DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.1.5

УДК 517.955.8
ББК 22.161.6

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ ВНУТРИ КОЛЬЦА

Дилмурат Абдиллажанович Турсунов

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики,
Ошский государственный университет
dosh2012@mail.ru
ул. Ленина, 331, 723500 г. Ош, Республика Кыргызстан

Аннотация. Целью исследования является развитие асимптотического метода пограничных функций для бисингулярно возмущенных задач. В работе построена асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными в кольце, когда особенность появляется внутри кольца. Построенный асимптотический ряд представляет собой ряд Пюйзо, и оно обосновано принципом максимума.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, модифицированные функции Бесселя, асимптотика, бисингулярная задача, задача Дирихле, пограничная функция, малый параметр.

Исследуем краевую задачу Дирихле

$$\varepsilon\Delta u(\rho, \varphi, \varepsilon) - (\rho - c)^{2n} u(\rho, \varphi, \varepsilon) = f(\rho, \varphi, \varepsilon), \ (\rho, \varphi) \in D, \tag{1}$$

$$u(a, \varphi, \varepsilon) = 0, \ u(b, \varphi, \varepsilon) = 0, \tag{2}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ – оператор Лапласа в полярной системе координат; $0 < \varepsilon << 1$ – малый параметр; $n \in \mathbf{N}$, $D = \{(\rho, \varphi) \mid a < \rho < b, \ 0 < \varphi \le 2\pi\}$, $0 < a < c < b$ – const; $f(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k f_k(\rho,\varphi)$, $f(c, \varphi, 0) \ne 0$, $f_k(\rho, \varphi) \in C^\infty(D \cup \Gamma)$, Γ – граница области D.

Известно [2], что решение задачи Дирихле (1)–(2) существует и единственно при $0 < \varepsilon$ – const. Требуется построить асимптотическое разложение решения задачи (1)–(2) при $\varepsilon \to 0$.

Не нарушая общности, считаем, что граничные условия (2) однородные, так как неоднородные граничные условия $u(a, \varphi, \varepsilon) = \psi_1(\varphi, \varepsilon)$, $u(b, \varphi, \varepsilon) = \psi_2(\varphi, \varepsilon)$, ($\psi_{1,2}(\varphi, \varepsilon)$ – бесконечно дифференцируемые функции) с помощью линейного преобразования $u(\rho, \varphi, \varepsilon) = v(\rho, \varphi, \varepsilon) + (\psi_2(\varphi, \varepsilon)(\rho - a) + \psi_1(\varphi, \varepsilon)(b - \rho)) / (b - a)$, относительно ρ, всегда можно привести к однородным $v(a, \varphi, \varepsilon) = 0$, $v(b, \varphi, \varepsilon) = 0$.

В бисингулярно возмущенных задачах одна особенность связана с сингулярной зависимостью решения от малого параметра, а другая – с негладкостью членов асимптотики [3]. В работах [3; 8–11] методом сращивания построены асимптотические разложения решения различных сингулярно возмущенных эллиптических уравнений. А в работах [1; 4–6], используя данную методику, построены полные асимптотические разложения решения задачи Дирихле с особенностями на границах области. В данной работе доказывается применимость обобщенного метода пограничных функций для решения задачи Дирихле в случае, когда вторая особенность появляется внутри области.

Уравнение (1) является бисингулярно возмущенным. Первая сингулярность – решение предельного уравнения не может удовлетворять граничным условиям (2). Вторая особенность (сингулярность) – коэффициенты ее внешнего разложения имеют нарастающие особенности, когда $\rho \to c$, то есть внешнее разложение имеет вид

$$U(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k u_k(\rho,\varphi),\ \text{при}\ \varepsilon\to 0, \tag{3}$$

где $u_0(\rho,\varphi) = -f_0(\rho,\varphi)/(\rho-c)^{2n}$, $u_k(\rho,\varphi) = -(f_k(\rho,\varphi) - \Delta u_{k-1}(\rho,\varphi))/(\rho-c)^{2n}$, $k\in\mathbf{N}$, $u_k(\rho,\varphi) = O\left((\rho-c)^{-2n-(2n+2)k}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ при $\rho\to c$.

Заметим, что асимптотический ряд (3) теряет свойство асимптотичности при $|\rho-c|\le\varepsilon^{1/(2n+2)}$. Докажем следующую теорему.

