www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.5.1

УДК 514.752.44+514.772
ББК (В)22.161.5

ОБ УРАВНЕНИЯХ БЕЛЬТРАМИ С РАЗНОТИПНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ НА ДУГЕ

Александр Николаевич Кондрашов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет
ankondr@mail.ru, alexander.kondrashov@volsu.ru, kiem@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, разделенная жордановой дугой $E \subset D$ на две подобласти D_1 и D_2, и в этой области задано уравнение Бельтрами, возможно, переменного типа, вырождающееся вдоль E. В работе [6] были описаны два принципиально различных случая вырождения уравнения Бельтрами, при котором ассоциированное с ним классическое уравнение Бельтрами допускает единственное, с точностью до суперпозиции с конформным отображением, гомеоморфное решение. В настоящей работе доказывается, что справедлив «двусторонний» аналог вышеупомянутых результатов работы [6], допускающий, чтобы характер вырождения по разные стороны E был различным[1].

Ключевые слова: вырождающееся уравнение Бельтрами, комплексная дилатация, характеристики Лаврентьева, решение с особенностью, ассоциированное уравнение.

Введение

Пусть в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ задано дифференциальное уравнение — *уравнение Бельтрами* (см.: [2, гл. 2])

$$f_{\overline{z}}(z) = \mu(z) f_z(z), \quad (z = x_1 + ix_2 \in D), \tag{1}$$

где $\mu(z)$ ($|\mu(z)| \neq 1$ п.в. в D) — п.в. конечная измеримая комплекснозначная функция.

Хорошо известно (см.: [2, гл. 2]), что если во всякой подобласти $D' \Subset D$ выполнено условие $\operatorname{ess\,sup}_{D'} |\mu(z)| < 1$, то существует гомеоморфное решение $w = f(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, причем $z = f^{-1}(w) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D))$. Это решение единственно с точностью до суперпозиции с конформным отображением в плоскости w.

В дальнейшем *решением* уравнения (1) будем называть непрерывную функцию $f(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, удовлетворяющую ему п.в. в D.

Напомним [1, с. 7], что коэффициент $\mu(z) = f_{\overline{z}}(z)/f_z(z)$ называется *комплексной дилатацией* отображения $f(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$; его задание эквивалентно заданию п.в. в D поля распределения характеристик Лаврентьева $(p(z), \theta(z))$ (см. [14]). Отображение $w = f(z)$, первая характеристика которого п.в. в D удовлетворяет условию

$$p(z) \leq Q \equiv \mathrm{const}, \tag{2}$$

называется Q-*квазиконформным*. Если условие (2) выполняется в D локально (то есть со своим $Q = Q(D')$ для всякой области $D' \Subset D$), то отображение называется *локально квазиконформным*. Условие $\operatorname{ess\,sup}_{D} |\mu(z)| < 1$ ($\operatorname{ess\,sup}_{D'} |\mu(z)| < 1$ для всякой области $D' \Subset D$) эквивалентно условию квазиконформности (локальной квазиконформности).

Следует отметить, что в настоящее время известны более точные условия существования и единственности уравнения Бельтрами, чем условие $\operatorname{ess\,sup}_{D'} |\mu(z)| < 1$ (см., например, [11; 15]).

Уравнение Бельтрами с $|\mu(z)| < 1$ п.в. в D будем в дальнейшем называть *классическим*. Случаи $|\mu(z)| < 1$ п.в. в D и $|\mu(z)| > 1$ п.в. в D отличаются тем, что в первом случае гомеоморфные решения не меняют ориентацию, а во втором меняют. Различие здесь лишь формальное. Интерес представляет ситуация, когда одновременно существуют подобласти D, в которых п.в. выполнено $|\mu(z)| < 1$, и подобласти D, в которых п.в. $|\mu(z)| > 1$. В этом случае говорится, что уравнение Бельтрами имеет *переменный* тип. Его решения описывают отображения со складками, сборками и т. п. Задача исследования таких уравнений была поставлена Л.И. Волковыским [3], а ряд успехов в этом направлении был сделан в работах [16; 18]. Некоторые результаты в этом направлении были установлены нами в работах [5; 6].

Уравнению (1) будем ставить в соответствие (*классическое*) уравнение Бельтрами с комплексной дилатацией

$$\mu^*(z) = \begin{cases} \mu(z) & \text{при } |\mu(z)| \leq 1, \\ 1/\overline{\mu}(z) & \text{при } |\mu(z)| > 1. \end{cases}$$

Это уравнение называем в дальнейшем *уравнением, ассоциированным с уравнением* (1).

Очевидно, $|\mu^*(z)| < 1$ п.в. в D, причем в классическом случае $\mu(z) = \mu^*(z)$.

