DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.5.5

УДК 539.3
ББК 22.251

НАПРЯЖЕННО ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ИЗ УПРУГОГО КОМПОЗИЦИОННОГО В СРЕДНЕМ ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Александр Степанович Кравчук

Доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры био- и наномеханики,
Белорусский государственный университет
ask_Belarus@inbox.ru
просп. Независимости, 4, 220030 г. Минск, Белоруссия

Анжелика Ивановна Кравчук

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования,
Белорусский государственный университет
anzhelika.kravchuk@gmail.com
просп. Независимости, 4, 220030 г. Минск, Белоруссия

Аннотация. Впервые решена краевая задача для твердого композиционного тела без использования нелокальных гипотез о малости объема композиционного материала, для которого устанавливаются эффективные характеристики. Предполагается, что разброс коэффициентов Пуассона около среднего значения мал, и поэтому можно использовать условие постоянства коэффициентов Пуассона и равенство его среднему значению для всех компонент композиционного материала. В связи с особенностями постановки задачи в случае композитного материала нет возможности отдельно рассматривать плоское напряженное состояние и плоскую деформацию поперечного сечения трубы, и оба этих состояния будут участвовать в оценке напряженно-деформированного состояния изучаемого объекта согласно стандартным гипотезам Фойгта и Рейсса. Получено приближение Хилла для средних по представительному объему напряжений и деформаций. В силу того, что напряжения и перемещения как на внутренней, так и на внешней границе постоянны, то и их средние значения по участку границы любой площади постоянны и равны исходным значениям. В связи с этим с методической точки зрения для задачи Ляме для трубы показано, что решения, построенные с использованием гипотез Фойгта и Рейса, самодостаточны и не требуют использования дополнительных предположений о малости элементов усреднения внутри упругого тела. Установлено, что решение по напряжениям зависит от средних значений модулей упругости по Фойгту и Рейссу, а по деформациям определяется только средними значениями модуля упругости по Рейссу. Получены формулы, определяющие напряженно-деформированное состояние композиционной в среднем изотропной плоскости с отверстием. Эти решения могут быть применены в качестве оценочных значений напряжений и деформаций в поперечном сечении грунта вокруг свай при, например, бурозабивном способе их погружения в вечной мерзлоте.

Ключевые слова: композиционный структурно неоднородный материал, дискретная случайная величина, усреднение, эффективные деформационные характеристики, гипотеза Фойгта, гипотеза Рейсса, приближение Хилла.

Введение

Решение задачи Ляме для толстостенного цилиндра нашло широкое применение в инженерии и строительстве [3]. Кроме того, в настоящее время данная задача находит широкое применение в расчетах и оптимизации конструкций радиационно-тепловых экранов ядерных реакторов, их тепловых и биологических защит и т. д. [1]. Определение напряженного состояния трубы под внутренним давлением является неотъемлемой частью методик анализа дефектности трубопроводной системы [2].

Однако, несмотря на значительный интерес к этой задаче, ее решение для композиционного материала даже в случае упругости его компонент отсутствует. В частности, она может найти применение при расчете НДС труб из керамических материалов.

До настоящей статьи все решения краевых задач для композиционных тел выполнялись с явным использованием гипотезы о малости представительного объема композиционного тела по сравнению с его размерами. В данной статье впервые эта гипотеза отсутствует, вместо этого авторами явно применены гипотезы Фойгта и Рейсса к решению двух отдельных оценочных краевых задач и последующим усреднением полученных величин напряжений и деформаций.

Основные уравнения и гипотезы

Предполагается, что композиционный материал состоит из n компонент, k-я компонента которого ($k=\overline{1,n}$) имеет различные модули упругости E_k и одинаковые коэффициенты Пуассона $\nu=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\nu_k$ (где ν_k – коэффициенты Пуассона компонент). Относительная объемная доля каждого материала γ_k ($0<\gamma_k<1$, $\sum_{k=1}^{n}\gamma_k=1$). Будем обозначать через R_1 и R_2 радиусы внутренней и внешней границ сечения цилиндра соответственно (рис. 1). При решении задачи будем использовать результаты для толстостенного цилиндра, изложенные в [3, с. 90–93].

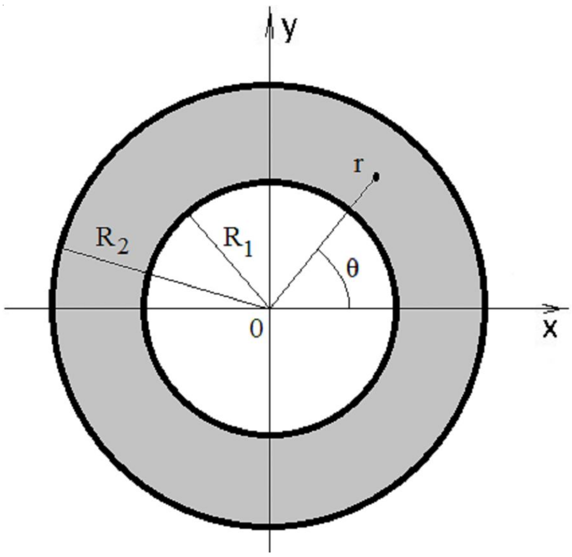

Рис. 1. Толстостенный цилиндр

Гипотеза об однородности деформаций. Плоская деформация

В данном разделе проведем первый этап решения поставленной задачи, заключающийся в использовании гипотезы Фойгта о том, что при простейшем нагружении в материале имеет место однородная деформация, то есть для любого k-го слоя ($k=\overline{1,n}$) [4, с. 4]:

$$\varepsilon_{rr,k}=\varepsilon_{rr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta,k}=\varepsilon_{\theta\theta}, \quad \varepsilon_{r\theta,k}=\varepsilon_{r\theta}. \tag{1}$$