Теорема. Для решения задачи (1)–(2), при $\varepsilon\to 0$, справедливо асимптотическое разложение

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon) = V(\rho,\varphi,\varepsilon) + W(\tau,\varphi,\mu) + Q(\eta_1,\varphi,\lambda) + \tilde{Q}(\eta_2,\varphi,\lambda), \tag{4}$$

где $V(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)$, $W(\tau,\varphi,\mu)=\sum_{k=-2n}^{+\infty}\mu^k w_k(\tau,\varphi)$, $Q(\eta_1,\varphi,\lambda)=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k q_k(\eta_1,\varphi)$, $\tilde{Q}(\eta_2,\varphi,\lambda)=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k\tilde{q}_k(\eta_2,\varphi)$, $\tau=(\rho-c)/\mu$, $\varepsilon=\mu^{2n+2}$, $\eta_1=(b-\rho)/\lambda$, $\eta_2=(\rho-a)/\lambda$, $\varepsilon=\lambda^2$, причем $v_k(\rho,\varphi)\in C^\infty(D\cup\Gamma)$, $w_k(\tau,\varphi)\in C^\infty(D_0)$, $q_k(\eta_1,\varphi)\in C^\infty(D_1)$, $\tilde{q}_k(\eta_2,\varphi)\in C^\infty(D_2)$, $D_j=\{(\eta_j,\varphi)|\ 0<\eta_j<+\infty,\ 0<\varphi\le 2\pi\}$, $D_0=\{(\tau,\varphi)|\ |\tau|<+\infty,\ 0<\varphi\le 2\pi\}$, $\tilde{q}_k(\eta_2,\varphi)=O\left(e^{-\eta_2}\right)$, $q_k(\eta_1,\varphi)=O\left(e^{-\eta_1}\right)$, $k=0,1,\ldots$, при $\eta_{1,2}\to+\infty$; $w_{(k-1)(2n+2)+2+j}(\tau,\varphi)=O(\tau^{-2n+j})$, $j=0,1,\ldots,2n-1$; $w_{k(2n+2)}(\tau,\varphi)=O(\tau^{-(2n+2)})$, $w_{k(2n+2)+1}(\tau,\varphi)=O(\tau^{-(2n+1)})$, $k=0,1,\ldots$, $|\tau|\to+\infty$.

Доказательство. Доказательство теоремы состоит из двух частей: построение формального асимптотического разложения решения (ФАРР) задачи (1)–(2) и обоснование этого ФАРР, то есть оценки остаточного члена.

Построение ФАРР. Для построения ФАРР задачи (1)–(2) применяем обобщенный метод пограничных функций. ФАРР задачи (1)–(2) будем искать в виде (4). Учитывая граничные условия (2), имеем:

$$Q(0,\varphi,\lambda)=\psi_1(\varphi,\lambda^2),\ \psi_1(\varphi,\varepsilon)=-V(b,\varphi,\varepsilon)-W((b-c)/\mu,\varphi,\varepsilon), \tag{5}$$

$$\tilde{Q}(0,\varphi,\lambda)=\psi_2(\varphi,\lambda^2),\ \psi_2(\varphi,\varepsilon)=-V(a,\varphi,\varepsilon)-W((a-c)/\mu,\varphi,\varepsilon). \tag{6}$$

Подставляя (4) в (1), получим:

$$\varepsilon\Delta V(\rho,\varphi,\varepsilon)-(\rho-c)^{2n}V(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon)-h(\rho,\varphi,\varepsilon),\ (\rho,\varphi)\in D, \tag{7}$$

$$\mu^{2n}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\tau^2}+\frac{\mu}{a+\tau\mu}\frac{\partial W}{\partial\tau}+\frac{\mu^2}{(a+\tau\mu)^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}-\tau^{2n}W\right)=h\left(\tau\mu,\varphi,\mu^{2n+2}\right)\ (\tau,\varphi)\in D_0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\eta_1^2}-\frac{\lambda}{b-\eta_1\lambda}\frac{\partial Q}{\partial\eta_1}+\frac{\lambda^2}{(b-\eta_1\lambda)^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2}-(b-c-\eta_1\lambda)^{2n}Q=0,\ (\eta_1,\varphi)\in D_1, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{Q}}{\partial \eta_2^2} + \frac{\lambda}{a+\eta_2\lambda}\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial \eta_2} + \frac{\lambda^2}{(a+\eta_2\lambda)^2}\frac{\partial^2 \widetilde{Q}}{\partial \varphi^2} - (c-a-\eta_2\lambda)^{2n}\widetilde{Q} = 0,\ (\eta_2, \varphi) \in D_2, \tag{10}$$

где $W = W(\tau, \varphi, \mu)$, $Q = Q(\eta_1, \varphi, \lambda)$, $\widetilde{Q} = \widetilde{Q}(\eta_2, \varphi, \lambda)$.