Тесная взаимосвязь между решениями ассоциированного уравнения и первоначального уравнения (1) была показана в [6; 8; 12].

Пусть имеется функция $f(z) : D \to \mathbb{R}$. Если существует функция $K(z) \in W^{1,2}(D)$, такая, что

$$f(z) \leq K(z),$$

то функция $f(z)$ называется $W^{1,2}$-*мажорируемой* в D. Если $f(z)$ является $W^{1,2}$-*мажорируемой* во всякой подобласти $D' \Subset D$, то говорят, что $f(z)$ является *локально*

$W^{1,2}$-*мажорируемой* в D. Для краткости вместо «локально $W^{1,2}$-мажорируема» всюду ниже будем писать «$W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-мажорируема».

Если функция f абсолютно непрерывна внутри почти всех сечений [2] области D прямыми параллельными осям координат, то будем говорить, что f принадлежит классу ACL в D, кратко записывая это в виде «$f \in ACL$ в D». В дальнейшем связь между функциями классов Соболева и функциями класса ACL предполагается известной (см., например, [10, с. 14] или [4, с. 122]).

Пусть существует замкнутое относительно D множество $E \subset D$ меры $\mathrm{mes}_2\, E = 0$. Если непрерывная в D функция $f(z)$ является решением уравнения (1) в $D \setminus E$ [3], то функцию $f(z)$ будем называть *решением с особенностью* E данного уравнения.

Наличие особенностей у решений характерно для уравнений (1) *вырождающихся* на некотором множестве E, то есть таком E, что

$$\operatorname*{ess\,inf}_{B_r(z)\bigcap D} ||\mu(z)| - 1| = 0$$

для всякого $r > 0$, где $B_r(z)$ — круг с центром $z \in E$. При этом в качестве E часто выступает множество раздела между $\{z : z \in D, |\mu(z)| < 1\}$ и $\{z : z \in D, |\mu(z)| > 1|\}$.

1. Уравнения Бельтрами с вырождением

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и $v = T(z) : D \to T(D) \subset \mathbb{C}$ — некоторый гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию.

Определим в D функцию

$$\mathrm{Q}_T(z) = \limsup_{r\to 0} \frac{\max_{|z'-z|=r} |T(z') - T(z)|}{\min_{|z'-z|=r} |T(z') - T(z)|}.$$

Известно [1, гл. 1, §4], что если $\mathrm{Q}_T(z) < +\infty$ всюду в D и $\mathrm{Q}_T(z) \le Q$ ($Q \ge$ ≥ 1 — константа) п.в. в D, то отображение $T(z)$ Q-квазиконформно в области D и, как следствие, дифференцируемо п.в. в D, имеет п.в. в D комплексную дилатацию $\mu_0(z) =$ $= T_{\bar z}(z)/T_z(z)$, первую характеристику Лаврентьева $p_T(z)$, якобиан $I(z) = \frac{\partial(v_1,v_2)}{\partial(x_1,x_2)} > 0$ и в точках дифференцируемости $p_T(z) = \mathrm{Q}_T(z) = P_{\mu_0}(z)$.

Относительно $T(z)$ будет допускаться возможность вырождения, но при этом будут налагаться следующие ограничения:

(A1) множество вырождения отображения $T(z)$

$$E = \{z : z \in D, \sup_{z'\in B_r(z)\cap D} \mathrm{Q}_T(z') = +\infty \ \text{ для всякого круга } \ B_r(z)\},$$

имеет меру $\mathrm{mes}_2\, E = 0$;

(A2) для отображения $T(z)$ выполняется N-свойство [4, гл. 5, §1, п. 1.1]: всякое множество $E_0 \subset D$ меры $\mathrm{mes}_2\, E_0 = 0$ переходит в множество $T(E_0) \subset T(D)$ меры $\mathrm{mes}_2\, T(E_0) = 0$.

Нетрудно видеть, что условие (A1) гарантирует замкнутость множества E относительно D и локальную квазиконформность отображения $T(z)$ в $D \setminus E$. В силу квазиконформности отображение $T(z)$ дифференцируемо п.в. в $D\setminus E$, а следовательно, и в D. При этом у него п.в. определена комплексная характеристика $\mu_0(z)$, первая характеристика Лаврентьева $p(z) = P_{\mu_0}(z) = \mathrm{Q}_T(z)$ и якобиан $I(z)$. Кроме того, при вышеуказанных условиях (A1), (A2) справедлива формула замены переменной в интеграле [4, гл. 5, §1, п. 1.4, теорема 1.8]: для любой подобласти $D' \Subset D$ и любой суммируемой функции $f(v)$, заданной в $T(D')$, имеет место равенство

$$\iint\limits_{T(D')} f(v)dv_1dv_2 = \iint\limits_{D'} f(T(z))I(z)dx_1dx_2.$$

По данному отображению $T(z)$ определим класс функций $T^*W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, как множество функций вида $f(z) = \varphi(T(z))$, где $\varphi \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(T(D))$.

