DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.1.1

УДК 517.9
ББК 22.161.1

ЗАДАЧА БАЗИСНОСТИ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА 2*n*-ГО ПОРЯДКА С *n*-КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Абдулвагаб Исмаилович Вагабов

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа,
Дагестанский государственный университет
algebra-dgu@mail.ru
ул. М. Гаджиева, 43-А, 367025 г. Махачкала, Российская Федерация

Аннотация. Рассматриваемая нами задача имеет существенные отклонения с точки зрения широко известных регулярных в смысле Биркгофа-Тамаркина спектральных задач (см.: [1; 3]). С одной стороны, n-кратность каждого из двух характеристических корней дифференциального выражения. С другой – мы придерживаемся самого плохого с классической точки зрения случая распадающихся краевых условий, когда все из них, кроме одного, заданы на левом конце и лишь одно – на правом конце заданного интервала.

Спектр изучаемой задачи исчерпывается чисто мнимыми собственными значениями равностоящими друг от друга. Каждому собственному значению соответствует одна собственная и $n-1$ присоединенных к ней функций. Дается построение резольвенты пучка как мероморфной функции параметра λ. В основной теореме доказывается, что полный вычет по параметру от резольвенты, приложенной к $2n-1$ раз дифференцируемой функции (обращающейся в нуль вместе с производными на концах рассматриваемого интервала), равен этой функции. Указанный вычет, как известно, представляет ряд Фурье по корневым функциям исходной задачи.

Ключевые слова: фундаментальные решения, функция Коши, функция Грина, спектр.

Постановка задачи

В теории краевых задач с параметром для обыкновенных линейных дифференциальных операторов, начиная с Лиувилля, Биркгофа – Тамаркина, четко выделены классы регулярных задач, собственные элементы которых обладают свойством базисности. К этим классам задач предъявляются естественные, но жесткие требования, в частности – различность корней основного характеристического уравнения [1]. В случае же кратности таких корней несоизмеримо возрастает трудность исследования. Случай единственного n-кратного корня рассмотрен в нашей работе [2].

В данной работе изучена задача для дифференциального оператора порядка $2n$ с двумя n-кратными характеристическими корнями при распадающихся граничных условиях. Установлена эффективная формула разложения произвольной функции по корневым функциям задачи.

Рассматривается краевая задача для дифференциального выражения с параметром λ

$$l(y) \equiv \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right)^n y(x), \quad 0 < x < 1 \tag{1}$$

и краевыми условиями

$$U_s(y) \equiv \frac{d^s y(0)}{dx^s} = 0, \quad \mathrm{s} = \overline{1{,}2\mathrm{n}-1}, \; U_{2n}(y) \equiv y(1) = 0. \tag{2}$$

Введем в рассмотрение фундаментальную систему решений уравнения $l(y) = 0$:

$$y_i(x) = x^{i-1} e^{\lambda x}, \quad y_{n+i}(x) = x^{n-i} e^{-\lambda x}, \; i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Обозначим через $Y(x, \lambda)$ матрицу Вронского решений (3). Как следует из теоремы Лиувилля, ее определитель не зависит от x, то есть $|Y(\xi, \lambda)| \equiv |Y(\lambda)|$. Далее мы пользуемся функцией Коши:

$$g(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & \dots & y_{2n}(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) & \dots & y_{2n}'(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(2n-2)}(\xi) & y_2^{(2n-2)}(\xi) & \dots & y_{2n}^{(2n-2)}(\xi) \\ y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_{2n}(x) \end{vmatrix} \dfrac{-1}{|Y(\lambda)|} & \text{при } x \le \xi \\ 0 & \text{при } x \ge \xi \end{cases} \tag{4}$$

Функция Коши может быть определена не единственным образом. Функция

$$\widetilde{g}(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le \xi \\ \begin{vmatrix} y_1(\xi) & \dots & y_{2n}(\xi) \\ y_1'(\xi) & \dots & y_{2n}'(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(2n-2)}(\xi) & \dots & y_{2n}^{(2n-2)}(\xi) \\ y_1(x) & \dots & y_{2n}(x) \end{vmatrix} \dfrac{-1}{|Y(\lambda)|} & \text{при } x \ge \xi \end{cases} \tag{4.1}$$

также служит функцией Коши.