По идее метода, ввели вспомогательный асимптотический ряд в виде функции $h(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k(\rho,\varphi)$, которую конкретизируем ниже.

Учитывая $V(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)$, из соотношения (7) для функции $v_k(\rho, \varphi)$ имеем:

$$v_0(\rho, \varphi) = -(f_0(\rho, \varphi) - h_0(\rho, \varphi)) / (\rho - c)^{2n},$$

$$v_k(\rho, \varphi) = -(f_k(\rho, \varphi) - \Delta v_{k-1}(\rho, \varphi) - h_k(\rho, \varphi)) / (\rho - c)^{2n},\ k \in \mathbf{N}.$$

Пусть $g_k(\rho, \varphi) = f_k(\rho, \varphi) - \Delta v_{k-1}(\rho, \varphi)$, $k = 0, 1,\ldots$, $v_{-1}(\rho, \varphi) \equiv 0$, тогда $v_k(\rho,\varphi) \in C^{(\infty)}(\overline{D})$, $k = 0, 1, \ldots$, когда

$$h_k(\rho,\varphi) = \sum_{j=0}^{2n-1} g_{k,j}(\varphi)(\rho-c)^j,\ g_{k,j}(\varphi) = \frac{\partial^j g_k(\rho,\varphi)}{j!\partial\rho^j}\Big|_{\rho=c},\ k = 0, 1, \ldots .$$

Отсюда получаем

$$v_k(\rho,\varphi) = -\sum_{j=2n}^{+\infty} g_{k,j}(\varphi)(\rho-c)^{j-2n},\ g_{k,j}(\varphi) = \frac{\partial^j g_k(\rho,\varphi)}{j!\partial\rho^j}\Big|_{\rho=c},\ k = 0, 1, \ldots .$$

Таким образом, мы определили все члены асимптотического ряда $V(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)$ в области $(D\cup\Gamma)$.

Из (8) для функции $w_k(\tau, \varphi)$ имеем:

$$\sum_{k=-2n}^{+\infty}\mu^{k+2n}\left(\frac{\partial^2 w_k(\tau,\varphi)}{\partial\tau^2} - \tau^{2n}w_n(\tau,\varphi)\right) = -\sum_{k=-2n}^{+\infty}\mu^{k+2n}\left(\mu\frac{\partial w_k(\tau,\varphi)}{\partial\tau} + \mu^2\frac{\partial^2 w_k(\tau,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right) + \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{2n-1} g_{k,j}(\varphi)\tau^j\mu^{j+(2n+2)k}.$$

Для функций $w_k(\tau, \varphi)$ ставим следующее предельное условие:

$$w_k(\tau, \varphi) \to 0, \text{ при } \tau \to \pm\infty,\ k = -2n, -2n+1, \ldots .$$

Получаем следующие задачи:

$$Lw_{-2n} \equiv \frac{\partial^2 w_{-2n}(\tau,\varphi)}{\partial\tau^2} - \tau^{2n}w_{-2n}(\tau,\varphi) = g_{0,0}(\varphi),\ w_{-2n}(\tau, \varphi) \to 0, \text{ при } \tau \to \pm\infty, \tag{11}$$

$$Lw_{-2n+j} = g_{0,j}(\varphi)\tau^j - \Phi_{-2n+j}(\tau, \varphi),\ w_{-2n+j}(\tau, \varphi) \to 0, \text{ при } \tau \to \pm\infty,\ j = 1, 2, \ldots, 2n-1, \tag{12}$$

$$Lw_{k(2n+2)+s} = -\Phi_{k(2n+2)+s}(\tau, \varphi),\ w_{k(2n+2)+s}(\tau, \varphi) \to 0, \text{ при } \tau \to \pm\infty,\ s = 0,1;\ k = 0, 1, \ldots, \tag{13}$$

$$Lw_{k(2n+2)+2+j} = g_{k+1,j}(\varphi)\tau^j - \Phi_{k(2n+2)+2+j}(\tau, \varphi),\ w_{k(2n+2)+2+j}(\tau, \varphi) \to 0, \text{ при } \tau \to \pm\infty,$$
$$j = 0, 1, \ldots, 2n-1;\ k = 0, 1, \ldots, \tag{14}$$

где $\Phi_k(\tau,\varphi)=\dfrac{\partial w_{k-1}(\tau,\varphi)}{\partial\tau}+\dfrac{\partial^2 w_{k-2}(\tau,\varphi)}{\partial\varphi^2}$.