Заметим, что в случае $E = \emptyset$ отображение $T(z)$ локально квазиконформно в D и, следовательно, $T(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$. Поэтому, в силу инвариантности классов $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ при квазиконформных отображениях (см., например, [4, гл. 5, §4, п. 4.1, теорема 4.2]), заключаем, что $T^*W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D) = W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$. Следовательно, при $E \neq \emptyset$, если $f(z) \in T^*W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, то $f(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D \setminus E)$.

В работе [6] была установлена следующая теорема, играющая для нас ключевую роль.

Теорема 1. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область; $v = T(z) : D \to T(D) \subset \mathbb{C}$ — гомеоморфное отображение со свойствами* (A1), (A2), *имеющее комплексную характеристику $\mu_0(z)$. Предположим, что для всякой подобласти $D' \Subset D$ можно указать функцию $K(z) \in W^{1,2}(D')$ такую, что*

$$\iint\limits_{D'} P_{\mu_0}(z)|\nabla K(z)|^2 dx_1dx_2 < +\infty,$$

$$\frac{|\mu(z) - \mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|)(1 - |\mu(z)|)} \;\leq\; K(z) \;\; \text{п.в. в } D',$$

$$K(T^{-1}(v)) \in ACL \text{ в } \; T(D').$$

Тогда существует $w = f(z) : D \to f(D) \subset \mathbb{C}$ — гомеоморфное решение с особенностью E уравнения, ассоциированного с (1). *При этом $f(z) \in T^*W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, $f^{-1}(w) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D \setminus E))$ и в представлении $f(z) = \varphi(T(z))$ отображение φ имеет $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-мажорируемую первую характеристику. Гомеоморфизм $w = f(z)$ единственен с точностью до конформного отображения в w-плоскости.*

Замечание 1. Принадлежность $K(T^{-1}(v))$ классу ACL в $T(D')$ в некоторых случаях выполняется автоматически, являясь следствием свойства отображения $v = T(z)$ сохранять этот класс. Примером отображения, сохраняющего класс ACL, является

$$\mathcal{F}_\delta(z) = f_\delta(x_1) + ix_2, \quad f_\delta(t) = \int_0^t \delta(\tau)d\tau,$$

где $\delta(t)$ — положительная непрерывная при $t \neq 0$ функция, имеющая интегрируемую особенность в нуле. Несложно проверить, что если $K(z) \in ACL$ в D, то $K(\mathcal{F}_\delta^{-1}(v)) \in ACL$ в $\mathcal{F}_\delta(D)$.

2. Вырождение на линии

Пусть существует жорданова дуга $E \subset D$, делящая область D на две односвязные подобласти D_1 и D_2, причем на E уравнение (1) вырождается, а характер вырождения описывается следующими условиями (B1), (B2).
(B1) Справедливо представление

$$|\mu(z)| = 1 + M(z)\delta(H(z)),$$

где $M(z)$ — измеримая, п.в. конечная в D функция; $\delta(t)$ — непрерывная функция, такая, что $\delta(t) > 0$ при $t \neq 0$ и $\delta(0) = 0$; $H(z) \in C(D) \cap W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, причем $\nabla H(z) \neq 0$ п.в. в D и $H(z) < 0$ в D_1, $H(z) > 0$ в D_2.
(B2) Существует непрерывная функция $Z(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, такая, что отображение

$$J(z) = H(z) + iZ(z) \in C(D) \cap W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$$

является локально квазиконформным гомеоморфизмом D на $J(D)$, сохраняющим ориентацию.

Из условия (B1) следует, что $H(z) = 0$ — уравнение кривой E.

Пусть в дальнейшем $I_1(z) = H_{x_1}Z_{x_2} - H_{x_2}Z_{x_1}$ — якобиан отображения $J(z)$, $p_J(z)$ — его первая характеристика Лаврентьева, а $Q_J(D') = \operatorname{ess\,sup}_{D'} p_J(z) \geq 1$. Тогда в силу квазиконформности $J(z)$ в D', п.в. имеем

$$|\nabla H(z)|^2 + |\nabla Z(z)|^2 \leq 2Q_J(D')I_1(z) \leq 2Q_J(D')|\nabla H(z)||\nabla Z(z)|. \tag{3}$$

Далее, для произвольной вещественной функции $f(z)$, имеющей градиент в точке $z \in D$, будем пользоваться отождествлениями $\nabla f(z) = f_{x_1} + if_{x_2}$ и $\overline{\nabla f(z)} = f_{x_1} - if_{x_2}$.