Определяющим свойством этой функции служит то, что она:

1) $2n - 2$-кратно непрерывно дифференцируема по x и ξ на $(0,1)$. При любом фиксированном x $g(x, \xi, \lambda)$ имеет непрерывные производные n-го порядка по ξ в каждом из интервалов $[0, x)$, $(x, 1]$. Производная $n - 1$-го порядка при $\xi = x$ имеет скачок, равный 1;

2) при $x \ne \xi$ $l_\xi(g(x,\xi,\lambda)) = 0$.

Формула (4) удобна нам при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, а формула (4.1) – при $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Дальнейшие суждения отнесем к случаю $\operatorname{Re}\lambda > 0$, используя формулу (4) и опуская аналогичные суждения в случае $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Лемма 1. Для любой $2n-1$-кратно непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, $0 < x < 1$, равной нулю со всеми производными при $x = 0,1$, справедливы формулы:

$$\int_0^1 g(x,\xi,\lambda) f^{(2n-1)}(\xi) d\xi = f(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{5}$$

при $|\lambda| >> 1$.

$$\int_x^1 g(x,\xi,\lambda) f^{(k)}(\xi) d\xi = \int_x^1 \frac{d^k g(x,\xi,\lambda)}{d\xi^k} f(\xi) d\xi, \tag{6}$$

при $k < 2n-1$.

Доказательство. К формулам (5), (6) приходим интегрированием по частям соответственно $2n-1$ и k раз. Первый множитель в (4) получен из $Y(\xi,\lambda)$ заменой последней строки строкой $y_1(x),\ldots y_{2n}(x)$. Вынося в этом множителе $e^{\lambda\xi}$ из первых n столбцов и $e^{-\lambda\xi}$ из последних n столбцов, придем к определителю, последняя строка которой имеет вид $\left(e^{\lambda(x-\xi)},\ldots\ x^{n-1}\ e^{\lambda(x-\xi)},\ x^{n-1}e^{-\lambda(x+\xi)},\ldots\ e^{-\lambda(x+\xi)}\right)$, а предыдущие $2n-1$ строк являются лишь многочленами от λ степеней $0, 1, 2, \ldots 2n-2$. При этом коэффициенты многочленов зависят от ξ, что очевидно из формул (3). Для доказательства равенства (5), выполняя интегрирование по частям, находим:

$$\int_x^1 g(x,\xi,\lambda) f^{(2n-1)}(\xi) d\xi = f(x) + \int_x^1 f(\xi) \frac{d^{2n-1} g(x,\xi,\lambda)}{d\xi^{2n-1}} d\xi. \tag{6.1}$$

Прежде всего отметим далее, что для определителя Вронского в знаменателе формулы (4) очевидна [принимая во внимание (3) и формулу Лиувилля] оценка:

$$|У(x,\lambda)| \approx |\lambda|^{1+2+\ldots+2n-1} C(\varepsilon), \quad C(\varepsilon) > 0, \text{ при } \varepsilon > 0,\ \forall x \in (\varepsilon, 1-\varepsilon). \tag{6.2}$$

Покажем, что второе слагаемое в правой части равенства (6.1) имеет искомую оценку, указанную в (5). Для этого определитель в *числителе* дроби $\dfrac{d^{2n-1} g(x,\xi,\lambda)}{d\xi^{2n-1}}$ представим в виде $(2n)!$ его членов. При этом ограничимся членом $d(\lambda,x)$, равным произведению элементов главной диагонали, так как оценки остальных членов вполне аналогичны: $d(\lambda,x) \approx \prod\limits_{\substack{k=0\\|\lambda|>>1}}^{2n-1} \lambda^k q_k(x) \int\limits_x^1 f(\xi) \dfrac{d^{2n-1} p_k(\xi)\, e^{\lambda(x-\xi)}}{d\xi^{2n-1}} d\xi$, интегрируя по частям, имеем $d(\lambda,x) \approx \prod\limits_{k=0}^{2n-1} \lambda^k q_k(\xi) \int\limits_x^1 f(\xi) p_k(\xi) e^{\lambda(x-\xi)} d\xi$, $p_k(\xi), q_k(\xi)$ – многочлены. Таким образом, приходим к оценке:

$$d(\lambda,x) \approx \lambda^{1+2+\ldots+2n-2} \text{ при } |\lambda| >> 1, \tag{6.3}$$

которая фактически справедлива для определителя в числителе формулы (4). Соединяя выражения (6.2), (6.3), придем к оценке интеграла в правой части (6.1), имеющей вид $O\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$ и приводящей к формуле (5) при любом фиксированном $x \in (0,1)$.