Кроме того, из независимости решения от угла θ следует, что $\varepsilon_{r\theta}=0$.

В полярной системе координат в случае плоской осесимметричной деформации уравнение совместности деформаций имеет вид [3, с. 90]:

$$\frac{\partial\varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r}-\frac{\varepsilon_{rr}-\varepsilon_{\theta\theta}}{r}=0, \tag{2}$$

а уравнения состояния определяются обобщенным законом Гука [3, с. 32]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}&=\frac{1+\nu}{E_k}\left((1-\nu)\sigma_{rr,k}-\nu\,\sigma_{\theta\theta,k}\right),\\ \varepsilon_{\theta\theta}&=\frac{1+\nu}{E_k}\left((1-\nu)\sigma_{\theta\theta,k}-\nu\,\sigma_{rr,k}\right),\end{aligned} \tag{3}$$

где $\sigma_{rr,k}$, $\sigma_{\theta\theta,k}$ – нормальные компоненты напряжений k-го слоя ($k=\overline{1,n}$).

Непосредственно из (3) можно сразу же получить связь между средними значениями напряжений и деформаций по реализации модулей упругости композита. Поскольку известно, что относительная объемная доля каждого материала с модулем упругости E_k равна γ_k ($k=\overline{1,n}$), то из (3) следует очевидное равенство:

$$\begin{aligned}\langle E\rangle_V\cdot\varepsilon_{rr}&=(1+\nu)\left((1-\nu)\cdot\langle\sigma_{rr}\rangle_V-\nu\cdot\langle\sigma_{\theta\theta}\rangle_V\right),\\ \langle E\rangle_V\cdot\varepsilon_{\theta\theta}&=(1+\nu)\left((1-\nu)\cdot\langle\sigma_{\theta\theta}\rangle_V-\nu\cdot\langle\sigma_{rr}\rangle_V\right),\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\langle E\rangle_V=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot E_k\,,\ \langle\sigma_{rr}\rangle_V=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot\sigma_{rr,k}\,,\ \langle\sigma_{\theta\theta}\rangle_V=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot\sigma_{\theta\theta,k}\,.$$

Учитывая, что при гипотезе Фойгта $\varepsilon_{rr}\equiv\langle\varepsilon_{rr}\rangle_V$ и $\varepsilon_{\theta\theta}\equiv\langle\varepsilon_{\theta\theta}\rangle_V$, то для решения поставленной оценочной задачи остается расшифровать, что представляют собой $\langle\sigma_{rr}\rangle_V$ и $\langle\sigma_{\theta\theta}\rangle_V$.

Далее, подставляя (3) в (2), используя выражения $\sigma_{rr,k}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial r}$, $\sigma_{\theta\theta,k}=\dfrac{\partial^2\varphi_k}{\partial r^2}$, получим уравнение для определения функции напряжений Эри φ_k k-го концентрического слоя ($k=\overline{1,n}$) [3, с. 90–91]:

$$\frac{\partial^3\varphi_k}{\partial r^3}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial r}=0,$$

решением которого является функция $\varphi_k=C_{1,k}\ln(r)+C_{2,k}\,r^2+C_{3,k}$.

Таким образом, напряжения в k-м слое ($k=\overline{1,n}$) примут вид:

$$\sigma_{rr,k}=\frac{C_{1,k}}{r^2}+2C_{2,k}, \quad \sigma_{\theta\theta,k}=-\frac{C_{1,k}}{r^2}+2C_{2,k}. \tag{5}$$

Из (1) и (3) следует, что для любых k и m ($k,m=\overline{1,n}$) выполнено:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{1+\nu}{E_k}\left((1-\nu)\sigma_{rr,k}-\nu\,\sigma_{\theta\theta,k}\right)=\frac{1+\nu}{E_m}\left((1-\nu)\sigma_{rr,m}-\nu\,\sigma_{\theta\theta,m}\right),\\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1+\nu}{E_k}\left((1-\nu)\sigma_{\theta\theta,k}-\nu\,\sigma_{rr,k}\right)=\frac{1+\nu}{E_m}\left((1-\nu)\sigma_{\theta\theta,m}-\nu\,\sigma_{rr,m}\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Решая уравнения (6) относительно $\sigma_{rr,k}$ и $\sigma_{\theta\theta,k}$, будем иметь:

$$\sigma_{rr,k}=\frac{E_k}{E_m}\sigma_{rr,m},\quad \sigma_{\theta\theta,k}=\frac{E_k}{E_m}\sigma_{\theta\theta,m}, \tag{7}$$