Введем в рассмотрение следующую измеримую функцию

$$S(z) = \begin{cases} \frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}} & \text{при } z \in D_1, \text{ таких что } \nabla H \text{существует и} \nabla H \neq 0, \\ \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} & \text{при } z \in D_2, \text{ таких что } \nabla Z \text{существует и} \nabla Z \neq 0, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Предположим, что функция $\frac{1}{\delta(t)}$ имеет интегрируемую слева особенность в нуле. Тогда можно определить функции

$$\delta^*(t) = \begin{cases} \delta(t) & \text{при} \quad t > 0, \\ \frac{1}{\delta(t)} & \text{при} \quad t < 0, \end{cases} \qquad f_{\delta^*}(t) = \int_0^t \delta^*(\tau)d\tau, \qquad \mathcal{F}_{\delta^*}(z) = f_{\delta^*}(x_1) + ix_2.$$

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что выполняются условия* (B1), (B2) *и функция* $\frac{1}{\delta(t)}$ *имеет интегрируемую слева особенность в нуле. Кроме того, предположим, что для всякой подобласти* $D' \Subset D$ *можно указать функцию* $K(z) \in W^{1,2}(D')$ *такую, что*

$$\iint\limits_{D'} \frac{|\nabla K(z)|^2}{\delta(H)} dx_1 dx_2 < +\infty,$$

причем для п.в. $z \in D'$

$$\frac{1}{|M(z)|\delta^2(H)}\left|\mu(z)-S(z)\right|^2+\frac{1}{|M(z)|}\le K(z).$$

Положим $T(z)=\mathcal{F}_{\delta^*}(J(z))$. *Тогда существует гомеоморфизм* $w=f(z):D\to$ $\to f(D)\subset\mathbb{C}$, *для которого справедливы утверждения:*

(i) $f(z)$ *есть решение с особенностью* E *уравнения, ассоциированного с* (1);

(ii) $f(z)\in T^*W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, $f^{-1}(w)\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D\setminus E))$ *и в представлении*

$$f(z)=\varphi(T(z))=\varphi(\mathcal{F}_{\delta^*}(J(z)))$$

отображение φ *имеет* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$*-мажорируемую первую характеристику. Гомеоморфизм* $w=f(z)$ *единственен с точностью до конформного отображения в* w*-плоскости.*

В [6, теоремы 3, 4], были описаны два принципиально различных характера вырождения уравнения (1) вдоль E, при которых существует единственное гомеоморфное решение соответствующего ассоциированного уравнения, а также описана структура такого решения; немного позже, в [8], было показано, что эти условия являются слабыми версиями следующих условий:

$$dz+\mu(z)\overline{dz}\ \ne\ 0, \tag{4}$$
$$dz+\mu(z)\overline{dz}\ =\ 0, \tag{5}$$

где dz направлено по касательной к E. Условие (4) использовалось ранее в работах Якубова и Сребро [13, теорема 4.4, с. 70], а (5) было рассмотрено в [6; 8] впервые. Теорема 2 показывает, что возможен также вариант разнотипного вырождения уравнения Бельтрами, при котором характеры вырождения различны по разные стороны от E.

Доказательство теоремы 2. Пусть $z\in D_2$. В развернутом виде $T(z)=f_\delta(H)+iZ$ и для отображения $v=T(z)$ получаем

$$\frac{\partial(v_1,v_2)}{\partial(x_1,x_2)}=\begin{vmatrix}\delta(H)H_{x_1} & \delta(H)H_{x_2}\\ Z_{x_1} & Z_{x_2},\end{vmatrix}=\delta(H)I_1(z),$$

$$\frac{\partial T(z)}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\delta(H)\overline{\nabla H}+i\overline{\nabla Z}\right),\quad \frac{\partial T(z)}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\delta(H)\nabla H+i\nabla Z\right),$$

откуда

$$\mu_0(z)=\frac{\partial T(z)}{\partial\bar z}\Bigg/\frac{\partial T(z)}{\partial z}=\frac{\delta(H)\nabla H+i\nabla Z}{\delta(H)\overline{\nabla H}+i\overline{\nabla Z}}=\frac{\nabla Z-i\delta(H)\nabla H}{\overline{\nabla Z}-i\delta(H)\overline{\nabla H}}. \tag{6}$$