Докажем следующие вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть $f_1(\tau)f_2(\varphi)C^\infty(D_0)$. Тогда задача

$$\frac{\partial^2 z(\tau,\varphi)}{\partial\tau^2}-\tau^{2n}z(\tau,\varphi)=f_1(\tau)f_2(\varphi),\qquad (\tau,\varphi)\in D_0 \tag{15}$$

имеет единственное решение $z(\tau,\varphi)\in C^\infty(D_0)$ в классе функций, растущих не быстрее какой-либо степени τ, когда $\tau\to\pm\infty$.

Доказательство. Пусть $\tau=\sqrt[n+1]{n+1}t$ и $z(t,\varphi)=z_1(\tau)f_2(\varphi)$, тогда получим

$$z_1''(t)-(n+1)^{2/(n+1)}(n+1)^{2n/(n+1)}t^{2n}z_1(t)=(n+1)^{2/(n+1)}f_1\left(\sqrt[n+1]{n+1}t\right),\qquad t\in R,$$

или

$$z_1''(t)-(n+1)^2t^{2(n+1)-2}z_1(t)=(n+1)^{2/(n+1)}f_1\left(\sqrt[n+1]{n+1}t\right),\qquad t\in R.$$

Фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения

$$z_1''(t)-(n+1)^2t^{2(n+1)-2}z_1(t)=0$$

имеет вид $\{U_{2(n+1)}(t), U_{2(n+1)}(-t)\}$, где $U_{2(n+1)}(t)=\sqrt{\dfrac{2t}{\pi}}K_{1/2(n+1)}\left(t^{n+1}\right)$, $t>0$, $K_{1/2(n+1)}$ – функция Макдональда [7]. Приведем некоторые свойства фундаментальной системы решений $\{U_{2(n+1)}(t)$, $U_{2(n+1)}(-t)\}$:

а) Вронскиан этих решений равен

$$W(U_{2(n+1)}(t), U_{2(n+1)}(-t))=2(n+1)\operatorname{cosec}(\pi/(2n+2);$$

б) при $t=0$ имеем

$$U_{2(n+1)}(0)=\frac{2^{-n/(2n+2)}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2n+2}\right),\ U'_{2(n+1)}(0)=\frac{2^{-(n+2)/(2n+2)}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(-\frac{1}{2n+2}\right);$$

в) при $t\to+\infty$ функция $U_{2(n+1)}(t)$ экспоненциально убывает: $U_{2(n+1)}(t)\sim t^{-n/2}e^{-t^{n+1}}$;

г) при $t<0$: $U_{2(n+1)}(t)=\sqrt{\dfrac{2|t|}{\pi}}\left(\pi\operatorname{cosec}\dfrac{\pi}{2(n+1)}I_{1/(2n+2)}\left(|t|^{n+1}\right)+K_{1/(2n+2)}\left(|t|^{n+1}\right)\right)$, где $I_{1/(2n+2)}(|t|^{n+1})$ – функция Бесселя мнимого аргумента;

д) при $t\to-\infty$ функция $U_{2(n+1)}(t)$ экспоненциально растет: $U_{2(n+1)}(t)=\operatorname{cosec}\dfrac{\pi}{2(n+1)}|t|^{-n/2}e^{|t|^{n+1}}\left(1+O\left(|t|^{-(n+1)}\right)\right)$.

С помощью фундаментальной системы решений $\{U_{2(n+1)}(t)$, $U_{2(n+1)}(-t)\}$ мы можем записать явное решение неоднородного уравнения (15):

$$z(t,\varphi)=f_2(\varphi)cU_{2(n+1)}(t)\int_{-\infty}^{t}U_{2(n+1)}(-s)f_1\left(\sqrt[n+1]{n+1}s\right)ds+$$

$$+f_2(\varphi)cU_{2(n+1)}(-t)\int_{t}^{+\infty}U_{2(n+1)}(s)f_1\left(\sqrt[n+1]{n+1}s\right)ds,\quad t=\tau/\sqrt[n+1]{n+1}.$$

С помощью этой леммы мы можем записать явные, единственные решения задач (11)–(14):

$$w_{-2n}(t,\varphi) = -g_{0,0}(\varphi)c\left(z_1(t)\int_{-\infty}^{t} z_2(s)ds + z_2(t)\int_{t}^{+\infty} z_1(s)ds\right),$$

$$w_{-2n+j}(t,\varphi) = cz_1(t)\int_{-\infty}^{t}\left(g_{0,j}(\varphi)s^j - \Phi_{-2n+j}(s,\varphi)\right)z_2(s)ds +$$

$$+ cz_2(t)\int_{t}^{+\infty}\left(g_{0,j}(\varphi)s^j - \Phi_{-2n+j}(s,\varphi)\right)z_1(s)ds,\ j = 1,2,\dots,2n-1;$$