и с учетом (5) получим соотношения для коэффициентов функции φ_k:

$$C_{1,k}=\frac{E_k}{E_m}C_{1,m},\quad C_{2,k}=\frac{E_k}{E_m}C_{2,m}. \tag{8}$$

Таким образом, нормальные напряжения на внешней и внутренней границах примут вид:

$$\sigma_{rr,1}=\frac{C_{1,1}}{r^2}+2\frac{E_1}{E_n}C_{2,n},\ \sigma_{rr,n}=\frac{E_n}{E_1}C_{1,1}\frac{1}{r^2}+2\,C_{2,n}. \tag{9}$$

При граничных условиях $\sigma_{rr,1}\big|_{r=R_1}=\sigma_{R_1}$ и $\sigma_{rr,n}\big|_{r=R_2}=\sigma_{R_2}$ из (9) получим:

$$\begin{aligned}{R_1}^2\cdot E_n\cdot\sigma_{R_1}&=E_n\cdot C_{1,1}+2\cdot {R_1}^2\cdot E_1\cdot C_{2,n},\\ {R_2}^2\cdot E_1\cdot\sigma_{R_2}&=E_n\cdot C_{1,1}+2\cdot {R_2}^2\cdot E_1\cdot C_{2,n}.\end{aligned}$$

Откуда следует

$$\begin{aligned}C_{1,1}&=\left(\sigma_{R_1}-\frac{E_1}{E_n}\cdot\sigma_{R_2}\right)\frac{{R_1}^2\cdot {R_2}^2}{{R_2}^2-{R_1}^2},\\ C_{2,n}&=\frac{{R_1}^2\cdot\dfrac{E_n}{E_1}\cdot\sigma_{R_1}-{R_2}^2\cdot\sigma_{R_2}}{2\cdot\left({R_1}^2-{R_2}^2\right)}.\end{aligned} \tag{10}$$

Из (5), (8), (9) и (10) получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{rr,k}&=\left(\frac{E_k}{E_1}\sigma_{R_1}-\frac{E_k}{E_n}\cdot\sigma_{R_2}\right)\frac{{R_1}^2\cdot {R_2}^2}{{R_2}^2-{R_1}^2}\frac{1}{r^2}+2\,\frac{{R_1}^2\cdot\dfrac{E_k}{E_1}\cdot\sigma_{R_1}-{R_2}^2\cdot\dfrac{E_k}{E_n}\cdot\sigma_{R_2}}{2\cdot\left({R_1}^2-{R_2}^2\right)},\\ \sigma_{\theta\theta,k}&=-\left(\frac{E_k}{E_1}\sigma_{R_1}-\frac{E_k}{E_n}\cdot\sigma_{R_2}\right)\frac{{R_1}^2\cdot {R_2}^2}{{R_2}^2-{R_1}^2}\frac{1}{r^2}+2\,\frac{{R_1}^2\cdot\dfrac{E_k}{E_1}\cdot\sigma_{R_1}-{R_2}^2\cdot\dfrac{E_k}{E_n}\cdot\sigma_{R_2}}{2\cdot\left({R_1}^2-{R_2}^2\right)}.\end{aligned} \tag{11}$$

Очевидно, поскольку и первым, и последним слоем могут быть любые материалы со своими модулями упругости E_i и E_j ($i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$), то (11) необходимо переписать в виде:

$$\sigma_{rr,k,i,j}=\left(\frac{E_k}{E_i}\sigma_{R_1}-\frac{E_k}{E_j}\cdot\sigma_{R_2}\right)\frac{R_1^{\,2}\cdot R_2^{\,2}}{R_2^{\,2}-R_1^{\,2}}\frac{1}{r^2}+$$
$$+2\,\frac{R_1^{\,2}\cdot\frac{E_k}{E_i}\cdot\sigma_{R_1}-R_2^{\,2}\cdot\frac{E_k}{E_j}\cdot\sigma_{R_2}}{2\cdot\left(R_1^{\,2}-R_2^{\,2}\right)},$$
$$\sigma_{\theta\theta,k,i,j}=-\left(\frac{E_k}{E_i}\sigma_{R_1}-\frac{E_k}{E_j}\cdot\sigma_{R_2}\right)\frac{R_1^{\,2}\cdot R_2^{\,2}}{R_2^{\,2}-R_1^{\,2}}\frac{1}{r^2}+ \qquad (12)$$
$$+2\,\frac{R_1^{\,2}\cdot\frac{E_k}{E_i}\cdot\sigma_{R_1}-R_2^{\,2}\cdot\frac{E_k}{E_j}\cdot\sigma_{R_2}}{2\cdot\left(R_1^{\,2}-R_2^{\,2}\right)}.$$