Отображение $v=T(z)$ сохраняет ориентацию, следовательно $|\mu_0(z)|<1$ п.в. в D_2. Имеем

$$|\mu-\mu_0|^2\le\left|\left|\mu-\frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}}\right|+\left|\frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}}-\mu_0\right|\right|^2\le 2\left|\mu-\frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}}\right|^2+2\left|\frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}}-\mu_0\right|^2, \tag{7}$$

$$\frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}}-\mu_0=\frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}}-\frac{\nabla Z-i\delta(H)\nabla H}{\overline{\nabla Z}-i\delta(H)\overline{\nabla H}}=\frac{2\delta(H)I_1(z)}{\overline{\nabla Z}(\overline{\nabla Z}-i\delta(H)\overline{\nabla H})}. \tag{8}$$

Для $z \in D_1$ аналогично имеем $T(z) = f_{\frac{1}{\delta}}(H) + iZ$, откуда

$$\frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\delta(H)} H_{x_1} & \frac{1}{\delta(H)} H_{x_2} \\ Z_{x_1} & Z_{x_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta(H)} I_1(z),$$

$$\frac{\partial T(z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta(H)}\overline{\nabla H} + i\overline{\nabla Z}\right), \quad \frac{\partial T(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta(H)}\nabla H + i\nabla Z\right),$$

$$\mu_0(z) \;=\; \frac{\partial T(z)}{\partial \bar{z}} \Big/ \frac{\partial T(z)}{\partial z} = \frac{\nabla H + i\delta(H)\nabla Z}{\overline{\nabla H} + i\delta(H)\overline{\nabla Z}},$$

$$|\mu - \mu_0|^2 \le 2\left|\mu - \frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}}\right|^2 + 2\left|\frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}} - \mu_0\right|^2, \tag{9}$$

$$\frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}} - \mu_0 = \frac{2\delta(H) I_1(z)}{\overline{\nabla H}(\overline{\nabla H} - i\delta(H)\overline{\nabla Z})}. \tag{10}$$

Зафиксируем подобласть $D' \Subset D$. Тогда для п.в. $z \in D' \bigcap D_2$ с учетом (3), (7), (8) получаем

$$\left|\frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} - \mu_0\right|^2 = \frac{4\delta^2(H) I_1^2(z)}{|\nabla Z|^2(|\nabla Z|^2 + \delta^2(H)|\nabla H|^2 + 2\delta(H) I_1(z))} \le 16 Q_J^2(D')\delta^2(H), \tag{11}$$

$$|\nabla Z|^2 + \delta^2(H)|\nabla H|^2 + 2\delta(H) I_1(z) \le C_1(D') I_1(z), \tag{12}$$

где $C_1(D') = 2Q_J(D')\max\{1, \sup_{D'}(\delta^2(H))\} + 2\sup_{D'}(\delta(H)) \ge 1$.

Аналогично для п.в. $z \in D' \bigcap D_1$ с учетом (3), (9), (10) имеем:

$$\left|\frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}} - \mu_0\right|^2 = \frac{4\delta^2(H) I_1^2(z)}{|\nabla H|^2(|\nabla H|^2 + \delta^2(H)|\nabla Z|^2 + 2\delta(H) I_1(z))} \le \;\; 16 Q_J^2(D')\delta^2(H),$$

$$|\nabla H|^2 + \delta^2(H)|\nabla Z|^2 + 2\delta(H) I_1(z) \le C_1(D') I_1(z),$$

где $C_1(D') = 2Q_J(D')\max\{1, \sup_{D'}(\delta^2(H))\} + 2\sup_{D'}(\delta(H)) \ge 1$.

Используя (6) и (12), для $z \in D_2$ получаем

$$1 - |\mu_0(z)| = \frac{4\delta(H) I_1(z)}{(1 + |\mu_0(z)|)\,(|\nabla Z|^2 + \delta^2(H)|\nabla H|^2 + 2\delta(H) I_1(z))} \ge \frac{1}{C_1(D')}\delta(H).$$

Отсюда с учетом (7), (11) и соотношений $|1 - |\mu(z)|| = |M(z)|\delta(H)$, $\;Q_J(D') \ge 1$ приходим к оценке

$$\frac{|\mu - \mu_0|^2}{|(1 - |\mu(z)|)(1 - |\mu_0(z)|)|} \le \frac{2\left|\mu - \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}}\right|^2 + 2\left|\frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} - \mu_0\right|^2}{\frac{1}{C_1(D')}|M(z)|\delta^2(H)} \le$$

$$\le C_2(D')\left(\frac{1}{|M(z)|\delta^2(H)}\left|\mu - \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}}\right|^2 + \frac{1}{|M(z)|}\right), \tag{13}$$

$$C_2(D') = 32 Q_J^2(D') C_1(D').$$

Далее, снова пользуясь (3), устанавливаем оценку

$$P_{\mu_0}(z) \le \frac{C_3(D')}{\delta(H)}. \tag{14}$$

Так как $z \in D_2 \bigcap D'$, то имеем

$$P_{\mu_0}(z) = \frac{1+|\mu_0|}{1-|\mu_0|} \le 2\frac{1+|\mu_0|^2}{1-|\mu_0|^2} = \frac{\delta^2(H)|\nabla H|^2 + |\nabla Z|^2}{\delta(H) I_1(z)} \le \frac{C_3(D')}{\delta(H)},$$

где $C_3(D') = 2Q_J(D')\max\{\sup_{D'}(\delta^2(H)), 1\}$.