$$w_{k(2n+2)+m}(t,\varphi) = cz_1(t)\int_{-\infty}^{t}\Phi_{k(2n+2)+m}(s,\varphi)z_2(s)ds + cz_2(t)\int_{t}^{+\infty}\Phi_{k(2n+2)+m}(s,\varphi)z_1(s)ds,\ m = 0,1;$$

$$w_{2k(n+1)+2+j}(t,\varphi) = cz_1(t)\int_{-\infty}^{t}\Phi_{2k(n+1)+2+j}(s,\varphi)z_2(s)ds + cz_2(t)\int_{t}^{+\infty}\Phi_{2k(n+1)+2+j}(s,\varphi)z_1(s)ds,$$

$$j = 0, 1, \dots, 2n-1;\ k = 0, 1, \dots,$$

где $z_1(t) = U_{2(n+1)}(t)$, $z_2(t) = U_{2(n+1)}(-t)$, $t = \tau / \sqrt[n+1]{n+1}$, $c = 2(n+1)\mathrm{cos}ec(\pi / (2n+2) \neq 0$.

Лемма 2. Решение уравнения

$$y''(x) - x^{2n}y(x) = x^k,\ n \in \mathbf{N},\ k \in \mathbf{Z},\ x \in \mathbf{R} \tag{16}$$

разлагается в асимптотический ряд

$$y(x) = x^{k-2n}\sum_{j=0}^{+\infty}\alpha_j x^{-2(n+1)j},\ x \to \pm\infty, \tag{17}$$

при этом ряд (17) можно многократно почленно дифференцировать и он является ФАР решения уравнения (16).

Доказательство. Подставляя асимптотический ряд (17) в (16), имеем:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\alpha_j(k-2n-2(n+1)j)(k-2n-2(n+1)j-1)x^{k-2n-2(n+1)j-2} - \sum_{j=0}^{+\infty}\alpha_j x^{k-2(n+1)j} = x^k.$$

И здесь однозначно определяем коэффициенты α_j:

$\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = -(k-2n)(k-2n-1)$, $\alpha_{j+1} = (k-2n-2(n+1)j)(k-2n-2(n+1)j-1)\,\alpha_j$, $j = 1, 2, 3, \dots$

Оценим теперь остаточный член ряда (17). Пусть $r(x) = y(x) - y_m(x)$, где $y_m(x) = x^{k-2n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_j x^{-2(n+1)j}$.

Тогда для $r(x)$ получим уравнение:

$$r''(x) - x^{2n}r(x) = O(x^{k-2n-(2(n+1)m+2)}). \tag{18}$$

Уравнение (18) имеет двухпараметрическое семейство решений $r(x, C_1, C_2)$. Из этих решений выберем то решение, которое удовлетворяет условиям: $r(-\infty) = r(+\infty) = 0$:

$$r(t) = O\left(t^{k-2n-2(n+1)m-2}\left(z_1(t)\int_{-\infty}^{t} z_2(s)ds + z_2(t)\int_{t}^{+\infty} z_1(s)ds\right),\right.$$

где $z_1(t) = U_{2(n+1)}(t)$, $z_2(t) = U_{2(n+1)}(-t)$, $t = x / \sqrt[n+1]{n+1}$, $c = 2(n+1)\operatorname{cosec}(\pi / (2n+2) \neq 0$.

Учитывая асимптотические свойства в) и д) функции $U_{2(n+1)}(t)$, получаем:

$$r(t) = O(t^{k-2n-(2(n+1)m+2)-2n}) = O(t^{k-2n-2(n+1)(m+1)}), \text{ при } t \to \pm\infty.$$

Отсюда имеем: $r(x) = O(x^{k-2n-2(n+1)(m+1)})$, при $x \to \pm\infty$.

Применяя лемму 2, при $\tau \to \pm\infty$ мы для функции $w_j(\tau, \varphi)$ получаем следующие асимптотические оценки:

$$w_{k(2n+2)+2+j}(\tau, \varphi) = O(\tau^{-2n+j}),\ j = 0, 1,..., 2n-1;\ k = -1,0,\ldots$$

$$w_{k(2n+2)+m}(\tau, \varphi) = O(\tau^{-(2n+2)+m}),\ m = 0,1;\ k = 0, 1, \ldots$$