Приведем очевидное следствие леммы 1.

Утверждение 1. Пусть C_l – окружность с центром в начале λ-плоскости и радиуса l, а $f(x)$ – функция, указанная в лемме 1, тогда

$$\lim_{\substack{l\to\infty \\ 0<x<1}} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_l} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^1 g(x,\xi,\lambda) \frac{d^{2n-1} f(\xi)}{d\xi^{2n-1}} d\xi \overset{(5)}{=} f(x).$$

Функция Грина и основная теорема

Последующее изложение свяжем с известным выражением мероморфной по λ функцией Грина задачи (1)–(2), (см.: [1; 3, с. 46]):

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{7}$$

где $\Delta(\lambda) = \det\{U_s(y_j(x))\}_{s,j=1}^{2n}$;

$$\Delta(x,\xi,\lambda) = \begin{vmatrix} g(x,\xi,\lambda) & y_1(x) \ldots y_{2n}(x) \\ U_1(g)_x & \\ \ldots & \{U_s(y_j)\}_{s,j=1}^{2n} \\ \ldots & \\ U_{2n}(g)_x & \end{vmatrix}. \tag{8}$$

В определителе $\Delta(\lambda)$ последние n столбцов и первые n столбцов получены друг из друга заменой λ на $-\lambda$. Последняя же строка в $\Delta(\lambda)$ равна $(e^{\lambda} \ldots e^{\lambda}, e^{-\lambda} \ldots e^{-\lambda})$. Заметим также, что члены определителя $\Delta(\lambda)$ с индексами $(1,2)\ldots(1,2n-1); (2,3)\ldots(2,2n-2); \ldots (n-1,n),(n-1,n+1)$ равны нулю. Указанные особенности позволяют сравнительно просто указать его члены с наибольшей степенью $\lambda : n(n-1)$. Таким образом

$$\Delta(\lambda) = [A]\lambda^{n(n-1)}(e^{\lambda} - e^{-\lambda}), \tag{9}$$

где $[A] \equiv A + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, $A \neq 0$ – константа. Мы получаем следующее утверждение.

Утверждение 2. Спектр задачи (1)–(2) исчерпывается асимптотическими при росте ν значениями $\lambda_\nu \approx \pi\nu\sqrt{-1}, \nu \in Z$.

Далее разложим числитель функции Грина на два слагаемых:

$$\Delta(x,\xi,\lambda) = g(x,\xi,\lambda)\Delta(\lambda) + E(x,\xi,\lambda), \tag{10}$$

где определитель $E(x,\xi,\lambda)$ получен из (8) заменой нулем элемента в его левом верхнем углу. При этом первый столбец в $E(x,\xi,\lambda)$ с учетом условий (2) и представления (4) имеет асимптотический по $\lambda \to \infty$ вид:

$$e^{-\xi\lambda} \cdot \left(0, \frac{1}{\lambda^{2n-1}}, \frac{1}{\lambda^{2n-2}}, \ldots \frac{1}{\lambda}, 0\right)^t, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \geq 0. \tag{11}$$

Принимая во внимание (11) и конструкцию $E(x,\xi,\lambda)$, приходим (при $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ и $x \leq \xi$) к оценке

$$E(x,\xi,\lambda) \sim \frac{\lambda^{n(n-1)}}{\lambda^{2n-1}} e^{\lambda(x-\xi)}, \tag{12}$$

Согласно (9), (11) приходим к асимптотической по $\lambda \to \infty$ при $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ оценке

$$\frac{E(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \sim \frac{e^{\lambda(x-\xi)}}{\lambda^{2n-1}}, \quad x \leq \xi. \tag{13}$$

Принимая во внимание аналогичную (13) оценку при $\operatorname{Re}\lambda < 0$, получим следующее утверждение.