Рассуждая аналогично, устанавливаем неравенство вида (14) для случая $z \in D_1 \bigcap D'$.

В силу (14) для всякой функции $K(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D')$ имеем неравенство

$$\iint\limits_{D'} P_{\mu_0}(z)|\nabla K(z)|^2 dx_1 dx_2 \le C_3(D') \iint\limits_{D'} \frac{|\nabla K(z)|^2}{\delta(H)} dx_1 dx_2. \tag{15}$$

Имеем $z = T^{-1}(v) = J^{-1}(F_{\delta^*}^{-1}(v))$. Пусть $\zeta = F_{\delta^*}^{-1}(v)$. Тогда $v = \mathcal{F}_{\delta^*}(\zeta)$, $\zeta = J(z)$. Так как отображение $\zeta = J(z)$ локально квазиконформно, то обратное к нему $z = J^{-1}(\zeta)$ также локально квазиконформно, и, следовательно, $J^{-1}(\zeta) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(J(D'))$. Поскольку $K(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D')$, то в силу инвариантности класса $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ при квазиконформных отображениях имеем $\tilde{K}(\zeta) = K(J^{-1}(\zeta)) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(J(D'))$ и по замечанию 1 заключаем о принадлежности $K(T^{-1}(v)) = \tilde{K}(\mathcal{F}_{\delta^*}^{-1}(v)) \in ACL$ в $T(D')$.

Очевидно, кривая E есть множество вырождения $T(z) = \mathcal{F}_{\delta^*}(J(z))$ и выполняются условия (A1), (A2). Таким образом, полученные оценки (13), (15) обеспечивают выполнение условий теоремы 1. Теорема доказана.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Иначе говоря, в D_1 и D_2.

[2] То есть на произвольных отрезках, лежащих в упомянутых сечениях.

[3] При этом не известна принадлежность $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белинский, П. П. Общие свойства квазиконформных отображений / П. П. Белинский. — Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1974. — 100 с.

2. Векуа, И. Н. Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. — М. : Наука, 1988. — 512 с.

3. Волковыский, Л. И. Некоторые вопросы теории квазиконформных отображений / Л. И. Волковыский // Некоторые проблемы математики и механики. — Л. : Наука, 1970. — С. 128–134.

4. Гольдштейн, В. М. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения / В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк. — М. : Наука, 1983. — 284 с.

5. Кондрашов, А. Н. Изотермические координаты на склейках / А. Н. Кондрашов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2016. — № 6 (37). — С. 70–80.

6. Кондрашов, А. Н. К теории вырождающихся уравнений Бельтрами переменного типа / А. Н. Кондрашов // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т. 53, № 6. — С. 1321–1337.

7. Кондрашов, А. Н. К теории уравнения Бельтрами переменного типа со многими складками / А. Н. Кондрашов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2013. — № 2 (19). — С. 26–35.

8. Кондрашов, А. Н. Уравнения Бельтрами, вырождающиеся на дуге / А. Н. Кондрашов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2014. — № 5 (24). — С. 24–39.

9. Кондрашов, А. Н. Уравнения Бельтрами переменного типа и конформные мультискладки / А. Н. Кондрашов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2015. — № 5 (30). — С. 6–24.

10. Мазья, В. Г. Пространства С.Л. Соболева / В. Г. Мазья. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1985. — 416 с.

11. Миклюков, В. М. Изотермические координаты на поверхностях с особенностями / В. М. Миклюков // Мат. сб. — 2004. — Т. 195, № 1. — С. 69–88.

12. Якубов, Э. Х. О решениях уравнения Бельтрами с вырождением / Э. Х. Якубов // Доклады академии наук СССР. — 1978. — Т. 243, № 5. — С. 1148–1149.

13. The Beltrami Equations: A Geometric Approach / V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. — New York : Springer, 2012. — xiv+301 p.

14. Lavrentieff, M. Sur une classe de représentations continues / M. Lavrentieff // Мат. сб. — 1935. — Т. 42, № 4. — С. 407–424.

15. Martio, O. On existence and uniqueness of degenerate Beltrami equations / O. Martio, V. M. Miklyukov // Complex Variables. — 2004. — № 49. — P. 647–656.