Далее, домножая на (12) γ_k ($k=\overline{1,n}$) и суммируя по k, получаем:

$$\left\langle\sigma_{rr,i,j}\right\rangle_V=\left\langle E\right\rangle_V\left(\frac{\sigma_{R_1}}{E_i}-\frac{\sigma_{R_2}}{E_j}\right)\frac{R_1^{\,2}\cdot R_2^{\,2}}{R_2^{\,2}-R_1^{\,2}}\frac{1}{r^2}+2\cdot\left\langle E\right\rangle_V\cdot\frac{R_1^{\,2}\cdot\frac{\sigma_{R_1}}{E_i}-R_2^{\,2}\cdot\frac{\sigma_{R_2}}{E_j}}{2\cdot\left(R_1^{\,2}-R_2^{\,2}\right)},$$

$$\left\langle\sigma_{\theta\theta,i,j}\right\rangle_V=-\left\langle E\right\rangle_V\left(\frac{\sigma_{R_1}}{E_i}-\frac{\sigma_{R_2}}{E_j}\right)\frac{R_1^{\,2}\cdot R_2^{\,2}}{R_2^{\,2}-R_1^{\,2}}\frac{1}{r^2}+2\cdot\left\langle E\right\rangle_V\cdot\frac{R_1^{\,2}\cdot\frac{\sigma_{R_1}}{E_i}-R_2^{\,2}\cdot\frac{\sigma_{R_2}}{E_j}}{2\cdot\left(R_1^{\,2}-R_2^{\,2}\right)}.$$

Домножая результат на γ_i, суммируя по индексу i, далее домножая на γ_j и суммируя по индексу j, окончательно определяем $\left\langle\sigma_{rr}\right\rangle_V$ и $\left\langle\sigma_{\theta\theta}\right\rangle_V$:

$$\left\langle\sigma_{rr}\right\rangle_V=\frac{\left\langle E\right\rangle_V}{\left\langle E\right\rangle_R}\left(\left(\sigma_{R_1}-\sigma_{R_2}\right)\frac{R_1^{\,2}\cdot R_2^{\,2}}{R_2^{\,2}-R_1^{\,2}}\frac{1}{r^2}+2\,\frac{R_1^{\,2}\cdot\sigma_{R_1}-R_2^{\,2}\cdot\sigma_{R_2}}{2\cdot\left(R_1^{\,2}-R_2^{\,2}\right)}\right),$$
$$\left\langle\sigma_{\theta\theta}\right\rangle_V=\frac{\left\langle E\right\rangle_V}{\left\langle E\right\rangle_R}\left(-\left(\sigma_{R_1}-\sigma_{R_2}\right)\frac{R_1^{\,2}\cdot R_2^{\,2}}{R_2^{\,2}-R_1^{\,2}}\frac{1}{r^2}+2\,\frac{R_1^{\,2}\cdot\sigma_{R_1}-R_2^{\,2}\cdot\sigma_{R_2}}{2\cdot\left(R_1^{\,2}-R_2^{\,2}\right)}\right), \qquad (13)$$

где

$$\left\langle E\right\rangle_R=\left(\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\gamma_\lambda}{E_\lambda}\right)^{-1}.$$

Из (4) с учетом (13) для гипотезы Фойгта получаем:

$$\left\langle\varepsilon_{rr}\right\rangle_V=\frac{(1+\nu)}{\left\langle E\right\rangle_R}\left(\left(\sigma_{R_1}-\sigma_{R_2}\right)\frac{R_1^{\,2}\cdot R_2^{\,2}}{R_2^{\,2}-R_1^{\,2}}\frac{1}{r^2}+2\cdot(1-2\cdot\nu)\,\frac{R_1^{\,2}\cdot\sigma_{R_1}-R_2^{\,2}\cdot\sigma_{R_2}}{2\cdot\left(R_1^{\,2}-R_2^{\,2}\right)}\right),$$
$$\left\langle\varepsilon_{\theta\theta}\right\rangle_V=\frac{(1+\nu)}{\left\langle E\right\rangle_R}\left(-\left(\sigma_{R_1}-\sigma_{R_2}\right)\frac{R_1^{\,2}\cdot R_2^{\,2}}{R_2^{\,2}-R_1^{\,2}}\frac{1}{r^2}+2\,(1-2\cdot\nu)\cdot\frac{R_1^{\,2}\cdot\sigma_{R_1}-R_2^{\,2}\cdot\sigma_{R_2}}{2\cdot\left(R_1^{\,2}-R_2^{\,2}\right)}\right). \qquad (14)$$

Гипотеза об однородности напряжений. Плоское напряженное состояние

В данном разделе проведем второй этап решения поставленной задачи, заключающийся в использовании гипотезы Рейсса о том, что при простейшем нагружении в материале имеет место однородное напряженное состояние, то есть для любого k-го слоя ($k=\overline{1,n}$) [4, с. 5]:

$$\sigma_{rr,k} = \sigma_{rr}, \quad \sigma_{\theta\theta,k} = \sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_{r\theta,k} = \sigma_{r\theta}. \tag{15}$$

Кроме того, из независимости решения от угла θ следует, что $\sigma_{r\theta} = 0$.