То есть $\forall k$, $w_k(\tau, \varphi) \to 0$ при $\tau \to \pm\infty$, $k = -2n, -2n+1, \ldots$. Отметим также, что при $\varepsilon \to 0$ справедливы разложения:

$$W\left(\frac{b-c}{\mu}, \varphi, \mu\right) = \sum_{k=-2n}^{+\infty} \mu^k w_k\left(\frac{b-c}{\mu}, \varphi\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \widetilde{w}_k(\varphi),$$

$$W\left(\frac{a-c}{\mu}, \varphi, \mu\right) = \sum_{k=-2n}^{+\infty} \mu^k w_k\left(\frac{a-c}{\mu}, \varphi\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \approx\!\!\!\!\!w_k(\varphi).$$

А из соотношения (9) при $Q(\eta_1, \varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k q_k(\eta_1, \varphi)$ для функции $q_k(\eta_1, \varphi)$ имеем:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \left(\frac{\partial^2 q_k(\eta_1, \varphi)}{\partial \eta_1^2} - \alpha^{2n} q_k(\eta_1, \varphi)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\lambda^{k+1} \frac{\partial q_k(\eta_1, \varphi)}{\partial \eta_1} - \lambda^{k+2} \frac{\partial^2 q_k(\eta_1, \varphi)}{\partial \varphi^2}\right) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{2n} \lambda^k \sum_{j=0}^{k} C_{2n}^j (-1)^j \eta_1^j \alpha^{2n-j} q_{k-j}(\eta_1, \varphi) + \sum_{k=2n+1}^{+\infty} \lambda^k \sum_{j=0}^{2n} C_{2n}^j (-1)^j \eta_1^j \alpha^{2n-j} q_{k-j}(\eta_1, \varphi)\text{'}$$

где $\alpha = b - c$.

Учитывая условие (2), имеем

$$q_{2k}(0, \varphi) = \psi_{1,k}(\varphi),\ q_{2k+1}(0, \varphi) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

дополнительно требуем, чтобы $q_k(\eta_1, \varphi) \to 0$, при $\eta_1 \to +\infty$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Отсюда

$$lq_0 \equiv \frac{\partial^2 q_0(\eta_1, \varphi)}{\partial \eta_1^2} - \alpha^{2n} q_0(\eta_1, \varphi) = 0,\ q_0(0, \varphi) = \psi_{1,0}(\varphi),\ \lim_{\eta_1 \to +\infty} q_0(\eta_1, \varphi) = 0, \tag{19}$$

$$lq_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \eta_1^j C_{2n}^j \alpha^{2n-j} q_{k-j}(\eta_1, \varphi) + \frac{\partial q_{k-1}(\eta_1, \varphi)}{\partial \eta_1} - \frac{\partial^2 q_{k-2}(\eta_1, \varphi)}{\partial \varphi^2},\ 1 \le k \le n,$$

$$lq_k = \sum_{j=1}^{2n} (-1)^j \eta_1^j C_{2n}^j \alpha^{2n-j} q_{k-j}(\eta_1, \varphi) + \frac{\partial q_{k-1}(\eta_1, \varphi)}{\partial \eta_1} - \frac{\partial^2 q_{k-2}(\eta_1, \varphi)}{\partial \varphi^2},\ k > n,$$

$$q_k(0, \varphi) = \begin{cases} \psi_{1,m}(\varphi), \text{ при } k = 2m \\ 0, \text{ при } k = 2m+1, m \in \mathrm{N} \end{cases},\ \lim_{\eta_1 \to +\infty} q_k(\eta_1, \varphi) = 0,\ k = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

Так как уравнение $y''(x) - k^2 y = F(x)$, $0 < x < \infty$ с краевыми условиями $y(0) = y^0$, $y(+\infty) = 0$ имеет единственное решение:

$$y(x) = y^0 e^{-kx} + \frac{1}{2k}\left(\int\limits_{+\infty}^{x} e^{k(x-s)}F(s)ds - \int\limits_{0}^{x} e^{k(s-x)}F(s)ds + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-k(x+s)}F(s)ds\right),$$

то задачи (19), (20) тоже имеют единственные решения, и при $\eta_1 \to +\infty$ для решения этих задач имеем:

$$q_0(\eta_1,\varphi) = \psi_{1,0}(\varphi)e^{-\eta_1\alpha^n},\ q_{2k+1}(\eta_1,\varphi) = e^{-\eta_1\alpha^n}\sum_{j=1}^{4k+2}\eta_1^j q_{2k+1,j}(\varphi),$$

$$q_{2k}(\eta_1,\varphi) = \psi_{1,k}(\varphi)e^{-\eta_1\alpha^n} + e^{-\eta_1\alpha^n}\sum_{j=1}^{4k}\eta_1^j q_{2k,j}(\varphi),$$

где $q_{k,j}(\varphi)$ – ограниченные, гладкие функции.