16. Srebro, U. Branched folded maps and alternating Beltrami equations / U. Srebro, E. Yakubov // Journal d'analyse mathematique. — 1996. — № 70. — P. 65–90.

17. Srebro, U. μ-Homeomorphisms / U. Srebro, E. Yakubov // Contemporary Mathematics AMS. — 1997. — № 211. — P. 473–479.

18. Srebro, U. Uniformization of maps with folds / U. Srebro, E. Yakubov // Israel mathematical conference proceedings. — 1997. — № 11. — P. 229–232.

REFERENCES

1. Belinskiy P.P. *Obshchie svoystva kvazikonformnykh otobrazheniy* [General Properties of Quasiconformal Mappings]. Novosibirsk, Nauka. Sib. otd-nie Publ., 1974. 100 p.

2. Vekua I.N. *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 512 p.

3. Volkovyskiĭ L.I. Nekotorye voprosy teorii kvazikonformnykh otobrazheniy [Some Problems of the Theory of Quasiconformal Mappings]. *Nekotorye problemy matematiki i mekhaniki* [Some Problems of Mathematics and Mechanics] Leningrad, Nauka Publ., 1970, pp. 128-134.

4. Goldshteyn V.M., Reshetnyak Yu.G. *Vvedenie v teoriyu funktsiy s obobshchennymi proizvodnymi i kvazikonformnye otobrazheniya* [Quasiconformal Mappings and Sobolev Spaces]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 284 p.

5. Kondrashov A.N. Izotermicheskie koordinaty na skleykakh [Isothermic Coordinates on Sewing Surfaces]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2016, no. 6 (37), pp. 70-80.

6. Kondrashov A.N. K teorii vyrozhdayushchikhsya uravneniy Beltrami peremennogo tipa [On the Theory of Degenerate Alternating Beltrami Equations]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 2012, vol. 53, no. 6, pp. 1321-1337.

7. Kondrashov A.N. K teorii uravneniya Beltrami peremennogo tipa so mnogimi skladkami [On the Theory of Alternating Beltrami Equation with Many Folds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2013, no. 2 (19), pp. 26-35.

8. Kondrashov A.N. Uravneniya Beltrami, vyrozhdayushchiesya na duge [Beltrami Equations with Degenerate on Arcs]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2014, no. 5 (24), pp. 24-39.

9. Kondrashov A.N. Uravneniya Beltrami peremennogo tipa i konformnye multiskladki [Alternating Beltrami Equation and Conformal Multifolds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2015, no. 5 (30), pp. 6-24.

10. Mazya V.G. *Prostranstva S.L. Soboleva* [Sobolev Spaces]. Leningrad, Izd-vo LGU Publ., 1985. 416 p.

11. Miklyukov V.M. Izotermicheskie koordinaty na poverkhnostyakh s osobennostyami [Isothermic Coordinates on Singular Surfaces]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 2004, vol. 195, no. 1, pp. 69-88.

12. Yakubov E.Kh. O resheniyakh uravneniya Beltrami s vyrozhdeniem [Solutions of Beltrami's Equation with Degeneration]. *Doklady akademii nauk SSSR* [Doklady Mathematics], 1978, vol. 243, no. 5, pp. 1148-1149.

13. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *The Beltrami Equations: A Geometric Approach*. New York, Springer, 2012. xiv+301 p.

14. Lavrentieff M. Sur une classe de représentations continues. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 1935, vol. 42, no. 4, pp. 407-424.

15. Martio O., Miklyukov V.M. On Existence and Uniqueness of Degenerate Beltrami Equations. *Complex Variables*, 2004, no. 49, pp. 647-656.

16. Srebro U., Yakubov E. Branched Folded Maps and Alternating Beltrami Equations. *Journal d'analyse mathematique*, 1996, no. 70, pp. 65-90.

17. Srebro U., Yakubov E. μ-Homeomorphisms. *Contemporary Mathematics AMS*, 1997, no. 211, pp. 473-479.

18. Srebro U., Yakubov E. Uniformization of Maps with Folds. *Israel mathematical conference proceedings*, 1997, no. 11, pp. 229-232.