В полярной системе координат в случае плоского осесимметричного напряженного состояния уравнение совместности деформаций в терминах напряжений имеет вид [3, с. 90]:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} - \nu \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - (1+\nu)\left(\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}\right) = 0, \tag{16}$$

а уравнения состояния определяются обобщенным законом Гука [3, с. 32]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E_k}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{rr,k} + \nu\,\varepsilon_{\theta\theta,k}\right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E_k}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{\theta\theta,k} + \nu\,\varepsilon_{rr,k}\right), \end{aligned} \tag{17}$$

где $\varepsilon_{rr,k}$, $\varepsilon_{\theta\theta,k}$ – нормальные компоненты деформаций k-го слоя ($k = \overline{1,n}$).

Разделив оба уравнения (17) на E_k, домножив их на γ_k ($k = \overline{1,n}$) и суммируя по k из (17), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle E \rangle_R} \cdot \sigma_{rr} &= \frac{1}{1-\nu^2}\left(\langle \varepsilon_{rr} \rangle_R + \nu \cdot \langle \varepsilon_{\theta\theta} \rangle_R\right), \\ \frac{1}{\langle E \rangle_R} \cdot \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{1-\nu^2}\left(\langle \varepsilon_{\theta\theta} \rangle_R + \nu \cdot \langle \varepsilon_{rr} \rangle_R\right), \end{aligned} \tag{18}$$

где $\langle E \rangle_R = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{E_k}\right)^{-1}$, $\langle \varepsilon_{rr} \rangle_R = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \varepsilon_{rr,k}$, $\langle \varepsilon_{\theta\theta} \rangle_R = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \varepsilon_{\theta\theta,k}$.

Так как при гипотезе Рейсса $\sigma_{rr} \equiv \langle \sigma_{rr} \rangle_R$ и $\sigma_{\theta\theta} \equiv \langle \sigma_{\theta\theta} \rangle_R$, то для решения второй оценочной задачи остается расшифровать, что представляют собой $\langle \varepsilon_{rr} \rangle_R$ и $\langle \varepsilon_{\theta\theta} \rangle_R$.

Подставляя в (17) выражения $\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, $\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$, получим уравнение для определения функции напряжений Эри φ [3, с. 90–91]:

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \tag{19}$$

решением которого является функция $\varphi(r) = C_1 \ln(r) + C_2\, r^2 + C_3$.

Таким образом, напряжения имеют вид:

$$\sigma_{rr} = \frac{C_1}{r^2} + 2C_2, \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{C_1}{r^2} + 2C_2. \tag{20}$$

При тех же, что и в первой задаче, граничных условиях $\sigma_{rr}\big|_{r=R_1} = \sigma_{R_1}$ и $\sigma_{rr}\big|_{r=R_2} = \sigma_{R_2}$ из (20) получим [3, с. 92]:

$$C_1 = \left(\sigma_{R_1} - \sigma_{R_2}\right)\frac{R_1^{\,2} \cdot R_2^{\,2}}{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}}, \tag{21}$$

$$C_2 = \frac{R_1^{\,2}\sigma_{R_1} - R_2^{\,2}\sigma_{R_2}}{2 \cdot \left(R_1^{\,2} - 2R_2^{\,2}\right)}.$$

Из (15) и (17) следует, что для любых k и m ($k,m=\overline{1,n}$) выполнено:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}&=\frac{E_k}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{rr,k}+\nu\varepsilon_{\theta\theta,k}\right)=\frac{E_m}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{rr,m}+\nu\varepsilon_{\theta\theta,m}\right),\\ \sigma_{\theta\theta}&=\frac{E_k}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{\theta\theta,k}+\nu\varepsilon_{rr,k}\right)=\frac{E_m}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{\theta\theta,m}+\nu\varepsilon_{rr,m}\right).\end{aligned}\tag{22}$$

Решая уравнения (22) относительно $\varepsilon_{rr,k}$ и $\varepsilon_{\theta\theta,k}$, будем иметь:

$$\varepsilon_{rr,k}=\frac{E_m}{E_k}\varepsilon_{rr,m},\quad \varepsilon_{\theta\theta,k}=\frac{E_m}{E_k}\varepsilon_{\theta\theta,m}.\tag{23}$$

Кроме того, из (21) и (22) можно получить:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr,k}&=\frac{1+\nu}{E_k}\left(\sigma_{R_1}-\sigma_{R_2}\right)\frac{R_1{}^2\cdot R_2{}^2}{R_2{}^2-R_1{}^2}\frac{1}{r^2}+\frac{1-\nu}{E_k}\cdot\frac{R_1{}^2\sigma_{R_1}-R_2{}^2\sigma_{R_2}}{\left(R_1{}^2-2R_2{}^2\right)},\\ \varepsilon_{\theta\theta,k}&=-\frac{1+\nu}{E_k}\left(\sigma_{R_1}-\sigma_{R_2}\right)\frac{R_1{}^2\cdot R_2{}^2}{R_2{}^2-R_1{}^2}\frac{1}{r^2}+\frac{1-\nu}{E_k}\cdot\frac{R_1{}^2\sigma_{R_1}-R_2{}^2\sigma_{R_2}}{\left(R_1{}^2-2R_2{}^2\right)}.\end{aligned}\tag{24}$$