Следовательно,

$$Q(\eta_1,\varphi,\lambda) = e^{-\eta_1\alpha^n}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^{2k}\left(\psi_{1,k}(\varphi) + P_{2k}(\eta_1,\varphi)\right) + \sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^{2k+1}P_{2k+1}(\eta_1,\varphi)\right),$$

где $P_{2k}(\eta_1,\varphi) = \sum_{j=1}^{4k}\eta_1^j q_{2k,j}(\varphi)$, $P_{2k+1}(\eta_1,\varphi) = \sum_{j=1}^{4k+2}\eta_1^j q_{2k+1,j}(\varphi)$.

Проведя аналогичное исследование, для решения задачи (7)–(3) получаем:

$$\widetilde{Q}(\eta_2,\varphi,\lambda) = e^{-\eta_2\widetilde{\alpha}^n}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^{2k}\left(\psi_{2,k}(\varphi) + \widetilde{P}_{2k}(\eta_2,\varphi)\right) + \sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^{2k+1}\widetilde{P}_{2k+1}(\eta_2,\varphi)\right),\ \widetilde{\alpha} = c - a.$$

Таким образом, мы построили ФАРР (4). Перейдем теперь к обоснованию этого ФАРР.

Обоснование ФАРР. Пусть

$$R(\rho, \varphi, \varepsilon) = u(\rho, \varphi, \varepsilon) - u_s(\rho, \varphi, \varepsilon),$$

где

$$u_s(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{s}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi) + \sum_{k=0}^{2s+1}\lambda^k\left(q_k(\eta_1,\varphi) + \widetilde{q}_k(\eta_2,\varphi)\right) + \sum_{k=-2n}^{(2n+2)s+1}\mu^k w_k(\tau,\varphi),$$

$R(\rho, \varphi, \varepsilon)$ – остаточный член.

Тогда для $R(\rho, \varphi, \varepsilon)$ получим задачу:

$$\varepsilon\Delta R(\rho, \varphi, \varepsilon) - (\rho - c)^{2n}R(\rho, \varphi, \varepsilon) = O(\varepsilon^{s+1}),\ \varepsilon \to 0,\ (\rho, \varphi) \in D,$$

$$R(a, \varphi, \varepsilon) = O(e^{-1/\lambda}),\ R(b, \varphi, \varepsilon) = O(e^{-1/\lambda}),\ 0 < \lambda \to 0,$$

Применяя преобразование [1; 4–6] и принцип максимума, получаем оценку $R(\rho, \varphi, \varepsilon) = O(\varepsilon^s)$, $\varepsilon \to 0$, в области $D \cup \Gamma$. Следовательно, справедливо асимптотическое разложение (4), то есть теорема доказана.

Заключение

Построено равномерное асимптотическое разложение по малому параметру ε, решения краевой задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа второго порядка с двумя независимыми переменными в кольце. В рассматриваемом случае предельное уравнение имеет вторую особенность внутри кольца, и для этого случая мы доказали применимость обобщенного метода пограничных функций. Методом сращивания тоже можно построить асимптотическое разложение решения исследованной задачи Дирихле, но, на наш взгляд, примененный подход значительно сокращает вычисления. Полученный асимптотический ряд представляет собой ряд Пюйзо. Главный член асимптотического разложения решения имеет отрицательную дробную степень по малому параметру, что свойственно бисингулярно возмущенным уравнениям. Формальное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле обосновано принципом максимума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алымкулов, К. Об одном методе построения асимптотических разложений бисингулярно возмущенных задач / К. Алымкулов, Д. А. Турсунов // Известия вузов. Математика. – 2016. – № 12. – С. 3–11.
2. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, Н. Трудингер. – М. : Наука, 1989. – 464 с.
3. Ильин, А. М. Согласование асимптотических разложений краевых задач / А. М. Ильин. – М. : Наука, 1989. – 334 с.
4. Турсунов, Д. А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенной задачи Дирихле в кольце с квадратичным ростом на границе / Д. А. Турсунов, У. З. Эркебаев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2016. – Т. 8, № 2. – С. 52–61.
5. Турсунов, Д. А. Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного уравнения в кольце / Д. А. Турсунов, У. З. Эркебаев // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2015. – Т. 25, вып. 4. – С. 517–525.
6. Турсунов, Д. А. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения с особенностями / Д. А. Турсунов, У. З. Эркебаев // Уфимский математический журнал. – 2016. – Т. 8, № 1. – С. 102–112.
7. Федорюк, М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М. В. Федорюк. – М. : Наука, 1983. – 352 с.
8. De Groen, P. P. N. Critical points of the degenerate operator in elliptic singular perturbation problem / P. P. N. de Groen // Mathematish Centrum, Amsterdam. – 1975. – ZW 28/75. – P. 1–67.
9. Eckhaus, W. Asymptotic solutions of singular perturbation problems for linear differential equations of elliptic type / W. Eckhaus, E. M. de Jager // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1966. – № 23:1. – P. 26–86.
10. Eckhaus, W. Boundary layers in linear elliptic singular perturbation problems / W. Eckhaus // SIAM Rev. – 1972. – № 14. – P. 225–270.
11. Levinson, N. The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$ for small ε / N. Levinson // Ann. of Math. – 1950. – № 51. – P. 428–445.