ON BELTRAMI EQUATIONS WITH A DIFFERENT-TYPE DEGENERACY ON AN ARC

Alexander Nikolaevich Kondrashov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Computer Sciences and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
ankondr@mail.ru, alexander.kondrashov@volsu.ru, kiem@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. Suppose that, in a simply-connected domain $D \subset \mathbb{C}$, we are given the Beltrami equation (see [2, Chapter 2])

$$f_{\overline{z}}(z) = \mu(z) f_z(z). \qquad (*)$$

We will call case of the Beltrami equation with $|\mu(z)| < 1$ a.e. in D by classical. The cases $|\mu(z)| < 1$ a.e. in D and $|\mu(z)| > 1$ a.e. in D differ in that, in the first case homeomorphisms do not change sense, and in the second they do. The difference is but formal here. Of interest is the situation when there simultaneously exist subdomains in D in which $|\mu(z)| < 1$ a.e. and subdomains D in which $|\mu(z)| > 1$ a.e. In this case the Beltrami equation is said to be alternating. The problem of the study of alternating Beltrami equations was posed

by Volkovyskiĭ [3], and successful progress in this direction was made in [16; 18]. Its solutions are described by mappings with folds, cusps, etc.

Assign to (*) the classical Beltrami equation with complex dilation

$$\mu^*(z) = \begin{cases} \mu(z) & \text{при} \quad |\mu(z)| \le 1, \\ 1/\overline{\mu}(z) & \text{при} \quad |\mu(z)| > 1. \end{cases}$$

Below we call this equation associated with (*).

Suppose that there exists a Jordan arc $E \subset D$ dividing the domain D into two simply-connected subdomains D_1 and D_2. Suppose also that (1) degenerates on E and the nature of the degeneration is described by the following conditions:
(B1) The representation

$$|\mu(z)| = 1 + M(z)\delta(H(z)),$$

holds, where $M(z)$ is a measurable a.e. finite function in D; $\delta(t)$ is a continuous function such that $\delta(t) > 0$ for $t \ne 0$ and $\delta(0) = 0$; $H(z) \in C(D) \cap W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, and also $\nabla H(z) \ne 0$ a.e. in D and $H(z) < 0$ in D_1, $H(z) > 0$ in D_2.
(B2) there exists a continuous function $Z(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$

$$J(z) = H(z) + iZ(z) \in C(D) \cap W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$$

is a sense-preserving locally quasiconformal homeomorphism of D onto $J(D)$.

Obviously, (B1) implies that $H(z) = 0$ is the equation of E. In what follows, we suppose that $I_1(z) = H_{x_1}Z_{x_2} - H_{x_2}Z_{x_1}$ is the Jacobian of $J(z)$, while $p_J(z)$ is its first Lavrent'ev characteristic, and $Q_J(D') = \operatorname{ess\,sup}_{D'} p_J(z) \ge 1$. Then, since $J(z)$ is quasiconformal in D', a.e. we have

$$|\nabla H(z)|^2 + |\nabla Z(z)|^2 \le 2Q_J(D')I_1(z) \le 2Q_J(D')|\nabla H(z)||\nabla Z(z)|.$$

Throughout the sequel, given an arbitrary real function $f(z)$, having gradient at a point $z \in D$, we put $\nabla f(z) = f_{x_1} + if_{x_2}$ and $\overline{\nabla f(z)} = f_{x_1} - if_{x_2}$. Also we put

$$S(z) = \begin{cases} \frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}} & \text{at} \quad z \in D_1, \\[2ex] \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} & \text{at} \quad z \in D_2, \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{\delta^*}(z) = f_{\delta^*}(x_1) + ix_2 \quad \text{where} \quad f_{\delta^*}(t) = \int_0^t \delta^*(\tau)d\tau.$$

The main result of the article is as follows.

Theorem. *Suppose that (B1) and (B1) are fulfilled, while for every subdomain $D' \Subset D$ there is a function $K(z) \in W^{1,2}(D')$ such that*

$$\iint\limits_{D'} \frac{|\nabla K(z)|^2}{\delta(H)} dx_1dx_2 < +\infty,$$

and

$$\frac{1}{|M(z)|\delta^2(H)}\,|\mu(z) - S(z)|^2 + \frac{1}{|M(z)|} \le K(z).$$

for a.e. $z \in D'$. *Put* $T(z) = \mathcal{F}_{\delta^*}(J(z))$. *Then there exists a homeomorphism* $w = f(z) : D \to f(D) \subset \mathbb{C}$ *such that*

(*i*) $f(z)$ *is a solution with singularity* E *to the equation associated with* (*);

(*ii*) $f(z) \in T^* W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, $f^{-1}(w) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D \setminus E))$, *and, in the representation*

$$f(z) = \varphi(T(z)) = \varphi(\mathcal{F}_{\delta^*}(J(z)))$$

the mapping φ *has* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$*- majorized first characteristic.*

This homeomorphic solution with singularity E *is unique* $T^* W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$ *up to composition with a conformal mapping.*

This result is a two-sided analog of Theorems 3, 4 of the paper [6].

Key words: degenerate Beltrami equation, alternating Beltrami equation, Lavrent'evs characteristics, solution with singularity, associated equation.