Домножив оба уравнения (24) на γ_k ($k=\overline{1,n}$) и суммируя по k, получаем искомые средние выражения для деформаций $\langle\varepsilon_{rr}\rangle$ и $\langle\varepsilon_{\theta\theta}\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle\varepsilon_{rr}\rangle_R&=\frac{1+\nu}{\langle E\rangle_R}\left(\sigma_{R_1}-\sigma_{R_2}\right)\frac{R_1{}^2\cdot R_2{}^2}{R_2{}^2-R_1{}^2}\frac{1}{r^2}+\frac{1-\nu}{\langle E\rangle_R}\cdot\frac{R_1{}^2\sigma_{R_1}-R_2{}^2\sigma_{R_2}}{\left(R_1{}^2-2R_2{}^2\right)},\\ \langle\varepsilon_{\theta\theta}\rangle_R&=-\frac{1+\nu}{\langle E\rangle_R}\left(\sigma_{R_1}-\sigma_{R_2}\right)\frac{R_1{}^2\cdot R_2{}^2}{R_2{}^2-R_1{}^2}\frac{1}{r^2}+\frac{1-\nu}{\langle E\rangle_R}\frac{R_1{}^2\sigma_{R_1}-R_2{}^2\sigma_{R_2}}{\left(R_1{}^2-2R_2{}^2\right)}.\end{aligned}\tag{25}$$

Далее с помощью (18) вычисляем $\langle\sigma_{rr}\rangle_R$ и $\langle\sigma_{\theta\theta}\rangle_R$:

$$\begin{aligned}\langle\sigma_{rr}\rangle_R&=\left(\sigma_{R_1}-\sigma_{R_2}\right)\frac{R_1{}^2\cdot R_2{}^2}{R_2{}^2-R_1{}^2}\frac{1}{r^2}+\frac{1-\nu}{1+\nu}\cdot\frac{R_1{}^2\sigma_{R_1}-R_2{}^2\sigma_{R_2}}{\left(R_1{}^2-2R_2{}^2\right)},\\ \langle\sigma_{\theta\theta}\rangle_R&=-\left(\sigma_{R_1}-\sigma_{R_2}\right)\frac{R_1{}^2\cdot R_2{}^2}{R_2{}^2-R_1{}^2}\frac{1}{r^2}+\frac{R_1{}^2\sigma_{R_1}-R_2{}^2\sigma_{R_2}}{\left(R_1{}^2-2R_2{}^2\right)}.\end{aligned}\tag{26}$$

Решение краевой задачи для трубы из композиционного материала

Очевидно, необходимо предположить, что искомые средние деформации $\langle\varepsilon_{rr}\rangle$, $\langle\varepsilon_{\theta\theta}\rangle$ и напряжения $\langle\sigma_{rr}\rangle$, $\langle\sigma_{\theta\theta}\rangle$ определяются выражениями:

$$\begin{aligned}\langle\varepsilon_{rr}\rangle&=\alpha\cdot\langle\varepsilon_{rr}\rangle_V+(1-\alpha)\cdot\langle\varepsilon_{rr}\rangle_R,\\ \langle\varepsilon_{\theta\theta}\rangle&=\alpha\cdot\langle\varepsilon_{\theta\theta}\rangle_V+(1-\alpha)\cdot\langle\varepsilon_{\theta\theta}\rangle_R,\\ \langle\sigma_{rr}\rangle&=\alpha\cdot\langle\sigma_{rr}\rangle_V+(1-\alpha)\cdot\langle\sigma_{rr}\rangle_R,\\ \langle\sigma_{\theta\theta}\rangle&=\alpha\cdot\langle\sigma_{\theta\theta}\rangle_V+(1-\alpha)\cdot\langle\sigma_{\theta\theta}\rangle_R,\end{aligned}\tag{27}$$

где α ($0<\alpha<1$) – вещественная константа. Определяя среднее интегральное по возможным значениям α, можно получить из (27) простейшее выражение, называемое в теории композиционных материалов приближением Хилла:

$$\langle\varepsilon_{rr}\rangle = \frac{1}{2}\cdot\left(\langle\varepsilon_{rr}\rangle_V + \langle\varepsilon_{rr}\rangle_R\right),\ \langle\varepsilon_{\theta\theta}\rangle = \frac{1}{2}\cdot\left(\langle\varepsilon_{\theta\theta}\rangle_V + \langle\varepsilon_{\theta\theta}\rangle_R\right),$$
$$\langle\sigma_{rr}\rangle = \frac{1}{2}\cdot\left(\langle\sigma_{rr}\rangle_V + \langle\sigma_{rr}\rangle_R\right),\ \langle\sigma_{\theta\theta}\rangle = \frac{1}{2}\cdot\left(\langle\sigma_{\theta\theta}\rangle_V + \langle\sigma_{\theta\theta}\rangle_R\right). \tag{28}$$