Утверждение 3. Для любой непрерывной функции $f(x)$, $0 < x < 1$ справедливо равенство

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_l} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^1 \frac{E(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)} f(\xi)\, d\xi = 0, \tag{14}$$

где C_l – окружность с центром в нуле λ-плоскости и радиусом $\pi\left(l+\frac{1}{2}\right)$.

В завершение нами устанавливается следующая теорема.

Теорема. Для любой $2n-1$ раз дифференцируемой функции $f(x)$, равной нулю вместе со всеми производными на концах 0, 1, справедлива формула разложения по корневым элементам задачи (1)–(2):

$$\lim_{\substack{l\to\infty \\ 0<x<1}} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_l} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) \frac{d^{2n-1} f(\xi)}{d\xi^{2n-1}} d\xi = f(x). \tag{15}$$

Доказательство. Согласно формуле (10) и утверждению 3 левая часть в (15) записывается в виде

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_l} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^1 g(x,\xi,\lambda) \frac{d^{2n-1} f(\xi)}{d\xi^{2n-1}} d\xi +$$

$$+\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_l} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^1 \frac{E(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \frac{d^{2n-1} f(\xi)}{d\xi^{2n-1}} d\xi.$$

Остается сослаться на утверждения 1 и 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вагабов, А. И. О равносходимости разложений в тригонометрический ряд Фурье и по главным функциям обыкновенных дифференциальных операторов / А. И. Вагабов // Изв. АН СССР. Серия математическая. – 1984. – Т. 48, № 3. – С. 614–630.

2. Вагабов, А. И. *n*-кратная формула разложения в ряды Фурье по корневым элементам дифференциального пучка с n-кратной характеристикой / А. И. Вагабов // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52, № 2. – С. 555–560.

3. Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – М. : Наука, 1969. – 526 с.

REFERENCES

1. Vagabov A.I. O ravnoskhodimosti razlozheniy v trigonometricheskiy ryad Furye i po glavnym funktsiyam obyknovennykh differentsialnykh operatorov [About the Equiconvergence of Decomposition in a Trigonometrical Fourier Series and by the Main Functions of Ordinary Differential Operators]. *Izv. AN SSSR. Seriya matematicheskaya*, 1984, vol. 48, no. 3, pp. 614-630.

2. Vagabov A.I. *n*-kratnaya formula razlozheniya v ryady Furye po kornevym elementam differentsialnogo puchka s *n*-kratnoy kharakteristikoy [n-Fold Expansion Formula in Fourier Series by Root Elements of a Differential Sheaf with the *n*-Fold Characteristic]. *Differentsialnye uravneniya*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 555-560.

3. Naymark M.A. *Lineynye differentsialnye operatory* [Linear Differential Operators]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 526 p.

THE TASK OF BASIS PROPERTY OF ROOT FUNCTIONS OF DIFFERENTIAL SHEAF OF THE 2*ND* ORDER WITH *N*-FOLD CHARACTERISTICS

Abdulvagab Ismailovich Vagabov

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Mathematical Analysis,
Dagestan State University
algebra-dgu@mail.ru
M. Gadzhieva St., 43-A, 367025 Makhachkala, Russian Federation

Abstract. The task under consideration is characterized by essential deviations from the viewpoint of widely famous regular (in Birkhoff-Tamarkin's sense) spectral tasks (see [1; 3]). On the one hand, we have the n-multiplicity of each of the two characteristic roots of the differential expression. On the other hand, we adhere to the worst from the classical viewpoint case of disintegrating boundary conditions, when all but one of them are given at the left end and only one at the right end of the given interval.

The range of the studied problem is limited by imaginary eigenvalues that are equidistant from each other. Each eigenvalue is characterized by one proper and $n-1$ functions attached to it. We construct the resolvent of the sheaf as a meromorphic function of the parameter λ. We prove in the main theorem that the total residue with respect to a parameter from the resolvent applied to a $2n-1$ time differentiable function (vanishing together with the derivatives at the ends of the interval under consideration) is equal to this function. This residue, as it is well known, represents a Fourier series with respect to the root functions of the original task.

Key words: fundamental solutions, function of Cauchy, function of Green, range.