнения l_ε и l не могут быть топологически эквивалентными в $\overline{\Phi}^2$ при всех $\varepsilon \in (-\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon})$. Но это противоречит предположению о грубости l в $\overline{\Phi}^2$, поскольку уравнение l_ε можно сделать сколь угодно близким к l, выбрав ε достаточно малым.

Пусть теперь $A^2 = W(\omega)$, то есть $\mu_{1,2} = A$. Если $x_2(\omega) \neq 0$, то, как и выше, $\widetilde{A}'(0) \neq 0$. Если $x_2(\omega) = 0$, $x_1'(\omega) \neq 0$, то $x_1(\omega) = x_2'(\omega) = \mu_{1,2} = A$. Из (8)–(9) получим

$$\widetilde{A}'(0) = -\tfrac{1}{2}x_1'(\omega)\int_0^{\delta} W^{-1}(t)\,g(t)x_2^2(t)\,dt. \qquad (12)$$

Функция $x_2(t)$ не равна тождественно нулю на $(0,\delta)$. Если бы это было не так, то $x_2'(t)$, а потому и $W(t)$ обращалось бы в нуль, что невозможно. Поскольку $x_2(t), W^{-1}(t)$ и $g(t)$ непрерывны, $W^{-1}(t) > 0$, $g(t) > 0$ при $t \in (0,\delta)$, то из (12) следует, что $\widetilde{A}'(0) \neq 0$. Так как в обоих рассмотренных случаях $\widetilde{A}'(0) \neq 0$, то в любой окрестности уравнения l есть как уравнения с различными действительными мультипликаторами, так и уравнения с комплексными сопряженными мультипликаторами. Как следует из [1], такое уравнение не может быть грубым в $\overline{\Phi}^2$.

Осталось получить противоречие в случае, когда $x_1'(\omega) = x_2(\omega) = 0$. Из (8) следует, что

$$\partial x_2^*(\omega,0)/\partial\varepsilon = y_2(\omega) = -x_1(\omega)\int_0^{\omega} W^{-1}(t)g(t)\,x_2^2(t)\,dt \neq 0.$$

Поскольку $x_2^*(\omega,0) = x_2(\omega) = 0$, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ $x_2^*(\omega,\varepsilon) \neq 0$. Будем считать, что ε выбрано столь малым, что l_ε также грубое уравнение, топологически эквивалентное l в $\overline{\Phi}^2$. Выше доказано, что в этом случае l_ε не может иметь комплексных или кратных действительных мультипликаторов. Различных действительных мультипликаторов оно также не может иметь, так как в этом случае, согласно [1], оно не будет топологически эквивалентно l в $\overline{\Phi}^2$. Получили противоречие. Тем самым, теорема 2 доказана.

Замечания. 1) Линейные однородные уравнения образуют линейное подпространство ${}^0\mathrm{LE}_\omega^n$ в LE_ω^n. Множество уравнений из ${}^0\mathrm{LE}_\omega^n$ (${}^0\mathrm{LE}_\omega^2$), грубых в Φ^n (в $\overline{\Phi}^2$) относительно ${}^0\mathrm{LE}_\omega^n$ (${}^0\mathrm{LE}_\omega^2$), очевидно, совпадает с $\Sigma_0\mathrm{LE}_\omega^n \cap {}^0\mathrm{LE}_\omega^n$ $\left(\Sigma\mathrm{LE}_\omega^2 \cap {}^0\mathrm{LE}_\omega^2\right)$.

2) Хотя в условиях грубости не фигурирует правая часть уравнения, она начинает играть роль при изучении бифуркаций в $\overline{\Phi}^n$. Это видно из [3], а также из работы [2], где описаны типичные бифуркации, при которых гиперболическая периодическая траектория линейной неоднородной системы в $\overline{\Phi}^n$ «исчезает из Φ^n, уходя в бесконечность».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Палис, Дж. Геометрическая теория динамических систем. Введение : пер. с англ. / Дж. Палис, В. ди Мелу. – М. : Мир, 1986. – 301 с.
2. Ройтенберг, В. Ш. О бифуркациях периодических траекторий линейных неоднородных дифференциальных систем с периодическими коэффициентами / В. Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика : межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. – Ярославль : Изд. дом ЯГТУ, 2016. – С. 66–71.
3. Ройтенберг, В. Ш. О структуре пространства систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами / В. Ш. Ройтенберг // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. – 2017. – № 1 (38). – С. 13–21. – DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.1.2.

REFERENCES

1. Palis J., Melo W. *Geometric Theory of Dynamical Systems. An Introduction*. Moscow, Mir Publ., 1986. 301 p. (in Russian).
2. Roitenberg V.Sh. O bifurkatsiyakh periodicheskikh traektoriy lineynykh neodnorodnykh differentsialnykh sistem s periodicheskimi koeffitsientami [On Bifurcations of Periodic Orbits of Linear Non-Homogeneous Differential Systems With Periodic Coefficients]. *Matematika i estestvennye nauki. Teoriya i praktika : mezhvuz. sb. nauch. tr. Vyp. 11* [Mathematics and Natural Sciences. The Theory and Practice: Inter-university Collection of Scientific Works. Iss. 11]. Yaroslavl, YaSTU Publ., 2016, pp. 66-71.
3. Roitenberg V.Sh. O strukture prostranstva sistem lineynykh differentsialnykh uravneniy s periodicheskimi koeffitsientami [On the Structure of Space of Systems of Linear Differential Equations With Periodic Coefficients]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics]. 2017, no. 1 (38), pp. 13-21. DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.1.2.

ON THE STRUCTURAL STABILITY RELATIVE TO THE SPACE OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PERIODIC COEFFICIENTS

Vladimir Shlejmovich Roitenberg

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Higher Mathematics,
Yaroslavl State Technical University
vroitenberg@mail.ru
Prosp. Moskovsky, 88, 150023 Yaroslavl, Russian Federation

Abstract. Let LE_ω^n be the Banach space of linear non-homogeneous differential equations of order n with ω-periodic coefficients. We prove the following statements. The equation $l \in \mathrm{LE}_\omega^n$ is structurally stable in the phase space $\Phi^n := \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} / \omega\mathbf{Z}$ $(n \ge 2)$ if and only if its multiplicators do not belong to the unit circle. The set of all structurally stable equations is everywhere dense in LE_ω^n. The equation $l \in \mathrm{LE}_\omega^2$ is structurally stable in the phase space $\overline{\Phi}^2 := \mathbf{RP}^2 \times \mathbf{R} / \omega\mathbf{Z}$ if and only if its multiplicators are real, different and distinct from ± 1. We describe also the topological equivalence classis of structurally stable in $\overline{\Phi}^2$ equations.

Key words: linear differential equations, periodic coefficients, projective plane, structurally stable equations, multiplicators.