Устремляя $R_2 \to \infty$ при $\sigma_{R_2} = 0$, можно перейти к рассмотрению композиционной в среднем изотропной плоскости с отверстием, тогда для нее из (13), (14) и (25), (26) можно получить:

$$\langle\sigma_{rr}\rangle_V = \frac{\langle E\rangle_V}{\langle E\rangle_R}\cdot\sigma_{R_1}\cdot\frac{R_1^2}{r^2},\quad \langle\sigma_{\theta\theta}\rangle_V = -\frac{\langle E\rangle_V}{\langle E\rangle_R}\cdot\sigma_{R_1}\cdot\frac{R_1^2}{r^2},$$
$$\langle\sigma_{rr}\rangle_R = \sigma_{R_1}\cdot\frac{R_1^2}{r^2},\qquad \langle\sigma_{\theta\theta}\rangle_R = -\sigma_{R_1}\cdot\frac{R_1^2}{r^2}. \tag{29}$$
$$\langle\varepsilon_{rr}\rangle_V = \langle\varepsilon_{rr}\rangle_R = \frac{(1+\nu)}{\langle E\rangle_R}\cdot\sigma_{R_1}\cdot\frac{R_1^2}{r^2},\ \langle\varepsilon_{\theta\theta}\rangle_V = \langle\varepsilon_{\theta\theta}\rangle_R = -\frac{(1+\nu)}{\langle E\rangle_R}\cdot\sigma_{R_1}\cdot\frac{R_1^2}{r^2}.$$

Подставляя (29) в (28), получаем, что эффективные деформации по Хиллу в композиционной плоскости с отверстием совпадают со средними по Фойгту и Рейссу, а эффективные напряжения зависят от отношения средних модулей упругости по Фойгту и Рейссу (рис. 2):

$$\langle\varepsilon_{rr}\rangle = \frac{(1+\nu)}{\langle E\rangle_R}\cdot\sigma_{R_1}\cdot\frac{R_1^2}{r^2},\ \langle\varepsilon_{\theta\theta}\rangle = -\frac{(1+\nu)}{\langle E\rangle_R}\cdot\sigma_{R_1}\cdot\frac{R_1^2}{r^2}, \tag{30}$$
$$\langle\sigma_{rr}\rangle = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{\langle E\rangle_V}{\langle E\rangle_R}\right)\cdot\sigma_{R_1}\cdot\frac{R_1^2}{r^2},\ \langle\sigma_{\theta\theta}\rangle = -\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{\langle E\rangle_V}{\langle E\rangle_R}\right)\cdot\sigma_{R_1}\cdot\frac{R_1^2}{r^2}.$$

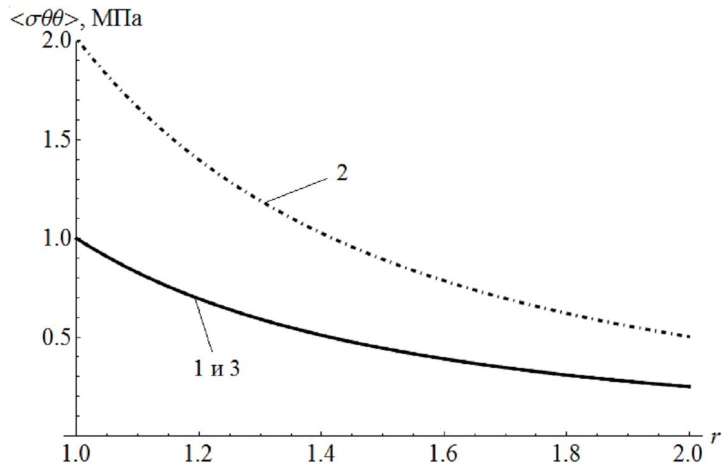

Рис. 2. Непрерывное распределение эффективных напряжений $\langle\sigma_{\theta\theta}\rangle$ по (30) в плоскости из композиционного линейноупругого материала с отверстием радиуса R_1 = 1 м в зависимости от концентраций компонент двухкомпонентного материала с давлением внутри отверстия $p = -\sigma_{R_1} = 10^6$ *Па* с модулями упругости компонент $E_1 = -10^{10}$ *Па*, $E_2 = -10^9$ *Па* при $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = 1-\gamma$: 1 – $\gamma = 0$; 2 – $\gamma = 1/2$; 3 – $\gamma = 1$

Выводы

Впервые решена краевая задача для твердого композиционного тела без использования нелокальных гипотез о малости объема композиционного материала, для которого устанавливаются эффективные характеристики.

В связи с особенностями постановки задачи в случае композитного материала нет возможности отдельно рассматривать плоское напряженное состояние и плоскую деформацию поперечного сечения трубы, и оба этих состояния будут участвовать в оценке напряженно-деформированного состояния изучаемого объекта согласно стандартным гипотезам Фойгта и Рейсса.

Получено приближение Хилла для средних по представительному объему напряжений и деформаций.

В силу того что и напряжения и перемещения как на внутренней, так и на внешней границе постоянны, то и их средние значения по участку границы любой площади постоянны и равны исходным значениям. В связи с этим с методической точки зрения для задачи Ляме для трубы показано, что решения, построенные с использованием гипотез Фойгта и Рейса, самодостаточны и не требуют использования дополнительных предположений о малости элементов усреднения внутри упругого тела.

Установлено, что решение по напряжениям зависит от средних значений модулей упругости по Фойгту и Рейссу, а по деформациям определяется только средними значениями модуля упругости по Рейссу.