REFERENCES

1. Alymkulov K., Tursunov D.A. Ob odnom metode postroeniya asimptoticheskikh razlozheniy bisingulyarno vozmushchennykh zadach [A Method for Constructing Asymptotic Expansions of Bisingularly Perturbed Problems]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2016, no. 12, pp. 3-11.
2. Gilbarg D., Trudinger N. *Ellipticheskie differentsialnye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Elliptic Partial Differential Equations of Second Order]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 464 p.
3. Ilyin A.M. *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozheniy kraevykh zadach* [Matching of Asymptotic Expansions of Boundary Value Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 334 p.
4. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asimptotika resheniya bisingulyarno vozmushchennoy zadachi Dirikhle v koltse s kvadratichnym rostom na granitse [Asymptotic of the Solution to the Bisingular Perturbed Dirichlet Problem in the Ring With Quadratic Growth on the Boundary]. *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»* [Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"], 2016, vol. 8, no. 2, pp. 52-61.

5. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asimptotika resheniya zadachi Dirikhle dlya bisingulyarno vozmushchennogo uravneniya v koltse [Asymptotic of the Solution of the Dirichlet Problem for a Bisingularly Perturbed Equation in a Ring]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye nauki* [Bulletin of the Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science], 2015, vol. 25, iss. 4, pp. 517-525.

6. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asimptoticheskoe razlozhenie resheniya zadachi Dirikhle dlya ellipticheskogo uravneniya s osobennostyami [Asymptotic Expansions of Solutions to Dirichlet problem for Elliptic Equation with Singularities]. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal* [Ufa Mathematical Journal], 2016, vol. 8, no. 1, pp. 102-112.

7. Fedoryuk M.V. *Asimptoticheskiye metody dlya lineynykh obyknovennykh differentsialnykh uravneniy* [Asymptotic Methods for Linear Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 352 p.

8. De Groen P.P.N. Critical points of the degenerate operator in elliptic singular perturbation problem. *Mathematish Centrum, Amsterdam*, 1975, ZW 28/75, pp. 1-67.

9. Eckhaus W. E.M. de Jager Asymptotic solutions of singular perturbation problems for linear differential equations of elliptic type. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1966, no. 23 (1), pp. 26-86.

10. Eckhaus W. Boundary layers in linear elliptic singular perturbation problems. *SIAM Rev.*, 1972, no. 14, pp. 225-270.

11. Levinson N. The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$ for small ε. *Ann. of Math.*, 1950, no. 51, pp. 428-445.

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM WITH SINGULARITY INSIDE THE RING

Dilmurat Abdillazhanovich Tursunov

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Informatics,
Osh State University
dosh2012@mail.ru
Lenina St., 331, 723500 Osh, Republic of Kyrgyzstan

Abstract. The Dirichlet problem for elliptic equations with a small parameter in the highest derivatives occupies the unique position in different fields of science such as mathematics, physics, mechanics, and fluid dynamics. It is necessary to apply different asymptotic or numerical methods, because an explicit solution to these problems cannot be obtained through analytical methods. An asymptotic expansions design of solutions for singularly perturbed problems is an urgent problem, especially for bisingular problems. These problems have two singularities. The first singularity is associated with a singular dependence of the solution from a small parameter. The second singularity is related to the asymptotic behavior of the nonsmoothness members of the external solution, i.e. the problem corresponding to the original singular problem is the singular problem, too. The aim of the research is to develop the asymptotic method of boundary functions for bisingular perturbed problem. The possibility of using the generalized method of boundary functions for designing a complete asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem was shown. This method has been applied to find the solutions of bisingular perturbed, linear, non-homogeneous, second-order elliptic equations with two independent variables in the ring with the assumption that the second singularity appears inside the region. The obtained asymptotic series is a Pyuyzo series. The main term of the asymptotic expansion of the solution has a negative fractional power of the small parameter which is typical to bisingular perturbed equations.

Key words: elliptic equation, Bessel modified functions, asymptotic, bisingularly problem, Dirichlet problem, boundary layer function, small parameter.