Получены формулы, определяющие напряженно-деформированное состояние композиционной в среднем изотропной плоскости с отверстием. Эти решения могут быть применены в качестве оценочных значений напряжении и деформаций в поперечном сечении грунта вокруг свай при, например, бурозабивном способе их погружения в вечной мерзлоте. В этом случае эффективный модуль упругости замерзшего грунта будет определяться как средний по Рейссу модуль упругости в отдельности каждой из компонент грунта и льда.

Методическое изложение решения задачи позволит как инженерам, так и научным работникам проводить собственные исследования в этом направлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев, В. И. Оптимизация по прочности толстостенных оболочек / В. И. Андреев, И. А. Потехин. – М. : Изд-во МГСУ, 2011. – 86 с.

2. Ватульян, А. О. Об определении внутреннего давления в цилиндре по данным акустического зондирования / А. О. Ватульян, В. В. Дударев // Дефектоскопия. – 2014. – № 4. – С. 52–60.

3. Жемочкин, Б. Н. Теория упругости / Б. Н. Жемочкин. – М. : Госстройиздат, 1957. – 256 с.

4. Тарасюк, И. А. Сужение «вилки» Фойгта – Рейсса в теории упругих структурно неоднородных в среднем изотропных композиционных тел без применения вариационных принципов / И. А. Тарасюк, А. С. Кравчук // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. – 2014. – № 3. – Электрон. текстовые дан. – Режим доступа: http://apriori-journal.ru/seria2/3-2014/Tarasyuk-Kravchuk.pdf (дата обращения: 16.11.2014). – Загл. с экрана.

REFERENCES

1. Andreev V.I., Potekhin I.A. *Optimizatsiya po prochnosti tolstostennykh obolochek* [Optimization on the Strength of Thick-Walled Shells]. Moscow, MGSU Publ., 2011. 86 p.

2. Vatulyan A.O., Dudarev V.V. Ob opredelenii vnutrennego davleniya v tsilindre po dannym akusticheskogo zondirovaniya [On Measuring the Internal Pressure in the Cylinder (Based on the Data of Acoustic Sounding]. *Defektoskopiya*, 2014, no. 4, pp. 52-60.

3. Zhemochkin B.N. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1957. 256 p.

4. Tarasyuk I.A., Kravchuk A.S. Suzhenie «vilki» Foygta – Reyssa v teorii uprugikh strukturno neodnorodnykh v srednem izotropnykh kompozitsionnykh tel bez primeneniya variatsionnykh printsipov [Narrowing of Voigt-Reuss “Range” in the Theory of Elasticity of Structural Heterogeneous, Average Isotropic, Composite Bodies without Application of Variational Principles]. *APRIORI. Seriya: Estestvennye i tehnicheskie nauki*, 2014, no. 3. URL: http://apriori-journal.ru/seria2/3-2014/ Tarasyuk-Kravchuk.pdf. (accessed November 16, 2014).

STRESS-STRAIN STATE OF THICK-WALLED PIPE OF AN ELASTIC COMPOSITE IN AVERAGE ISOTROPIC MATERIAL

Aleksander Stepanovich Kravchuk
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Professor of Department of Bio- and Nanomechanics,
Belarus State University
ask_Belarus@inbox.ru
Prosp. Nezavisimosti, 4, 220030 Minsk, Belarus

Anzhelika Ivanovna Kravchuk
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Web Technologies and Computer Simulation,
Belarus State University
anzhelika.kravchuk@gmail.com
Prosp. Nezavisimosti, 4, 220030 Minsk, Belarus

Abstract. For the first time the boundary value problem is solved for a composite solid body without the application of non-local hypotheses about the smallness of representative volume of composite material, for which the effective characteristics are set. It is assumed that the variation of Poisson's ratios for all the components of the composite material about the mean value is small, and therefore it is possible to use the condition of constancy of Poisson's coefficients and its equality to the average value of all components of the composite material. Due to the peculiarity of this problem, it is not possible in the case of the composite material to separately consider the plane stress and the plane strain state of the pipe, because both these states participate in the evaluation of the stress-strain state of the studied object, according to the standard hypothesis of Voigt and Reuss. An approximation for Hill average value of stresses and strains for representative volume are obtained. Due to the fact that stress and displacement both on the inner and outer border are constant, their average values at any section of the boundary area are constant and equal to their original values. In this connection, from the methodological point of view to the Lame problem, it is shown that solutions built using Voigt and Reuss hypotheses are self-sufficient and do not require the use of additional assumptions about the smallness of the averaging elements inside the elastic body. It was established that a solution for the stresses depend on the Voigt and Reuss mean values of the elastic moduli, and the deformations are determined only by the Reuss mean values of elasticity modulus. The formulas that determine the stress-strain state in composite average isotropic plane with the hole is obtained. These solutions can be used as estimates of stresses and strains in the cross section of soil around the pile using, for example, brown-pile method of their immersion in the permafrost conditions.

Key words: composite heterogenic material, discrete random variable, averaging, effective deformation characteristics, Voigt hypothesis, Reuss hypothesis, Hill approximation.